МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1982

УДК 533.6.011

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЛН ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

САИЧЕВ А. И.

В работе выполнен статистический анализ плоских нелинейных случайных волн в газе с показателем политропы $\gamma=3$ посредством сведения исходной задачи к вспомогательной граничной задаче Коши для системы обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений. Приводится вероятностное распределение для скорости и плотности газа в случае, когда в начальный момент времени плотность газа была постоянной, а поле скоростей гауссовым и статистически однородным. Отмечено, что существует конечное время статистического нелинейного взаимодействия встречных волн, на котором вероятностное распределение скорости и плотности газа может быть существенно негауссовым.

Достаточно корректный статистический анализ нелинейных случайных волн газовой динамики весьма далек от завершения. К настоящему времени более или менее строго исследованы лишь спектрально-энергетические характеристики нелинейных волн Римана, распространяющихся в одном направлении [1–4]. Вопрос же о строгом статистическом анализе встречных нелинейных случайных волн газовой динамики до последнего времени оставался открытым. Если показатель политропы газа $\gamma=3$, плоские волны в нем представимы в виде суперпозиции встречных волн Римана и задачу статистического анализа волн в газе удается свести к двухточечной граничной задаче для обыкновенных дифференциальных стохастических уравнений. В [5–7] развит математический аппарат статистического анализа двухточечных стохастических граничных задач. В данной работе этот аппарат применяется к статистическому анализу изоэнтропических плоских волн в газах с показателем политропы $\gamma=3$. В [8, 9] было показано, что слабонелинейные периодические волны в газах с произвольным $\gamma>-1$ также приближенно представимы в виде суперпозиции встречных волн Римана. По-видимому, этот вывод распространяется и на случайные (квазипериодические) акустические волны. Соответственно результаты данной работы могут быть применены и при статистическом анализе плоских случайных акустических волн при $\gamma>-1$. Статистический анализ случайных волн в упругом теле, для которого $\gamma=-1$, проведен в [10].

Плоские изоэнтропические движения сплошной среды с $\gamma=3$ описываются следующими уравнениями для скорости $v(x, t)$ и местной скорости звука $c(x, t)$, в данном случае пропорциональной плотности [11]:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+c\frac{\partial c}{\partial x}=\eta(x,t),\qquad \frac{\partial c}{\partial t}+v\frac{\partial c}{\partial x}+c\frac{\partial v}{\partial x}=0 \tag{1}$$

Здесь $\eta(x, t)$ — внешняя сила, которую будем считать случайной гауссовой с корреляционной функцией

$$\langle\eta(x, t)\eta(x+s, t+\tau)\rangle=D(s)\delta(\tau) \tag{2}$$

Зададим начальные условия уравнений (1) в виде

$$v(x, 0)=v_0(x),\qquad c(x, 0)=c_0(x) \tag{3}$$

где $v_0(x)$, $c_0(x)$ — случайные функции с заданными статистическими свойствами.

Уравнения (1) эквивалентны следующей системе характеристических уравнений (например, [11]):

$$\frac{dx_i}{dt}=\alpha_i,\quad \frac{d\alpha_i}{dt}=\eta(x_i,t),\quad i=1,2 \tag{4}$$

с условиями, заданными в два момента времени $t=0$ и $t=t$:

$$\begin{gathered}\alpha_1(t=0)=v_0(x_1(0))+c_0(x_1(0))\\ \alpha_2(t=0)=v_0(x_2(0))-c_0(x_2(0))\\ x_1(t)=x_2(t)=x\end{gathered} \tag{5}$$

Искомые поля $v(x, t)$ и $c(x, t)$ выражаются через решения двухточечной граничной задачи [4, 5]

$$v(x, t)={}^1/_2[\alpha_1(x, t)+\alpha_2(x, t)], \qquad c(x, t)={}^1/_2[\alpha_1(x, t)-\alpha_2(x, t)] \tag{6}$$

Равенства (6) сводят анализ статистики v и c к исследованию обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений (4). Статистическая теория подобных уравнений опирается на аппарат уравнений Эйнштейна – Фоккера – Планка (ЭФП) (см., например, [12]). Однако одним из условий применимости уравнений ЭФП является принцип причинности. Математически он сводится к требованию постановки задачи Коши к уравнениям (4). Возможности постановки вспомогательной задачи Коши при статистическом анализе двухточечных граничных задач изучались в [5–7]. Здесь при нахождении статистики v и c будем следовать методике, развитой в [6, 7].

