

УДК 533.6.011

**ОБТЕКАНИЕ ПРОФИЛЯ, РАСПОЛОЖЕННОГО ПОД УГЛОМ  
АТАКИ К НАБЕГАЮЩЕМУ ЗВУКОВОМУ ПОТОКУ**

**ЛИЧУК С. Т., ФАЛЬКОВИЧ С. В.**

В [1] был предложен теоретический пример обтекания звуковым потоком газа симметричного профиля, расположенного под нулевым углом атаки к набегающему потоку. Линейное распределение скорости по поверхности профиля находилось из решения, описывающего это течение. Представляет интерес обобщение этого примера на случай несимметричного звукового обтекания профиля.

В работе рассмотрено обтекание звуковым потоком профиля Гудерлея, расположенного под углом атаки, и исследована зависимость скорости по поверхности профиля от величины угла атаки. Такая зависимость получена с помощью параболического метода [2], который позволяет указанную задачу решать непосредственно в плоскости потока. Для сравнения рассмотрено обтекание параболического профиля, расположенного под углом атаки, и получена формула, выражающая зависимость распределения скорости по поверхности от величины угла атаки, что является обобщением [3], где рассматривалось обтекание звуковым потоком параболического профиля под нулевым углом атаки.

1. Безразмерное уравнение движения Кармана — Фальковича для потенциала возмущенной скорости  $\varphi(x, y)$  с граничным условием непротекания контура профиля  $y=y_p(x)$  имеет вид

$$\varphi_{yy} = \varphi_x \varphi_{xx}; \quad y=0, \quad \varphi_y = dy_p(x)/dx \tag{1.1}$$

Полагая, согласно [2]

$$\varphi_{xx} = k = \text{const} \tag{1.2}$$

перейдем от уравнения (1.1) к уравнению теплопроводности

$$\varphi_{yy} = k\varphi_x \tag{1.3}$$

которое имеет решение [4]

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{k\pi}} \int_0^x (x-\xi)^{-1/2} \frac{dy_p(\xi)}{d\xi} \exp\left[\frac{-ky^2}{4(x-\xi)}\right] d\xi \tag{1.4}$$

Дифференцируя формулу (1.4) по  $x$  и переходя на поверхность профиля, получим следующее выражение:

$$\varphi_x(x, 0) = -\frac{1}{\sqrt{k\pi}} \frac{dF(x)}{dx}, \quad F(x) = \int_0^x (x-\xi)^{-1/2} \frac{dy_p(\xi)}{d\xi} d\xi \tag{1.5}$$

Подставляя в (1.5) вместо постоянной  $k$  ее выражение из (1.2) и проводя соответствующие преобразования, получим формулу распределения скорости возмущения по поверхности профиля

$$\varphi_x(x, 0) = \left[ \frac{3}{\pi} \int_{x_0}^x \left( \frac{dF(x_1)}{dx_1} \right)^2 dx_1 \right]^{1/3} \tag{1.6}$$

где  $x_*$  — абсцисса звуковой точки на поверхности профиля, которая находится из следующего соотношения:

$$(dF(x)/dx)_{x=x_*} = 0 \quad (1.7)$$

Перейдем теперь к задаче обтекания профиля. Возьмем симметричный профиль Гудерля с уравнением контура

$$y_p(x) = \pm 1/5 b x^{3/2} (5a - 2x), \quad 0 \leq x \leq 5a/2 \quad (1.8)$$

$$a^3 = 2C_1 C_2^{-1}, \quad b = C_2$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные константы, входящие в решение Гудерля [4]. Расположим профиль (1.8) под углом атаки к набегающему звуковому потоку и, применяя преобразование координат при повороте осей на положительный угол  $\alpha$

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \quad (1.9)$$

ст выражения (1.8) перейдем к уравнениям верхней и нижней частей несимметричного профиля

$$y_p \cos \alpha - x \sin \alpha = \pm 1/5 b (x \cos \alpha + y_p \sin \alpha)^{3/2} (5a - 2x \cos \alpha - 2y_p \sin \alpha) \quad (1.10)$$

Для удобства построения профиля (1.10) введем параметр

$$x \cos \alpha + y_p \sin \alpha = t^{2/3} \quad (1.11)$$

с помощью которого выражение (1.10) принимает параметрический вид ( $0 \leq t \leq (5a/2)^{3/2}$ )

$$x = \cos \alpha t^{3/2} \mp 1/5 b \sin \alpha t (5a - 2t^{2/3}) \quad (1.12)$$

$$y_p = \sin \alpha t^{3/2} \pm 1/5 b \cos \alpha t (5a - 2t^{2/3})$$

Используя представление (1.12), получим следующее выражение для производной:

$$\frac{dy_p}{dx} = \frac{10 \sin \alpha \mp 4b \cos \alpha t \pm 3b \cos \alpha t^{1/3} (5a - 2t^{2/3})}{10 \cos \alpha \pm 4b \sin \alpha t \mp 3b \sin \alpha t^{1/3} (5a - 2t^{2/3})} \quad (1.13)$$

