

УДК 532.72

**О ПРИБЛИЖЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ
УРАВНЕНИЙ ДИФфуЗИОННОГО ИЛИ ТЕПЛОВОГО
ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ**

ГУПАЛО Ю. П., ПОЛЯНИН А. Д., РЯЗАНЦЕВ Ю. С.

Предлагается приближенный метод интегрирования нестационарных уравнений диффузионного или теплового пограничного слоя с использованием известного стационарного решения в плоском или осесимметричном случае. Показано, что в задачах о массо- или теплообмене реагирующих капель и пузырей, обтекаемых ламинарным потоком вязкой несжимаемой жидкости, а также частиц, движущихся в идеальной жидкости, предлагаемый метод является точным. Получено интегральное уравнение для локального диффузионного или теплового потока в случае внезапного «включения» реакции на поверхности частицы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим нестационарную конвективную диффузию к реагирующей частице в двумерном (плоском или осесимметричном) случае при больших числах Пекле. На поверхности частицы в начальный момент времени начинается химическая реакция, протекающая в диффузионном режиме. Вследствие этого исходное равномерное распределение концентрации вещества в потоке нарушается, причем вдали от частицы и на ее поверхности концентрация постоянна и равна C_∞ и C_0 соответственно. Неустановившееся распределение концентрации C в потоке в этом случае в приближении диффузионного пограничного слоя в безразмерном виде описывается следующим уравнением, начальным и граничными условиями:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(c \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(c \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) \right\} = \frac{1}{P} \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} \quad (1.1)$$

$$\xi=0, \quad c=0; \quad \xi \rightarrow \infty, \quad c \rightarrow 1 \quad (1.2)$$

$$t=0, \quad c=1 \quad (1.3)$$

$$c = (C_0 - C)(C_0 - C_\infty)^{-1}, \quad P = aUD^{-1}$$

$$g = (g_{\xi\xi}g_{\eta\eta}g_{\lambda\lambda})_{\xi=0} = g(\eta)$$

Здесь ξ, η, λ ($\partial/\partial\lambda=0$) — ортогональная система координат, связанная с поверхностью тела $\xi=0$ (координата ξ направлена по нормали, η — вдоль поверхности тела), $\psi = \psi(t, \xi, \eta)$ — функция тока (которая считается известной из решения соответствующей задачи об обтекании, $\psi=0$ на поверхности частицы, вне частицы $\psi \geq 0$), P — число Пекле, a и U — характерные размер и скорость частицы, $g_{\xi\xi}, g_{\eta\eta}, g_{\lambda\lambda}$ — компоненты метрического тензора. Отсчет координаты η ведется от передней критической точки $\eta=0$, ($\psi(t, \xi, 0)=0$); $(g_{\xi\xi})_{\xi=0}=1$; граничное условие в этой точке опущено (в осесимметричном случае при обтекании гладких тел оно эквивалентно условию симметрии $\partial c/\partial\eta=0$ при $\eta=0$).

Аналогично формулируется задача о нестационарном теплообмене частицы в потоке, когда в начальный момент времени ее температура скачком повышается до некоторого постоянного значения.

2. Метод решения. Запишем уравнение (1.1) для величины степени превращения, $1-c$ и проинтегрируем по ξ $\{0 \leq \xi < \infty\}$ аналогично тому, как это делается в теории гидродинамического пограничного слоя [1, 2]. С учетом граничных условий (1.2) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} (1-c) d\xi + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \eta_0} \int_0^{\infty} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} (1-c) d\xi = P^{-1} \left(\frac{\partial c}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \quad (2.1)$$

Далее для построения приближенного решения задачи (1.1)–(1.3) вместо уравнения диффузионного пограничного слоя (1.1) используем интегральное равенство (2.1).

Пусть известно решение стационарной задачи (1.1), (1.2) для соответствующего установившегося обтекания ($\partial/\partial t=0$, $\psi=\psi_s(\xi, \eta) \neq 0$)

$$c_s = c_s(\xi, \varphi(\eta)) \quad (c_s(\xi, 0) = 1) \quad (2.2)$$

Функция φ введена здесь для более наглядного дальнейшего изложения (см. п. 3).

Решение нестационарной задачи (1.1)–(1.3) ищем в виде

$$c = c_s(\xi, \omega(t, \eta)), \quad \omega(0, \eta) = 0 \quad (2.3)$$

Подставляя это выражение в соотношение (2.1), получаем уравнение в частных производных первого порядка с начальным условием $\omega=0$ при $t=0$ для определения неизвестной функции ω . Так как выражение (2.2) удовлетворяет уравнению (2.1) при $\partial/\partial t=0$, то при установившемся обтекании тела выполняется предельное равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t, \eta) = \varphi(\eta)$$

т. е. распределение концентрации (2.3) выходит на стационарный режим (2.2) при $t \rightarrow \infty$.