Поставим вспомогательную задачу Коши, решая уравнения (4) с начальными условиями:

$$\begin{gathered}x_1(t=0)=a_1, \qquad x_2(t=0)=a_2\\ \alpha_1(t=0)=v_0(a_1)+c_0(a_1), \qquad \alpha_2(t=0)=v_0(a_2)-c_0(a_2)\end{gathered} \tag{7}$$

Решения уравнений (4) вместе с (7) обозначим

$$x_i=x_i(a_i, t), \qquad \alpha_i=\alpha_i^*(a_i, t)$$

Дополним уравнения (4) уравнениями для вспомогательных функций

$$\begin{gathered}J_i^*=\frac{\partial x_i(a_i,t)}{\partial a_i}, \qquad u_i^*=\frac{\partial\alpha_i^*(a_i,t)}{\partial a_i}\\ \frac{dJ_i^*}{dt}=u_i^*, \qquad \frac{du_i^*}{dt}=J_i^*\frac{\partial\eta(x_i,t)}{\partial x_i}\end{gathered} \tag{8}$$

Начальные условия

$$J_i^*(a_i,0)=1, \quad u_i^*(a_i,0)=\frac{d\alpha_{0\,i}(a_i)}{da_i}, \qquad i=1,2 \tag{9}$$

Введение этих функций необходимо для восстановления статистики двухмоментной граничной задачи (4)–(6) (см. [6, 7]).

От замкнутой системы обыкновенных дифференциальных стохастических уравнений (4), (8) с условиями Коши (7) перейдем к уравнению ЭФП для переходной плотности вероятности

$$f=f[\alpha_1, \alpha_2, J_1, J_2, u_1, u_2, x_1, x_2; a_1, a_2, t]=$$

$$=\left\langle\prod_{i=1}^{2}\delta[x_i-x_i(a_i,t)]\delta[\alpha_i-\alpha_i^*(a_i,t)]\delta[J_i-J_i^*(a_i,t)]\delta[u_i-u_i^*(a_i,t)]\right\rangle \tag{10}$$

Пользуясь стандартной процедурой вывода уравнений ЭФП (см., например, [12]), получим

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\alpha_i\frac{\partial f}{\partial x_i}+u_i\frac{\partial f}{\partial J_i}=\frac{D}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_i^2}+D(s)\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{dD(s)}{ds}\left(J_1\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha_2\partial u_1}-J_2\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha_1\partial u_2}\right)+$$
$$+\frac{B}{2}J_i^2\frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2}-\frac{\partial^2 D(s)}{\partial s^2}J_1J_2\frac{\partial^2 f}{\partial u_1\partial u_2},\qquad i=1,2 \tag{11}$$

Здесь $D=D(0)$, $B=[-d^2D/ds^2]_{s=0}$, $s=x_1-x_2$.

Начальное условие, следующее из (7), (9), имеет вид

$$f_0=W_0[\alpha_1,\alpha_2,u_1,u_2;\,a_1,a_2]\prod_{i=1}^{2}\delta[x_i-a_i]\delta[J_i-1] \tag{12}$$

где W_0 — совместная плотность вероятности $\alpha_i^*(a_i,\ 0)$, $u_i^*(a_i,\ 0)$.

Восстановим по решению уравнения (11), определяющего вместе с (12) статистику инвариантов Римана $\alpha^*(a_i,\ t)$ вдоль фиксированных характеристик $x_i(a_i,\ t)$, статистику v и c в заданной точке x в момент t. При этом пренебрежем возможным пересечением характеристик одного семейства, т. е. возникновением ударных фронтов. Заметим, что вопрос о возможности пренебрежения образованием ударных волн сводится к вопросу о пренебрежении возникновением ударных фронтов в волнах Римана, который подробно обсуждался в [2].

Положим в (10) $x_1=x_2=x$ и проинтегрируем (10) по $a_{1,2}$ в бесконечных пределах. Учтя при этом, что

$$\prod_{i=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\delta[x-x_i(a_i,t)]da_i=\frac{1}{J_1(x,t)J_2(x,t)}.$$

получим

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f[\alpha_1,\alpha_2,J_1,J_2,u_1,u_2,x,x;\,a_1,a_2,t]da_1\,da_2=$$
$$=\frac{1}{J_1J_2}\left\langle\prod_{i=1}\delta[\alpha_i-\alpha_i(x,t)]\delta[J_i-J_i(x,t)]\delta[u_i-u_i(x,t)]\right\rangle \tag{13}$$

Здесь $J_i(x,\ t)=J_i^*(a_i^\circ(x,\ t),\ t)$, $u_i(x,\ t)=u_i^*(a_i^\circ(x,\ t),\ t)$, где $a_i^\circ(x,\ t)$ — начальные координаты характеристик, попадающих в момент t в точку с координатой x.