Несобственный интеграл  $F = F(x)$  (1.5) будем вычислять методом выделения особенностей, для чего представим контур профиля  $y_p(\xi)$  в окрестности точки  $x$  следующим разложением:

$$y_p(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - \xi)^n \quad (1.14)$$

Коэффициенты этого разложения найдем, подставляя (1.14) в (1.10) и выполняя соответствующие действия над рядами. В частности, первый член разложения (1.14) определяется путем решения уравнения

$$c_0 \cos \alpha - x \sin \alpha = \pm 1/5 b (x \cos \alpha + c_0 \sin \alpha)^{3/2} (5a - 2x \cos \alpha - 2c_0 \sin \alpha) \quad (1.15)$$

Подставляя далее разложение с известными коэффициентами (1.14) в выражение (1.13), заменив в нем переменную  $x$  на  $\xi$  и производя соответствующие преобразования, получим представление для производной  $dy_p(\xi)/d\xi$ . После этого вычислялся интеграл (1.5)

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+1/2} \quad (1.16)$$

Были вычислены первые пять коэффициентов ряда (1.16)

$$A_0 = \frac{20 \sin \alpha \mp 8bB_1^{1/2} \cos \alpha \pm 6bB_1^{1/2} B_2 \cos \alpha}{10 \cos \alpha \pm 4bB_1^{1/2} \sin \alpha \mp 3bB_1^{1/2} B_2 \sin \alpha} \quad (1.17)$$

$$A_1 = \frac{2(e_2 d_1 - e_1 d_2)}{3d_1^2}$$

$$A_2 = \frac{2(e_1 d_2^2 - e_1 d_1 d_3 - e_2 d_1 d_2 + e_3 d_1^2)}{5d_1^3}$$

$$e_1 = \sin \alpha \mp^2 /_5 b B_1^{1/2} \cos \alpha \pm^3 /_{10} b B_1^{1/2} B_2 \cos \alpha$$

$$e_2 = \pm^3 /_{10} (a_1/2 + b_1) b B_1^{1/2} B_2 \cos \alpha \mp^3 /_5 a_1 b B_1^{1/2} \cos \alpha$$

$$d_1 = \cos \alpha \pm^2 /_5 b B_1^{1/2} \sin \alpha \mp^3 /_{10} b B_1^{1/2} B_2 \sin \alpha$$

$$d_2 = \pm^3 /_{10} (a_1/2 + b_1) b B_1^{1/2} B_2 \sin \alpha \pm^3 /_5 a_1 b B_1^{1/2} \sin \alpha$$

$$a_1 = \frac{c_1 \sin \alpha - \cos \alpha}{B_1}, \quad b_1 = \frac{2 \cos \alpha - 2c_1 \sin \alpha}{B_2}$$

$$B_1 = x \cos \alpha + c_0 \sin \alpha, \quad B_2 = 5a - 2x \cos \alpha - 2c_0 \sin \alpha$$

Выражения для коэффициентов  $A_3$  и  $A_4$  ввиду громоздкости опущены.

Дальнейшие вычисления по формулам (1.6), (1.7) проводятся численно. При этом промежуток интегрирования  $[0, x]$  покрывается сеткой разбиения с выбранным шагом  $h$ . Интеграл (1.5) вычисляется на выбранной сетке по формуле

$$F(x) = F(x_k) + \int_{x_k}^x (x-\xi)^{-1/2} \frac{dy_p(\xi)}{d\xi} d\xi \quad (1.18)$$

где  $F(x_k)$  — таблица значений интеграла в узлах сетки.

