

УДК 533.6.011

О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ
ДВУХТЕМПЕРАТУРНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ БИНАРНОЙ
СМЕСИ С СУЩЕСТВЕННО РАЗНЫМИ МАССАМИ КОМПОНЕНТ

НОСИК В. И.

Рассмотрена задача о «граничных условиях» для уравнений двухтемпературной газодинамики для бинарной смеси с существенно разными массами при $(m/M)^{1/2} \sim \text{Kn} \ll 1$ (Kn — число Кнудсена, m — масса легких молекул, M — масса тяжелых молекул). Установлена структура течения при скоростях легкой и тяжелой компонент порядка скорости звука тяжелой компоненты. Исследован вопрос о постановке граничных условий для уравнений газодинамики. Показано, что единственной замкнутой теорией пограничного слоя является теория Праנדтля, учитывающая члены порядка $\text{Kn}^{1/2}$.

1. В работах [1, 2] получены в приближении Навье — Стокса следующие уравнения двухтемпературной газодинамики для бинарной смеси газов с различными массами молекул при сравнимых сечениях взаимодействия:

$$\begin{aligned} \frac{DN}{Dt} + N \frac{\partial V_i}{\partial x_i} &= 0, & \frac{D}{Dt} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} + V_i \frac{\partial}{\partial x_i} & (1.1) \\ R \frac{DV_i}{Dt} + \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} &= 0, & R &= MN \\ \frac{3}{2} kN \frac{DT_M}{Dt} + (P\delta_{ij} + P_{ij}) \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial Q_i}{\partial x_i} &= E \\ \frac{Dn}{Dt} + n \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (nv_i) &= 0 \\ \frac{3}{2} kn \frac{DT_m}{Dt} + p \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \frac{3}{2} kT_m \frac{\partial (nv_i)}{\partial x_i} &= -E \\ v_i &= -D_{12} \left(\frac{\partial \ln p}{\partial x_i} + k_T \frac{\partial \ln T_m}{\partial x_i} \right) + O(\varepsilon^2) V, & \varepsilon &= \left(\frac{m}{M} \right)^{1/2} \\ q_i &= nkT_m v_i \left(\frac{5}{2} - k_T \right) - \lambda \frac{\partial T_m}{\partial x_i} + O(\varepsilon^2) pV \\ \lambda &= -\frac{5k^2 T_m}{2m} (a_1 - k_T d_1), & E &= 16nNk(T_m - T_M) \varepsilon^2 \Omega_{12}^{(1)} \quad (1) \end{aligned}$$

Здесь n , T_m , v_m — числовая плотность, температура и скорость легкой компоненты; N , T_M , V — числовая плотность, температура и скорость тяжелой компоненты (V с точностью до $O(\varepsilon^2)$ равна среднемассовой скорости смеси); P и p — давление тяжелого и легкого газа; P_{ij} и p_{ij} — бездивергентные тензоры напряжений тяжелого и легкого газа; Q_i и q_i — тепловые потоки; v_i — скорость диффузии легкого газа. Для P_{ij} и Q_i спра-

ведливы те же выражения, что и для простого газа; $p_{ij} \sim \varepsilon^2 p$ и в уравнениях Навье — Стокса не учитываются; коэффициенты D_{12} , k_T , a_1 , d_1 вычислены в [1], функция $\Omega_{12}^{(1)}(1)$ определена в [1, 3].

При выводе уравнений (1.1) делались следующие предположения относительно порядков характерных величин, описывающих бинарную систему:

$$\varepsilon \sim \text{Kn} \ll 1, \quad n \sim N, \quad T_m \sim T_M, \quad V \sim v_m \sim (2kT_M/M)^{1/2}.$$

При этом оказывается, что $v \sim V$, $q \sim pV$, т. е. скорость диффузии и поток тепла легкого газа необходимо учитывать уже в уравнениях главного приближения для легкого газа.