Домножая (13) на J_1J_2 и интегрируя по J_i, u_i, получим окончательно

$$\int\overset{\infty}{\underset{-\infty}{\overset{6}{\ldots}}}\int f\,[\alpha_1,\alpha_2,J_1,J_2,u_1,u_2,x,x;\,a_1,a_2,t]\prod_{i=1}^{2}J_i\,da_i dJ_i\,du_i=$$
$$=\left\langle\prod_{i=2}^{2}\delta\,[\alpha_i-\alpha_i(x,t)]\right\rangle=W_2\,[\alpha_1,\alpha_2;\,x,t] \tag{14}$$

Отсюда интеграл слева, полностью определенный решением уравнения (11), равен плотности вероятности $\alpha_1(x,\ t)$, $\alpha_2(x,\ t)$. В силу равенства (6) функция W_2 полностью определяет искомое одноточечное вероятностное распределение полей $v(x, t)$ и $c(x, t)$:

$$w_2[v, c; x, t] = 2W_2[v+c, v-c; x, t] \tag{15}$$

Таким образом, формулы (14), (15) в принципе решают поставленную задачу, выражая одноточечное вероятностное распределение полей $v(x, t)$ и $c(x, t)$ через функцию f — решение уравнения ЭФП (11).

Найдем плотность вероятности v и c в конкретных случаях. Будем считать, что $v_0(x)$ и $c_0(x)$ — статистически однородные функции. При этом функция

$$w_6 = 2\iint\limits_{-\infty}^{\infty} f[v+c, v-c, J_1, J_2, u_1, u_2, x_1, x_2; a_1, a_2, t]\,da_1\,da_2$$

зависит, очевидно, лишь от разности координат $x_1 - x_2 = s$:

$$w_6 = w_6[v, c, J_1, J_2, u_1, u_2; s, t]$$

Проинтегрировав (11) по a_1, a_2 и сделав замену переменных $\alpha_1 = v+c$, $\alpha_2 = v-c$, придем к уравнению для w_6:

$$\frac{\partial w_6}{\partial t} + 2c\frac{\partial w_6}{\partial s} + u_i\frac{\partial w_6}{\partial J_i} = \frac{1}{4}[D+D(s)]\frac{\partial^2 w_6}{\partial v^2} + \frac{1}{4}[D-D(s)]\frac{\partial^2 w_6}{\partial c^2} +$$

$$+\frac{B}{2}J_i^2\frac{\partial^2 w_6}{\partial u_i^2} - \frac{d^2D(s)}{ds^2}J_1J_2\frac{\partial^2 w_6}{\partial u_1\,\partial u_2} + \frac{1}{4}\frac{dD(s)}{ds}\frac{\partial}{\partial v}\times$$

$$\times\left(J_1\frac{\partial w_6}{\partial u_1} - J_2\frac{\partial w_6}{\partial u_2}\right) - \frac{1}{4}\frac{dD(s)}{ds}\frac{\partial}{\partial c}J_i\frac{\partial w_6}{\partial u_i}, \quad i=1,2 \tag{16}$$

более удобному при анализе статистики v и c, чем уравнение (11).

Начальное условие, следующее из (12), таково:

$$w_{06} = 2W_0[v+c, v-c, u_1, u_2; s]\,\delta[J_1-1]\,\delta[J_2-1] \tag{17}$$

Плотность вероятности v и c выражается через w_6 по формуле, аналогичной (14), (15):

$$w_2[v, c; t] = \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} w_6[v, c, u_1, u_2, J_1, J_2; s=0, t]\prod_{i=1}^{2} J_i\,dJ_i\,du_i \tag{18}$$

Уравнение (16) точно решается, только когда внешняя сила не зависит от x: $\eta \equiv \eta(t)$. При этом (16) переходит в уравнение

$$\frac{\partial w_6}{\partial t} + 2c\frac{\partial w_6}{\partial s} + u_i\frac{\partial w_6}{\partial J_i} = \frac{D}{2}\frac{\partial^2 w_6}{\partial v^2} \tag{19}$$

решение которого с начальным условием (17) имеет вид

$$w_6 = \frac{2}{\sqrt{2\pi Dt}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left\{-\frac{(y-v)^2}{2Dt}\right\}$$

$$W_0[y+c, y-c, u_1, u_2; s-2ct]\prod_{i=1}^{2}\delta[J_i - u_it - 1]$$

Подставив это равенство в (18), найдем

$$w_2[v,c;t]=\sqrt{\frac{2}{\pi Dt}}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} dy\,du_1\,du_2 \exp\left\{-\frac{(v-y)^2}{2Dt}\right\}\times$$
$$\times(1+u_1t)(1+u_2t)W_0[y+c,y-c,u_1,u_2;-2ct] \qquad (20)$$