3. Нестационарная диффузия к реагирующей частице. Рассмотрим теперь нестационарную конвективную диффузию к реагирующей частице, обтекаемой несжимаемой жидкостью с функцией тока

$$\psi = \Omega(t) \xi^n f(\eta) \quad (f(0) = 0) \quad (3.1)$$

Здесь $\Omega(t) \equiv 1$ при соответствующем установившемся обтекании, $n=1$ соответствует каплям (пузырям) умеренной вязкости в ламинарном потоке вязкой несжимаемой жидкости и частицам, движущимся в идеальной жидкости; $n=2, 3$ – твердым частицам в вязком потоке. Представление (3.1) справедливо, например, в случае прямолинейного стока движения твердой ($n=2$) или жидкой ($n=1$) сферы с переменной скоростью.

Следуя методу, предложенному в п. 2, решение задачи (1.1)–(1.3), (3.1) ищем в виде

$$c = \frac{1}{\Gamma(v)} \gamma \left(v, v^2 \frac{\xi^{n+1}}{\omega} \right), \quad v = \frac{1}{n+1} \quad (3.2)$$

$$\xi = P^v \psi_s^{1/n}(\xi, \eta) = P^v f^{1/n}(\eta) \xi, \quad \omega = \omega(t, \eta)$$

$$\gamma(v, x) = \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^{v-1} d\tau, \quad \Gamma(v) = \gamma(v, \infty)$$

При записи (3.2) использованы общие представления о структуре решения стационарной задачи о диффузии к капле и твердым частицам [3, 4].

Подставляя формулы (3.2) в выражение (2.1) и интегрируя по ξ с учетом равенств

$$\int_0^{\infty} \xi^k (1-c) d\xi = \frac{P^{-\nu(k+1)}}{k+1} \nu^{-2\nu(k+1)} f^{-(k+1)/n} \omega^{\nu(k+1)} \frac{\Gamma(\nu(k+2))}{\Gamma(\nu)}$$

после некоторых преобразований получаем следующую задачу для определения ω :

$$\sigma_n \omega^{2\nu-1} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{n}{\sqrt{g}} \Omega(t) f^{1/n}(\eta) \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = f^{2/n}(\eta); \quad \omega(0, \eta) = 0 \quad (3.3)$$

$$\sigma_n = \Gamma(2\nu) (\nu^2 P)^{1-2\nu}$$

Характеристическая система, соответствующая уравнению (3.3), имеет вид

$$\frac{dt}{\sigma_n \omega^{2\nu-1}} = \frac{\sqrt{g} d\eta}{n \Omega(t) f^{1/n}(\eta)} = \frac{d\omega}{f^{2/n}(\eta)} \quad (3.4)$$

В случае стационарного обтекания ($\Omega(t) \equiv 1$) первыми интегралами системы (3.4) являются

$$\varphi(\eta) - \omega = C_1, \quad t - E(\omega, \eta) = C_2 \quad (3.5)$$

$$\varphi = \frac{1}{n} \int_0^{\eta} \sqrt{g} f^{1/n} d\eta, \quad E = \sigma_n \int_0^{\omega} \tau^{2\nu-1} f^{-2/n}(\varphi^{-1}(\tau - \omega) + \varphi(\eta)) d\tau$$

Функция $\varphi = \varphi(\eta)$ соответствует стационарному решению задачи (1.1), (1.2), (2.2), (3.1) (в этом случае $\omega = \varphi(\eta)$ в (3.2)) $\varphi^{-1}[\varphi(\eta)] \equiv \eta$.

Из (3.5) следует, что решение задачи (3.3) при $\Omega(t) \equiv 1$ задается неявно соотношением

$$t = E(\omega, \eta) \quad (3.6)$$

Локальный диффузионный поток выражается следующим образом через функцию ω :

$$j = \left(\frac{\partial c}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} = \frac{\nu^{2\nu-1} P^{\nu} f^{1/n}}{\Gamma(\nu) \omega^{\nu}} \quad (3.7)$$

Из формулы (3.5), (3.6) видно, что характерное время выхода реакции на стационарный режим определяется выражением

$$t_s = \sigma_n O(1) = P^{(n-1)/(n+1)} O(1) \quad (3.8)$$

Видно, что характерное время выхода на стационарный режим в случае твердых частиц ($n=2$) будет порядка $P^{1/3}$ ($P \gg 1$), что существенно превышает соответствующее характерное время для капель и пузырей; $t_s = (\beta+1)O(1)$ (β — отношение вязкостей капли и окружающей жидкости) [5–7].

Формулу (3.8) можно получить также и непосредственно из исходного уравнения (1.1), (1.3).

В силу замечания, сделанного в конце п. 2, формулы (3.2), (3.6), (3.7) при $t \rightarrow \infty$ переходят в точное решение.