Задача о «начальных условиях» для пространственно-однородного случая была рассмотрена в работе [4]. «Максвеллизация» легкого газа происходит за время $t_m \sim L(m/2kT)^{1/2}$ тяжелого — за время $t_M \sim t_m/\varepsilon$, время существования двухтемпературного режима порядка t_m/ε .

2. Следуя методике работ [5, 6], рассмотрим структуру течения в стационарном случае для тел умеренной кривизны и вдали от критических точек. С учетом того, что имеет место представление [2]

$$J(F, f) = \varepsilon J_1(F, f) + \varepsilon^2 J_2(F, f) + \dots, \quad J(f, F) = N J_0(f) + \varepsilon^2 J_2(f, F) + \dots$$

$$J_0(f) = \int (f(\tau) - f(c)) c b db d\varepsilon, \quad \tau = c - 2k(ck)$$

где F и f — функции распределения тяжелой и легкой компонент, J_0 — лоренцев интеграл, запишем уравнение Больцмана в рассматриваемом случае в безразмерном виде, опуская коэффициенты порядка единицы

$$\begin{aligned} \text{Kn} \frac{dF}{dt} &= J(F, F) + J_1(F, f) + \varepsilon J_2(F, f) + \dots, \\ \text{Kn} \frac{df}{dt} &= J(f, f) + N J_0(f) + \varepsilon^2 J_2(f, F) + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $d/dt = \xi_i \partial / \partial x_i$, ξ_i — скорость молекулы.

Примем, что на бесконечности функции распределения F и f находятся в условиях глобального термодинамического равновесия

$$\begin{aligned} F|_{x \rightarrow \infty} &= N_\infty (2\pi k T_\infty / M)^{-3/2} \exp[-M(\xi - V_\infty)^2 / (2kT_\infty)] \\ f|_{x \rightarrow \infty} &= n_\infty (2\pi k T_\infty / m)^{-3/2} \exp[-m(\xi - V_\infty)^2 / (2kT_\infty)] \end{aligned}$$

Граничные условия на поверхности тела запишем в виде

$$\begin{aligned} F(x_w, \xi) |_{\xi_n > 0} &= \int_{\xi_n' < 0} F_i(\xi') K_F(x_w, \xi, \xi') d\xi' \\ f(x_w, \xi) |_{\xi_n > 0} &= \int_{\xi_n' < 0} f_i(\xi') K_f(x_w, \xi, \xi') d\xi' \end{aligned}$$

Будем искать решение уравнения Больцмана в виде

$$F = \sum_{l=0}^{\infty} v_l^F F^{(l)}, \quad f = \sum_{l=0}^{\infty} v_l^f f^{(l)}, \quad v_0^F = v_0^f = 1$$

где $v_l^{F,f} = v_l^{F,f}(\text{Kn})$ — некоторая асимптотическая последовательность.

Решениями уравнений (2.1) в главном приближении являются функции

$$F^{(0)} = F^0 = N(2\pi kT_m/M)^{-3/2} \exp[-M(\xi - V)^2/(2kT_m)]$$

$$f^{(0)} = f^0 = n(2\pi kT_m/m)^{-3/2} \exp[-m(\xi - V)^2/(2kT_m)]$$

с разными температурами, но одинаковыми скоростями. Однако скорости компонент в общем случае не равны друг другу, поэтому необходимо учесть следующий член в разложении для легкого газа. Аналогичный проведенному в [5] анализ показывает, что $v_i^f = Kn$, при этом безразмерные v и q оказываются порядка единицы. Функция $f^{(1)}$ находится из уравнения

$$df^0/dt = 2J(f^0, f^{(1)}) + NJ_0(f^{(1)}) \quad (2.2)$$

Очевидно, что с помощью F^0 и $(f^0 + Knf^{(1)})$ удовлетворить граничным условиям для функций распределения нельзя, так как для системы (1.1) в главном приближении на теле должно быть задано три условия. Пусть на теле имеет место непротекание для каждой компоненты и задано условие для T_m . Тогда выбором параметров n_i и N_i , входящих в f_i и F_i , можно удовлетворить интегральному соотношению непротекания на стенке, но полученное решение для функций распределения тяжелой компоненты при таком распределении макропараметров не будет пригодным вплоть до стенки.