Рассмотрим частный случай, когда в начальный момент плотность среды всюду одинакова, $c_0(x)=c_0$, а скорость $v_0(x)$ – гауссова с корреляционной функцией $\langle v_0(x)v_0(x+s)\rangle=k(s)$, $\langle v_0\rangle=0$. Кроме того, будем считать, что внешние силы отсутствуют: $D=0$. Из формулы (20) в этом случае получим

$$w_2[v,c;\ t]=\frac{1}{\pi\sqrt{k^2(0)-k^2(s)}}\exp\left\{-\frac{v^2}{d_+(2ct)}-\frac{(c-c_0)^2}{d_-(2ct)}\right\}\left\{1-t^2r(2ct)+\right.$$
$$+\frac{2(c-c_0)tp(2ct)}{d_-^2(2ct)}-\frac{[tp(2ct)]^2}{2d_-(2ct)}-(c-c_0)^2\frac{[tp(2ct)]^2}{d_-^2(2ct)}+$$
$$\left.+\frac{[tp(2ct)]^2}{2d_+(2ct)}-v^2\frac{[tp(2ct)]^2}{d_+^2(2ct)}\right\} \qquad (21)$$
$$d_\pm(s)=k(0)\pm k(s),\quad p(s)=k'(s),\quad r(s)=k''(s)$$

Из (21) видно, что нелинейность волн приводит к тому, что с течением времени вероятностное распределение скорости и плотности среды может стать существенно негауссовым.

Отметим одну особенность распределения (21). При фиксированном c на достаточно больших временах $2ct\gg l$, где l – длина корреляции начального поля скоростей $v_0(x)$, плотность вероятности (21) распадается на два гауссовых распределения:

$$w_2[v,c;t]=\frac{1}{\pi k(0)}\exp\left\{-\frac{v^2}{k(0)}-\frac{(c-c_0)^2}{k(0)}\right\} \qquad (22)$$

Это свойство w_2 легко объяснить, если вспомнить, что первоначально гауссова случайная Риманова волна с течением времени сохраняет одномерное гауссово распределение [1]. Поэтому, согласно (6) и тому, что $\alpha_{1,2}$ удовлетворяют уравнениям Римана, на временах $2ct\gg l$ скорости $v(x,\ t)$ и $c(x,\ t)$ равны суперпозиции статистически независимых волн с одномерными гауссовыми распределениями и, следовательно, имеют гауссово распределение (22). Таким образом, можно ввести понятие статистического нелинейного взаимодействия волн, которое проявляется на временах $2ct<l$ и может привести к существенной негауссовости распределения v и c (21). На больших временах $2ct\gg l$ статистическое взаимодействие пропадает.

Отметим, что формула (22) неверно описывает асимптотику плотности вероятности (21) при $c\to 0$. Действительно, как видно из (21), $w_2[v,\ 0;\ t]\equiv 0$. Последнее отражает тот очевидный факт, что плотность вначале равномерно распределенной $c_0(x)=c_0$ сплошной среды при непрерывной начальной скорости $v_0(x)$ нигде не может быть равна нулю.

Если время статистического нелинейного взаимодействия волн много меньше времени, за которое начинают проявляться нелинейные эффекты, т. е. если $k(0)=\langle v_0^2\rangle\ll c_0^2$, то плотность вероятности (21) можно приближенно записать в виде

$$w_2[v,c;\ t]=\frac{1}{\pi\sqrt{k^2(0)-k^2(c_0t)}}\exp\left\{-\frac{v^2}{d_+(2c_0t)}-\frac{(c-c_0)^2}{d_-(2c_0t)}\right\}$$

Эта гауссова плотность вероятности описывает эволюцию статистических свойств v и c при линеаризованных уравнениях (1).