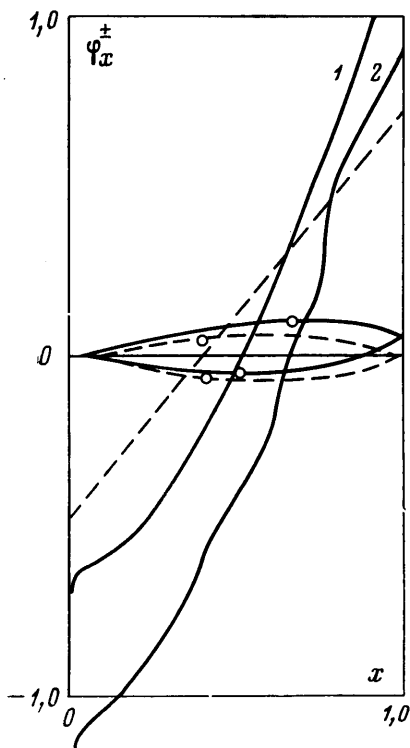
Исследование зависимости распределения скорости по поверхности профиля Гудерлея от величины угла атаки проводилось для профиля с относительной толщиной  $\tau = 13,66\%$  и для углов атаки  $\alpha = 3, 5, 8, 11^\circ$ . Результаты расчетов для первых трех углов представлены соответственно на фиг. 1–3. Отметим, что полученные выше результаты несправедливы при углах атаки, больших  $8^\circ$ , поскольку в этом случае околзвучковая теория, в рамках которой справедлив параболический метод, неприменима. При  $\alpha \rightarrow 0^\circ$  распределение скорости по поверхности несимметричного профиля стремится к линейному распределению и становится таковым при  $\alpha = 0^\circ$ , что соответствует звуковому обтеканию симметричного профиля Гудерлея.

Рассмотрим для сравнения аналогичную задачу обтекания звуковым потоком параболического профиля, расположенного под углом атаки.

2. Уравнение параболического профиля под нулевым углом атаки возьмем в форме

$$y_p(x) = \pm 2\tau x(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.1)$$

Для симметричного случая абсцисса звуковой точки  $x_* = 1/4$  и формула, выражающая распределение скорости по поверхности профиля (2.1), были получены в [3].



Фиг. 1

Перейдем к несимметричному случаю обтекания. Пусть профиль (2.1) расположен под углом атаки  $\alpha$  к набегающему звуковому потоку. Тогда, применяя преобразование (1.9) к выражению (2.1), перейдем к уравнениям верхней  $y_p^+$  и нижней  $y_p^-$  частей параболического профиля, расположенного под углом атаки

$$y_p^\pm = A^\pm(\alpha) - B(\alpha)x + \{\pm C(\alpha)x + [A^\pm(\alpha)]^2\}^{1/2} \quad (2.2)$$

$$A^\pm(\alpha) = \frac{2\tau \sin \alpha \mp \cos \alpha}{4\tau \sin^2 \alpha},$$

$$B(\alpha) = \operatorname{ctg} \alpha, \quad C(\alpha) = \frac{1}{2\tau \sin^3 \alpha}$$

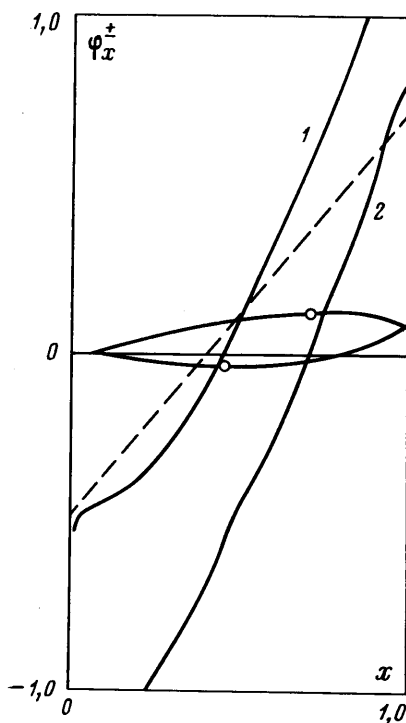
Подставляя (2.2) в выражение (1.7), найдем абсциссы звуковых точек в верхней и нижней частях профиля

$$x_{*^\pm} = \pm \frac{|A^\pm(\alpha)|}{2B(\alpha)} \mp \frac{[A^\pm(\alpha)]^2}{C(\alpha)} \quad (2.3)$$

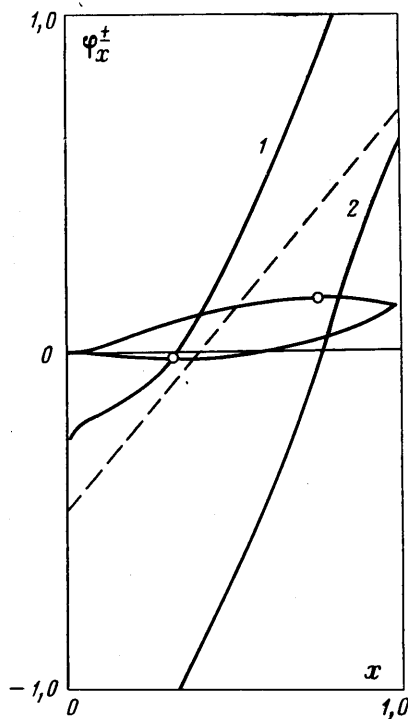
Отметим, что при значении  $\alpha=0$

$$x_{*^+}(\alpha)|_{\alpha=0^\circ} = x_{*^-}(\alpha)|_{\alpha=0^\circ} = 1/4 \quad (2.4)$$

что совпадает с результатом [3].