Введем пристеночный слой толщиной γ , в котором градиенты макропараметров тяжелого газа порядка γ^{-1} . Введем координаты: нормальную к поверхности $y_* = y/\gamma$ и тангенциальную τ , и будем искать решение уравнения Больцмана в виде

$$F_* = F^0 + \mu_1^F F_*^{(1)} + \mu_2^F F_*^{(2)} + \dots, \quad f_* = f^0 + \mu_1^f f_*^{(1)} + \mu_2^f f_*^{(2)} + \dots$$

где μ_i — некоторая асимптотическая последовательность. Тогда уравнение Больцмана примет вид

$$Kn \left(\frac{1}{\gamma} \xi_v \frac{\partial F^0}{\partial y_*} + \frac{\mu_1^F}{\gamma} \xi_v \frac{\partial F_*^{(1)}}{\partial y_*} + \xi_\tau \frac{\partial F^0}{\partial \tau} + \dots \right) = \dots \quad (2.3)$$

$$Kn \left(\frac{1}{\gamma} \xi_v \frac{\partial f^0}{\partial y_*} + \frac{\mu_1^f}{\gamma} \xi_v \frac{\partial f_*^{(1)}}{\partial y_*} + \xi_\tau \frac{\partial f^0}{\partial \tau} + \dots \right) = \dots$$

Здесь ξ_v и ξ_τ — нормальная и тангенциальная составляющие скорости молекулы.

Согласно предположению, $\partial F/\partial y_* = O(1)$, $\partial f/\partial y_* = O(\gamma)$, поэтому отличный от прежнего результат получится при $\mu_1^F = Kn/\gamma$, $\mu_2^F = (\mu_1^F)^2 = Kn$ (аналогично [5]), откуда $\mu_1^F = \gamma = Kn^{1/2}$, т. е. толщина слоя равна $Kn^{1/2}$. При этом $\mu_1^f = Kn$. Для определения $f_*^{(1)}$ и $F_*^{(1)}$ имеем следующие уравнения:

$$\xi_v \frac{\partial F^0}{\partial y_*} = 2J(F^0, F_*^{(1)}), \quad \gamma^{-1} \xi_v \frac{\partial f^0}{\partial y_*} + \xi_\tau \frac{\partial f^0}{\partial \tau} = 2J(f^0, f_*^{(1)}) + NJ_0(f_*^{(1)})$$

Отсюда видно, что для тяжелого газа получаются те же уравнения погранслоя, что и для однокомпонентного случая; уравнение для легкого газа — это уравнение (2.2), записанное в новых переменных.

Введение погранслоя для тяжелого газа позволяет поставить для уравнений сохранения тяжелого газа условия прилипания и таким образом

удовлетворить граничным условиям для F_0 . Граничным условиям удовлетворяет также и f_0 (с погрешностью $K\eta$), так как $mV^2/2kT_m = O(\epsilon^2)$.

Однако остаются нескорректированными $F_*^{(1)}$ и $f_*^{(1)}$. Для того чтобы эти функции удовлетворяли граничным условиям, введем новый слой толщины δ . Вводя $y^* = y/\delta$, будем искать решение уравнения Больцмана в виде

$$F^* = F^{*(0)} + \eta_1^F F^{*(1)} + \dots, \quad f^* = f^{*(0)} + \eta_1^f f^{*(1)} + \dots$$