Для оценки точности предложенного метода используем то обстоятельство, что асимптотика точного решения исходной задачи (1.1)–(1.3) при $t \rightarrow 0$ не зависит от конвективного члена в уравнении (1.1) и имеет вид [3]

$$t \rightarrow 0, \quad j^{\circ} \rightarrow (P/\pi t)^{1/2} \quad (c \rightarrow \operatorname{erf}(\xi/2\sqrt{t})) \quad (3.9)$$

Асимптотика приближенного решения (3.2), (3.3), (3.7) при $t \rightarrow 0$ может быть получена непосредственно из уравнения (3.3) путем пренебрежения членом с $\partial\omega/\partial\eta$. Для локального диффузионного потока (3.7) это приводит к выражению

$$t \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\nu)} \left[\frac{\Gamma(2\nu)P}{2\nu t} \right]^{1/2} \quad (3.10)$$

Из сопоставления отношений (3.9) и (3.10) получаем

$$\frac{j}{j^{\circ}} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \left[\frac{\pi\Gamma(2\nu)}{2\nu} \right]^{1/2}$$

Отсюда следует, что при $t \rightarrow 0$ ошибка приближенной формулы (3.3), (3.7) для твердой поверхности при $n=2$ ($\nu=1/3$) составляет менее 6%, и, по-видимому, является максимальной во всем диапазоне $0 \leq t < \infty$.

В случае стационарного обтекания твердой сферы единичного радиуса поступательным стоксовым потоком из формул (3.5)–(3.7) для локального диффузионного потока в передней критической точке $\theta=0$ (r, θ – сферическая система координат, связанная с центром сферы, $\eta=\theta \ll 1$, $\xi=r-1$, $\sqrt{g} \approx \theta$, $f=(3/4)\theta^2$, $\Omega=1$, $n=2$) имеем

$$j=2^{-1/3}3[1+F(t)]^{1/3}P^{1/3}$$

Функция $F=F(t)$ определяется из уравнения

$$t = \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{4}{9}P\right)^{1/3} \int_0^{\tau^{1/3}} \tau^{-1/3}(1+\tau)^{-2/3} d\tau$$

$$t \rightarrow 0, \quad F \rightarrow \left(\frac{3}{2}P\right)^{1/2} \Gamma^{1/2}\left(\frac{2}{3}\right) t^{-1/2}$$

$$t \rightarrow \infty, \quad F \rightarrow \exp\left\{-\Gamma^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} P^{-1/3}t\right\}$$

4. Нестационарная диффузия к вращающемуся диску. Рассмотрим нестационарную диффузию к поверхности бесконечного плоского диска, вращающегося с постоянной угловой скоростью χ . Эта задача сводится к уравнению, аналогичному (1.1), и может быть исследована предложенным в данной работе методом.

В этом случае, так же как и в случае стационарной диффузии [3], распределение концентрации (в пренебрежении концевыми эффектами) не зависит от радиальной и угловой координаты и будет функцией только расстояния от поверхности диска и времени.

В безразмерных переменных задача сводится к решению уравнения диффузионного пограничного слоя [3]

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \alpha \xi^2 \frac{\partial c}{\partial \xi} = Sc^{-1} \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2}; \quad Sc = \frac{\nu}{D}, \quad \alpha = 0,51 \quad (4.1)$$

с начальными и граничными условиями (1.2), (1.3).

Здесь характерными масштабами длины, времени и скорости являются величины $L=(\nu/\chi)^{1/2}$, $T=\lambda^{-1}$, $U=(\nu\chi)^{1/2}$; $P=LUD^{-1}=Sc$; ν — кинематическая вязкость жидкости.

Нетрудно заметить, что уравнение (4.1) может быть записано в виде (4.1), (3.1) при

$$g=1, \quad \psi=\alpha\eta\xi^2, \quad c=c(\xi, t) \quad (n=2) \quad (4.2)$$

Аналогично п. 2 приближенное решение задачи (4.1), (1.2), (1.3), (4.2) ищем, исходя из интегрального равенства (2.1), в виде

$$c=\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\gamma\left(\frac{1}{3}, \frac{Sc\xi^3}{9\omega}\right) \quad \omega=\omega(t) \quad (4.3)$$

При этом для определения функции ω приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$Sc^{1/3}\Gamma^{-2/3}\left(\frac{2}{3}\right)\omega^{-1/3}\frac{d\omega}{dt}+3\alpha\omega=1, \quad \omega(0)=0 \quad (4.4)$$

В силу (3.7), решение задачи (4.4) приводит к следующему неявному выражению для локального диффузионного потока:

$$\tau=-\ln(1-J)+\frac{1}{2}\ln(1+J+J^2)+\sqrt{3}\arctg\left(\frac{1+2J}{\sqrt{3}}\right)-\frac{\pi\sqrt{3}}{6} \quad (4.5)$$