Фиг. 2



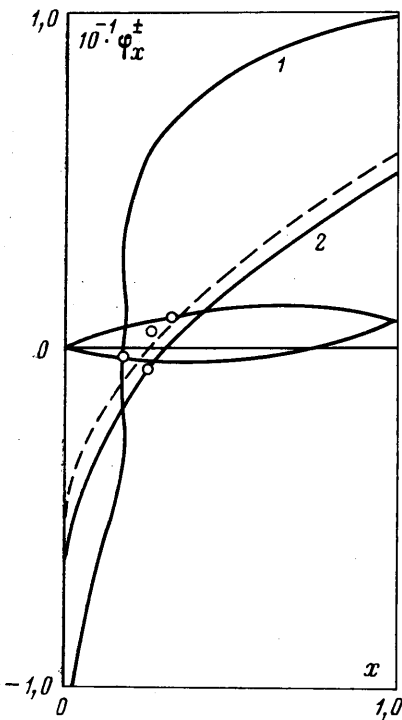
Фиг. 3

Для нахождения распределения скорости  $\varphi_x^\pm(x, 0)$  соответственно по верхней и нижней частям профиля (2.2) используем формулу (1.6). После вычисления соответствующих интегралов с использованием (2.2)–(2.4) получаем следующие выражения:

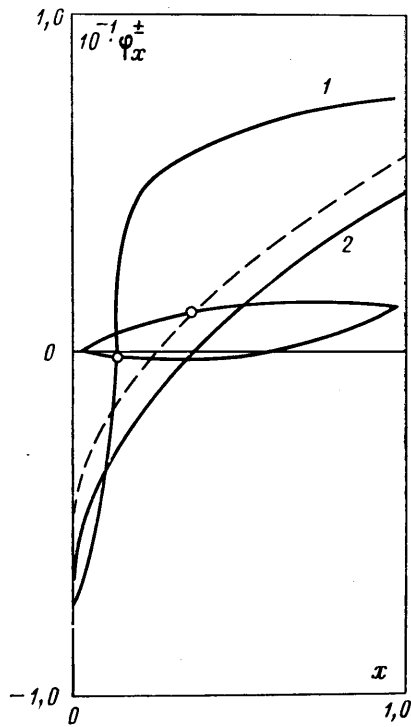
$$\varphi_x^\pm(x, 0) = \left\{ \frac{3}{\pi} \left[ \left( B \mp \frac{C}{2|A^\pm|} \right)^2 \ln \left( \frac{x}{x_*^\pm} \right) + \left( \pm \frac{BC}{|A^\pm|} - \frac{C^2}{4|A^\pm|^2} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \ln \left( \frac{x+E^\pm}{x_*^\pm+E^\pm} \right) \pm \frac{C}{4} \left( \frac{1}{x+E^\pm} - \frac{1}{x_*^\pm+E^\pm} \right) \right] \right\}^{1/2} \quad (2.5)$$

$$E^\pm = \pm C^{-1}(\alpha) |A^\pm(\alpha)|^2$$

Расчеты по формулам (2.3), (2.5) проводились для случая  $\tau = 13,66\%$  (относительная толщина профиля) и для углов атаки  $\alpha = 5, 8, 11^\circ$ . Ре-



Фиг. 4



Фиг. 5

зультаты расчетов для первых двух углов представлены соответственно на фиг. 4 и 5. Как и в случае профиля Гудерля, при  $\alpha > 8^\circ$  (для указанной относительной толщины) околосвуковая теория неприменима. При  $\alpha \rightarrow 0^\circ$  получаем в пределе

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^\circ} \varphi_x^+(x, 0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^\circ} \varphi_x^-(x, 0) = \varphi_x(x, 0) = \\ = [12\pi^{-1}\tau^2 (\ln 4x - 8x + 8x^2 + 3/2)]^{1/2} \quad (2.6)$$

Выражение (2.6) дает распределение скорости возмущения по поверхности параболического профиля (2.1) и совпадает с результатом работы [3].

На фиг. 1–5 кривая 1 соответствует  $\varphi_x^+$ , а кривая 2 —  $\varphi_x^-$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гудерлей К. Г. Теория околосзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 421 с.
2. Spreiter J. R., Alksne A. Y. Thin airfoil theory based on approximate solution of the transonic flow equation. — *NACA Rep.*, 1958, N 1359. 37 p.
3. Zierep J. Theorie der schallnahen und der Hyperschallströmungen. Karlsruhe, Braun, 1966. 193 S.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.

Саратов

Поступила в редакцию  
16.III.1984