В этом случае уравнение Больцмана записывается в виде (2.3) с соответствующей заменой параметров $\gamma, y^*, F^\circ, F_*^{(1)}, \mu_1^F, \mu_1^f, f^\circ, f_*^{(1)}$ на $\delta, y^*, F^{*(0)}, F_*^{(1)}, \eta_1^F, \eta_1^f, f^{*(0)}, f_*^{(1)}$ соответственно. Эти уравнения дают результат, отличный от полученного для погранслоя, в случае $\delta = K\eta$ и можно принять

$$F^{*(0)} = F^{\circ\circ} = N(x, 0, z) (2\pi kT_w/M)^{-3/2} \exp[-M\xi^2/(2kT_w)]$$

$$f^{*(0)} = f^{\circ\circ} = n(x, 0, z) (2\pi kT_w/m)^{-3/2} \exp[-m\xi^2/(2kT_w)]$$

где T_w — температура стенки. Из условий срачивания с внешним разложением имеем $\eta_1^F = K\eta^{1/2}$, $\eta_1^f = K\eta$. При этом для $F_*^{(1)}$ и $f_*^{(1)}$ получаем уравнения

$$\xi_y \partial F_*^{(1)} / \partial y^* = 2J(F^{\circ\circ}, F_*^{(1)}) \quad (2.4)$$

$$\xi_y \partial f_*^{(1)} / \partial y^* + \xi_\tau \partial f^{\circ\circ} / \partial \tau = 2J(f^{\circ\circ}, f_*^{(1)}) + N(x, 0, z) J_0(f_*^{(1)}) \quad (2.5)$$

Уравнение (2.4) имеет такой же вид, как для однокомпонентного газа при $Re \gg 1$, поэтому выражения для скачка температур и скорости скольжения тяжелого газа будут такими же, как и для однокомпонентного случая.

Будем искать решение уравнения (2.5) для плоской одномерной задачи модифицированным методом Максвелла [7]. Достаточно рассмотреть лишь задачу о скачке температур, так как для системы (1.1) не возникает необходимости ставить граничные условия прилипания для легкой компоненты и поэтому тангенциальная составляющая скорости получается из решения с граничными условиями непротекания и некоторым соотношением для T_m .

Уравнение (2.5) запишем в форме

$$\xi_y \partial \Phi_T / \partial y^* = L\Phi_T + L_1\Phi_T, \quad f_*^{(1)} = f^{\circ\circ} \Phi_T(y^*, \xi)$$

$$L\Phi_T = (f^{\circ\circ})^{-1} 2J(f^{\circ\circ}, f^{\circ\circ} \Phi_T), \quad L_1\Phi_T = (f^{\circ\circ})^{-1} N J_0(f^{\circ\circ} \Phi_T) \quad (2.6)$$

Примем, что граничные условия на стенке имеют вид

$$\Phi_T(0, \xi) |_{\xi_y > 0} = A\Phi_T(0, \xi) = \int f^{\circ\circ}(\xi') |_{\xi_y'} B(\xi, \xi') \Phi_T(0, \xi') \theta(-\xi_y') d\xi'$$

Здесь θ — функция Хэвисайда, $B(\xi, \xi')$ определяется свойствами граничащей с газом поверхности.

На внешней границе слоя Кнудсена имеем

$$\lim_{y^* \rightarrow \infty} \Phi_T = \Omega [T_a(0) T_w^{-1} - 1] + [\Omega y^* + \xi_y \Phi_t(\xi)] T_w^{-1} \partial T_a / \partial y^*$$

$$\Omega = m\xi^2 (2kT_w)^{-1-5/2}$$

где T_a — асимптотическое значение температуры, $\Phi_t(\xi)$ — внешнее решение, удовлетворяющее уравнению

$$\xi_y \Omega = L(\xi_y \Phi_t(\xi)) + L_1(\xi_y \Phi_t(\xi))$$

Определим скалярное произведение

$$(\rho_1(y^*, \xi), \rho_2(y^*, \xi)) = \int \rho_1(y^*, \xi) f^{00} \rho_2(y^*, \xi) d\xi$$

Аналогично [7], в данной задаче справедливы равенства

$$(\xi_v \Omega, \xi_v \Phi_t(\xi)) = -\lambda k^{-1}, \quad (m \xi_v, \xi_v \Phi_t(\xi)) = 0$$

так как вследствие условий непротекания внутри слоя Кнудсена $v_y = O(\text{Kn}) V_0$, где V_0 — характерное значение скорости вне слоя Кнудсена, λ определено в (1.1).