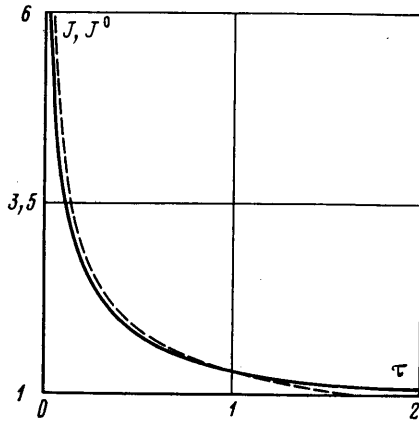
$$\tau=3^{1/3}\alpha^{2/3}\Gamma^{-1}(2/3)Sc^{-1/3}t, \quad J=j/j_s, \quad j_s=\Gamma^{-1}(1/3)(9\alpha Sc)^{1/3}$$

$$(\tau \rightarrow 0, \quad J \rightarrow (2\tau/3)^{-1/2}; \quad \tau \rightarrow \infty, \quad J \rightarrow 1+\sqrt{3}e^{-\tau})$$

На фигуре сплошной линией показана зависимость нормированного локального диффузионного потока J от времени τ ; $j_s=\lim_{t \rightarrow \infty} j(t)$ соответствует стационарному значению. Из формулы (4.5) следует, что при $\tau_s=2,6$ локальный поток менее чем на 5% отличается от своего стационарного значения.

Принимая τ_s за характерное время релаксации процесса, для t_s в силу (4.5) получаем $t_s=1,27Sc^{1/3}$. Эта величина почти в 2 раза отличается от соответствующего значения $t_s'=-\pi^{-1/3}Sc^{1/3}$, полученного путем сравнения двух первых членов асимптотического разложения решения задачи (4.1), (1.2), (1.3) в работе [3].

На фигуре штриховой линией показана зависимость $J^0=j^0/j_s$ от τ , где j^0 определяется формулой (3.9) и является асимптотикой локального потока при $t \rightarrow 0$.



5. Некоторые замечания. В связи с трудностью получения оценок погрешности предлагаемого интегрального метода в общем случае (как, впрочем, и для других интегральных методов) отметим следующее. Во-первых, здесь имеет место определенная аналогия с интегральными методами, неплохо зарекомендовавшими себя в теории гидродинамического пограничного слоя [1, 2]. Во-вторых, как следует из результатов п. 2, в общем случае произвольного обтекания при

$t \rightarrow 0$ для $n=2$ погрешность метода составляет менее 6%. В-третьих, в задачах о диффузии к реагирующим каплям (пузырям) в ламинарном потоке вязкой жидкости и к частицам в идеальной жидкости, что соответствует значению $n=1$ в выражении (3.1), предлагаемый метод является точным. Это можно показать путем непосредственной подстановки формулы (3.2) в исходное уравнение (1.1), после чего приходим к уравнению (3.3) для определения искомой функции ω . Справедливость представления (3.2) для уравнения (1.1) при $n=1$ следует также из сопоставления с результатами работ [6–10] (в частности, в случае сферической капли, уравнения для ω (3.3), (3.4) при $n=1$ совпадают с уравнениями (1.6), (1.8) работы [8]).

Следует отметить, что такого рода точные аналоги в нестационарных задачах гидродинамического пограничного слоя [1, 2] отсутствуют.

Как следует из результатов [10], при $n=1$ в (3.1) предложенный метод является точным также и для нелинейного уравнения теплопроводности (диффузии) (1.1), когда коэффициент теплопроводности зависит от температуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962. 479 с.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
3. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
4. Полянин А. Д., Прядкин П. А. О двух задачах конвективной диффузии к поверхностям плохообтекаемых тел.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 6, с. 104–109.
5. Левич В. Г., Крылов В. С., Воротилин В. П. К теории нестационарной диффузии из движущейся капли.— Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 3, с. 648–651.
6. Ruckenstein E. Mass transfer between a single drop and continuous phase.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1967, v. 10, № 12, p. 1785–1792.
7. Chao B. T. Transient heat and mass transfer to translating droplet.— Trans. ASME, Ser. C, J. Heat Transfer, 1969, v. 91, № 2, p. 273–281.
8. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Прядкин П. А., Рязанцев Ю. С. О нестационарном массообмене капли в потоке вязкой жидкости.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 3, с. 441–449.
9. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Прядкин П. А., Рязанцев Ю. С. Об интегрировании нестационарного уравнения теплообмена движущихся в жидкости тел.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 6, с. 1119–1122.
10. Полянин А. Д. Об интегрировании нелинейных нестационарных уравнений конвективного тепло- и массообмена.— Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 4, с. 817–820.

Москва

Поступила в редакцию
23.III.1981