

УДК 532.64:536.25

**ОСОБЕННОСТИ КОНВЕКЦИИ В ТОНКИХ ПЛЕНКАХ,  
ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСОВЫМ ДАВЛЕНИЕМ**

ГЛАДУН А. Д., ГОРБУНОВ Е. В., КУСТОВ В. Л.

Учет деформируемости свободной поверхности при конвекции в слое жидкости приводит к изменению условий возникновения конвекции по сравнению с классической задачей Рэлея о слое жидкости с плоскими свободными границами [1-2]. В частности, критическое значение числа Рэлея, определяющее начало конвекции, существенно уменьшается при уменьшении толщины слоя.

Однако на тонкие пленки дополнительно действует обусловленное флуктуациями электромагнитного поля ван-дер-ваальсово давление  $F(h)$ , величина которого определяется толщиной пленки  $h$  и диэлектрическими свойствами пленки и граничащих с ней сред [3]. В частности, в некоторых диапазонах толщин  $F(h)$  вычисляется по простой формуле:

$$F(h) = Bh^{-n} \quad (0.1)$$

причем построенная  $B$  и целое число  $n$  принимают различные значения в разных диапазонах  $h$ .

Важность учета ван-дер-ваальсова давления при изучении тонких пленок жидкости можно продемонстрировать, сравнивая его с гидростатическим  $p_h = \rho gh$  и поверхностным давлениями  $p_s = \sigma/R$  ( $R$  — радиус кривизны деформированной поверхности,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\rho$  — плотность жидкости,  $g$  — ускорение силы тяжести). Используя приведенные в [3-4] значения  $n$  и  $B$  в диапазонах толщин пленки  $h \leq 120 \text{ \AA}$  ( $n=3$ ,  $B \sim 10^{-20}$  Дж) и  $400 \text{ \AA} \leq h \leq 10^4 \text{ \AA}$  ( $n=4$ ,  $B \sim 10^{-28}$  Дж·м), получаем, что  $F(h)$  преобладает над  $p_h$  в пленках толщиной  $h \leq 6 \cdot 10^3 \text{ \AA}$  ( $\rho \sim 10^3 \text{ кг·м}^{-3}$ ), а  $p_s \sim F(h)$  для длинноволновых деформаций свободной поверхности с радиусом кривизны  $R \sim 10^2 h - 10^3 h$ , ( $\sigma \sim 10^{-1} \text{ Н·м}^{-1}$ ). На поверхностях с более коротким пространственным периодом деформации преобладает выравнивающее поверхностное давление.

Из приведенного сравнения видно, что в тонких пленках может оказаться существенным специфический ван-дер-ваальсов механизм деформирования свободной поверхности жидкости, влияние которого на конвективную устойчивость и форму поверхности следует учитывать. Действительно, при локальном флуктуационном уменьшении толщины пленки прижимающее ( $B > 0$ ) действие ван-дер-ваальсова давления, согласно (0.1), усиливается, что должно приводить к еще большему углублению поверхности в этом месте. Деформации поверхности препятствуют гидростатическое давление жидкости в пленке и поверхностное давление под искривленной поверхностью. Устанавливающаяся в результате форма пленки определяется равновесием указанных сил.

Настоящая работа посвящена исследованию влияния ван-дер-ваальсова давления на условия возникновения конвекции в тонкой горизонтальной пленке вязкой и вязкоупругой жидкости с деформируемой свободной поверхностью, а также исследованию устойчивости плоской формы свободной поверхности в отсутствие градиента температуры.

**1. Постановка задачи. Основные уравнения.** Процесс тепломассопереноса в тонкой горизонтальной пленке вязкоупругой жидкости на поверхности твердого тела (фиг. 1) будем описывать системой уравнений в приближении Буссинеска:

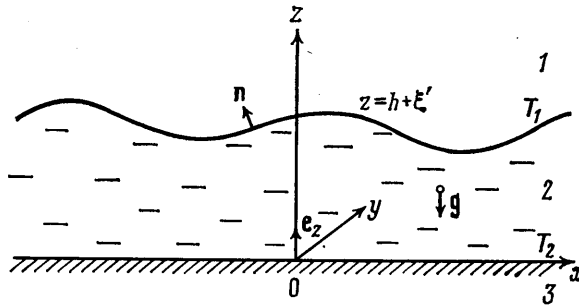
$$\text{div } \mathbf{v} = 0$$

$$\rho(1-\beta T) \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + \int_0^\infty K(\tau) \Delta \mathbf{v}(t-\tau) d\tau + \rho(1-\beta T) \mathbf{g}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T = \chi \Delta T \quad (1.1)$$

$$\sigma_{ik} = -p \delta_{ik} + \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \int_0^\infty K(\tau) \left[ \frac{\partial v_i(t-\tau)}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k(t-\tau)}{\partial x_i} \right] d\tau \quad (1.2)$$

Здесь  $\eta$  — динамическая вязкость,  $\beta$  и  $\chi$  — коэффициенты теплового расширения и температуропроводности,  $\mathbf{v}$  — скорость жидкости,  $T$  и  $p$  — температура и давление в ней, отсчитываемые от средних по пленке значе-



Фиг. 1

ний. Ядро релаксации  $K(\tau)$ , описывающее вязкоупругие свойства жидкости, выбирается таким, чтобы интегралы в (1.1) и в определяющем уравнении вязкоупругой среды (1.2) сходились вместе со своими фурье-образами.