Умножая (2.6) на $f^{00} \Omega$ или на $f^{00} \xi_v \Phi_t$ и интегрируя по скоростям, вследствие самосопряженности L и L_t получим

$$(\xi_v \Omega, \Phi_T(y^*, \xi)) = -\lambda k^{-1} T_w^{-1} \partial T_a(y^*) / \partial y^* \tag{2.7}$$

$$(\xi_v^2 \Phi_t(\xi), \Phi_T(y^*, \xi)) = -\lambda k^{-1} [T_a(0) T_w^{-1} - 1 + y^* T_w^{-1} \partial T_a(y^*) / \partial y^*]$$

Будем считать, что функция распределения отраженных молекул определяется как

$$\Phi_T(0, \xi) |_{\xi_y < 0} = \Omega a_T + \xi_v \Phi_t(\xi) T_w^{-1} \partial T_a(y^*) / \partial y^*, \quad a_T \neq T_a(0) T_w^{-1} - 1$$

Используя (2.7) при $y^* = 0$, получаем два уравнения для определения a_T и $T_a(0)$. Аналогично [7] находим

$$\begin{aligned} \frac{T_a(0) - T_w}{T_w} = & \left[(\xi_v^2 \Phi_t(\xi), \theta(\xi_v) [1 - A] \xi_v \Phi_t(\xi)) + \right. \\ & \left. + \frac{\{\xi_v \Omega, \theta(\xi_v) [1 - A] \xi_v \Phi_t(\xi)\}^2}{\{\xi_v \Omega, \theta(\xi_v) [1 - A] \Omega\}} \right] \frac{k}{\lambda T_w} \frac{\partial T_a}{\partial y^*} \end{aligned}$$

Для максвелловских молекул и зеркально-диффузного отражения, т. е. при

$$\begin{aligned} A \Phi_T(0, \xi) |_{\xi_y > 0} = & (1 - \alpha) \Phi_T(0, \xi_x, -\xi_y, \xi_z) + \\ & + \left(\frac{2\pi m}{T_w} \right)^{1/2} \frac{\alpha}{n} \int \theta(-\xi_y') f^{00}(\xi') |_{\xi_y'} \Phi_T(0, \xi) d\xi \end{aligned}$$

имеем

$$\frac{T_a(0) - T_w}{T_w} = \frac{5}{8} \pi^{1/2} \frac{2 - \alpha}{\alpha} (1 + 0,1621\alpha) l_i T_w^{-1} \frac{\partial T_a}{\partial y^*}, \quad l_i = \frac{4}{5} \left(\frac{\lambda}{p} \right) \left(\frac{m T_w}{2k} \right)^{1/2}$$

Здесь λ определено в (1.1) и зависит от отношения концентраций тяжелой и легкой компонент. Таким образом, выражение для скачка температуры для легкой компоненты отличается от однокомпонентного случая только значением λ .

Никаких других слоев в рассматриваемом случае выделить нельзя.

3. Следуя методике [8], можно установить, к каким изменениям приводит учет скольжения и температурного скачка. Оценим ошибки, возникающие при решении уравнений Навье — Стокса со скольжением, ограничившись плоским случаем.