Отдельно обсудим следующее из (21) выражение для плотности вероятности $c(x,\ t)$, которое имеет вид

$$w[c;\ t]=\frac{1}{\sqrt{\pi d_-(2ct)}}\exp\left\{-\frac{(c-c_0)^2}{d_-(2ct)}\right\}\left\{1-t^2r(2ct)+\right.$$
$$\left.+2(c-c_0)t\frac{p(2ct)}{d_-(2ct)}-\frac{[tp(2ct)]^2}{2d_-(2ct)}+\left[\frac{(c-c_0)tp(2ct)}{d_-(2ct)}\right]^2\right\} \qquad (23)$$

Проанализируем случай, когда на характерных временах нелинейного статистического взаимодействия $t\sim l/c_0$ нелинейные эффекты еще малы. При этом $w[c;\ t]$ можно заменить приближенным выражением, разложив (23) в ряд Грама – Шарлье по степеням малого параметра $\mu=\sqrt{k(0)}/c_0$ и ограничившись членами порядка не выше μ^2. Введем для удобства безразмерную переменную $\rho=(c-c_0)\sqrt{2/d_-(z)}$, где $z=2c_0t$. Вероятностное распределение ρ с точностью до членов порядка μ^2 равно

$$w[\rho;\ t]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1+A_2\frac{d^2}{d\rho^2}+A_3\frac{d^3}{d\rho^3}+A_4\frac{d^4}{d\rho^4}+A_6\frac{d^6}{d\rho^6}\right)\exp\left\{-\frac{\rho^2}{2}\right\} \qquad (24)$$

$$A_2=\frac{t^2}{2}\left(\frac{p^2(z)}{d_-(z)}-r(z)\right),\qquad A_3=\frac{p(z)t}{\sqrt{2d_-(z)}}$$

$$A_4=\frac{t^2}{2}\left(\frac{5}{2}\frac{p^2(z)}{d_-(z)}-r(z)\right),\qquad A_6=\frac{p^2(z)t^2}{4d_-(z)}$$

Видно, что $\langle\rho\rangle=0$. Этого следовало ожидать, так как $\langle c(x,\ t)\rangle=c_0$ – точный инвариант, вытекающий из закона сохранения массы. Однако уже третий момент ρ не равен нулю: $\langle\rho^3\rangle=6A_3$. Таким образом, нелинейность приводит к асимметрии вероятностного распределения плотности. Приведем еще выражения для $\langle\rho^2\rangle$ и коэффициента эксцесса $\varkappa_e$, количественно выражающего отклонение распределения (24) от гауссова:

$$\langle\rho^2\rangle=\frac{\langle(c-c_0)^2\rangle}{2d_-(z)}=1+t^2\left(\frac{p^2(z)}{d_-(z)}-r(z)\right)$$

$$\varkappa_e=\frac{\langle\rho^4\rangle-3\langle\rho^2\rangle^2}{\langle\rho^2\rangle^2}=t^2\left(25\frac{p^2(z)}{d_-(z)}-7r(z)\right)$$

Автор благодарен А. Н. Малахову и С. Н. Гурбатову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малахов А. Н., Саичев А. И.* К вопросу о кинетических уравнениях в теории случайных волн.– Изв. вузов. Радиофизика, 1974, т. 17, № 5, с. 699–709.
2. *Малахов А. Н., Саичев А. И.* О вероятностном описании случайных полей, удовлетворяющих простейшим уравнениям гидродинамического типа.– ЖЭТФ, 1974, т. 67, № 3, с. 940–950.
3. *Руденко О. В., Чиркин А. С.* О нелинейной трансформации спектров случайных волновых полей.– Докл. АН СССР, 1974, т. 214, № 5, с. 1045–1048.
4. *Руденко О. В., Чиркин А. С.* Теория нелинейного взаимодействия монохроматических и шумовых волн в слабодиспергируемых средах.– ЖЭТФ, 1974, т. 67, № 5, с. 1903–1910.
5. *Кляцкин В. И.* Замечание о стохастических краевых задачах.– Изв. вузов. Радиофизика, 1977, т. 20, № 8, с. 1165–1170.
6. *Саичев А. И.* Об одном статистическом варианте анализа двухточечной краевой задачи.– Изв. вузов. Радиофизика, 1978, т. 21, № 7, с. 996–1003.
7. *Питовранов С. Е., Четвериков В. М.* Об одном классе краевых задач для стохастических дифференциальных уравнений.– Теор. и матем. физика, 1980, т. 43, № 2, с. 240–252.
8. *Канер В. В., Руденко О. В., Хохлов Р. В.* К теории нелинейных колебаний в акустических резонаторах.– Акуст. ж., 1977, т. 23, № 5, с. 756–764.
9. *Штарас А. Л.* Асимптотическое интегрирование слабонелинейных уравнений с частными производными.– Докл. АН СССР, 1977, т. 237, № 3, с. 525–528.
10. *Саичев А. И.* О статистике продольных нелинейных случайных волн в упругом теле.– ПММ, 1977, т. 41, № 6, с. 1107–1113.
11. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978. 687 с.
12. *Кляцкин В. И.* Стохастические уравнения и волны в случайно неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.

Горький

Поступила в редакцию
4.II.1981