Рассмотрим уравнения сохранения в слое Кнудсена. Сделаем некоторые оценки. Внутри слоя Кнудсена $V_x \sim \text{Kn}^{1/2}$, $\partial V_x / \partial x \sim \text{Kn}^{1/2}$, откуда из уравнения неразрывности следует: $\partial V_y / \partial y \sim \partial V_x / \partial x \sim \text{Kn}^{1/2}$, $V_y \sim \text{Kn}^{1/2}$. Кроме того, $\partial V_x / \partial y \sim \text{Kn}^{-1/2}$; $\partial T_m / \partial y \sim \text{Kn}^{-1/2}$; $\partial T_m / \partial x \sim 1$; $P \sim 1$; P_{xx} , P_{yy} , $P_{xy} \sim \text{Kn}^{1/2}$; $Q_y \sim \text{Kn}^{1/2}$; $Q_x \sim \text{Kn}$. Для легкого газа имеем: $v_x \sim 1$, $\partial v_x / \partial x \sim 1$, $\partial v_y / \partial y \sim \partial v_x / \partial x \sim 1$, откуда $v_y \sim \text{Kn}$; $\partial v_x / \partial y \sim \text{Kn}^{-1}$, $\partial T_m / \partial y \sim 1$, $\partial T_m / \partial x \sim 1$, $p \sim 1$, $p_{ij} \sim \text{Kn}^2$, $q_i \sim 1$. Учитывая эти оценки, из уравнений сохранения (1.1) получаем

$$\partial p / \partial x + \partial P / \partial x + \partial P_{xy} / \partial y = O(\text{Kn}^{1/2})$$

$$\partial P / \partial y = O(\text{Kn}^{1/2}), \quad \partial p / \partial y = O(\text{Kn})$$

$$P_{xy} \partial V_x / \partial y + \partial Q_y / \partial y - E = O(\text{Kn}^{1/2})$$

$$\partial(nv_x) / \partial x + \partial(nv_y) / \partial y = O(\text{Kn}^{1/2}), \quad \partial q_y / \partial y = O(\text{Kn})$$

Видно, что P , p , $Q_y + V_x P_{xy}$, q_y изменяются поперек слоя Кнудсена на величины, по порядку величины не больше $\text{Kn}^{1/2}$. Таким образом, при определении этих величин из уравнений Навье – Стокса со скольжением ошибки будут не больше, чем при отбрасывании барнеттовских членов [8]. Скорость скольжения и температурный скачок для тяжелого газа имеют порядок $\text{Kn}^{1/2}$, поэтому получаем поправки порядка $\text{Kn}^{1/2}$ к V_x и T_m и, следовательно, поправки порядка Kn в P_{xy} и Q_y . В то же время для легкого газа температурный скачок дает поправки к v_x , T_m и q_y порядка Kn .

Отсюда можно сделать вывод, что тепловые потоки с точностью $\text{Kn}^{1/2}$ можно рассматривать в рамках «уравнений Эйлера», теория погранслоя Прандтля уточняет найденные тепловые потоки и дает тензор напряжений; учитывать скольжение и температурный скачок для легкого газа имеет смысл только для уточнения локальных значений, так как [8] эти поправки имеют тот же порядок, что и не учитываемые в рамках теории сплошной среды (вклад передней кромки и т. п.).

В заключение автор благодарит М. Н. Когана, Н. К. Макашева и Е. С. Асмолова за помощь в работе и ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галкин В. С. Применение метода Чепмена – Энскога к случаю двухтемпературной бинарной смеси газов. – Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 6. с. 58–63.
2. Галкин В. С. К выводу уравнений двухтемпературной газодинамики модифицированным методом Чепмена – Энскога. – Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 1, с. 145–153.
3. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 510 с.
4. Макашев Н. К., Бузыкин О. Г. Многотемпературные процессы в химически реагирующих газовых смесях. – Уч. зап. ЦАГИ, 1981, т. 12, № 4, с. 75–84.
5. Darrozés J. Quelques aspects sur la résolution approchée des équations de Boltzmann pour un mélange binaire de gaz. – Recherche Aéronautique, 1969, № 128, p. 49–57.
6. Макашев Н. К. О решении уравнения Больцмана в задачах обтекания тел в режиме сплошной среды. – Тр. ЦАГИ, 1976, вып. 1742, с. 70–90.
7. Loyalka S. K. Approximate method in the kinetic theory. – Phys. Fluids, 1971, v. 14, № 11, p. 2291–2294.
8. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.III.1981