На границе раздела жидкость — твердое тело  $z=0$  и на свободной деформируемой поверхности  $z=h+\xi'(x, y, t)$  ставятся условия:

$$\begin{aligned} z=0, \quad T=T_2, \quad \mathbf{v}=0 \\ z=h+\xi', \quad T=T_1, \quad \frac{d\xi'}{dt} = v_z, \quad \Delta_1 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ (p_v \delta_{ik} + \sigma_{ik}) n_k = \sigma n_i \Delta_1 \xi' - F(h+\xi') n_i \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к свободной поверхности,  $p_v$  — давление пара над жидкостью, а тензор напряжений  $\sigma_{ik}$  определяется выражением (1.2). Отметим, что последнее условие соответствует длинноволновым деформациям поверхности ( $\lambda \gg h$ ,  $\lambda$  — пространственный период деформации), когда можно полагать, что ван-дер-ваальсово давление определяется локальной толщиной  $h+\xi'(x, y, t)$ .

В случае малых отклонений  $T'$ ,  $p'$ ,  $\mathbf{v}'$ ,  $\xi'$  от значений, соответствующих механическому равновесию:

$$p_0(z) = -\rho g(z-h) + p_v + F(h), \quad T_0(z) = -Az + T_2, \quad A = \frac{T_2 - T_1}{h}, \quad v_0 = 0, \quad \xi_0 = 0$$

система уравнений (1.1) и граничных условий (1.3) в безразмерной форме в линейном по отклонениям приближении принимает вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v}' = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -\nabla p' + \Delta \mathbf{v}' + \int_0^\infty \frac{h^2 K(\tau)}{\eta v} \Delta \mathbf{v}'(t-\tau) d\tau + \operatorname{Gr} T' \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} - (\mathbf{v}' \mathbf{e}_z) = \frac{\Delta T'}{Pr}$$

$$z=0, T'=0, \mathbf{v}'=0, z=1, T'=\xi', \frac{\partial \xi'}{\partial t} = v_z'$$

$$2 \frac{\partial v_z'}{\partial z} + 2 \int_0^{\infty} \frac{h^2 K(\tau)}{\eta \nu} \frac{\partial v_z'(t-\tau)}{\partial z} d\tau - p' - \frac{1}{Pr} \left[ Wa - \frac{1}{\mu} \left( 1 - \frac{\Delta_1}{W} \right) \right] \xi' = 0 \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial v_z'}{\partial x} + \frac{\partial v_x'}{\partial z} + \int_0^{\infty} \frac{h^2 K(\tau)}{\eta \nu} \left( \frac{\partial v_z'}{\partial x} + \frac{\partial v_x'}{\partial z} \right) \Big|_{t-\tau} d\tau =$$

$$= \frac{\partial v_z'}{\partial y} + \frac{\partial v_y'}{\partial z} + \int_0^{\infty} \frac{h^2 K(\tau)}{\eta \nu} \left( \frac{\partial v_z'}{\partial y} + \frac{\partial v_y'}{\partial z} \right) \Big|_{t-\tau} d\tau = 0$$

$$Pr = \frac{\nu}{\chi}, \quad Gr = \frac{g\beta Ah^4}{\nu^2}, \quad W = \frac{\rho g h^2}{\sigma}, \quad \mu = \frac{\eta \chi}{\rho g h^3}, \quad Wa = - \frac{h^3}{\eta \chi} \frac{dF}{dh}$$

Здесь  $\nu = \eta/\rho$  — кинематическая вязкость  $\mathbf{e}_z$  — единичный вектор по оси  $z$ ;  $Pr$  — число Прандтля,  $Gr$  — число Грасгофа,  $W$  — аналог числа Вебера и  $\mu$  — параметры задачи о конвекции в слое со свободной деформируемой границей [2], но без учета  $F(h)$ , а  $Wa$  — новый параметр подобия, характеризующий влияние ван-дер-ваальсова давления на поведение тонкой пленки жидкости.

Решение системы (1.4) будем искать в виде

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{v}' \\ p' \\ T' \end{Bmatrix} (x, y, z, t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ p \\ T \end{Bmatrix} (z) \exp[-\omega t + j(k_x x + k_y y)]$$

$$\xi'(x, y, t) = \xi_{\max} \exp[-\omega t + j(k_x x + k_y y)]$$

Тогда (1.4) — (1.5) выражается через  $T(z)$  следующим образом:

$$\frac{d^6 T}{dz^6} - \{3k^2 - \omega [Pr + q^{-1}(\omega)]\} \frac{d^4 T}{dz^4} + \{3k^4 - 2k^2 \omega [Pr + q^{-1}(\omega)] +$$

$$+ \omega^2 Pr q^{-1}(\omega)\} \frac{d^2 T}{dz^2} - k^2 \{(k^2 - \omega Pr) [k^2 - \omega q^{-1}(\omega)] - Ra q^{-1}(\omega)\} T(z) = 0,$$

$$q(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} \frac{h^2 K(\tau)}{\eta \nu} e^{\omega \tau} d\tau \quad (1.6)$$

$$z=0, \quad T(z)=0, \quad \frac{d^2 T}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^3 T}{dz^3} + (\omega Pr - k^2) \frac{dT}{dz} = 0$$

$$z=1, \quad \frac{d^2 T}{dz^2} - k^2 T(z) = 0, \quad \frac{d^4 T}{dz^4} + k^2 (2\omega Pr - k^2) T(z) = 0 \quad (1.7)$$

$$q(\omega) \frac{d^5 T}{dz^5} - \{4k^2 q(\omega) - \omega [q(\omega) Pr + 1]\} \frac{d^3 T}{dz^3} -$$

$$-[3k^2q(\omega) - \omega](\omega \text{Pr} - k^2) \frac{dT}{dz} - k^2 \left[ \text{Wa} - \frac{1}{\mu} \left( 1 + \frac{k^2}{W} \right) \right] T = 0$$

где  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ ,  $\text{Ra} = \text{Gr} \cdot \text{Pr}$  — число Рэлея, причем, как отмечалось выше, предполагается, что существует интеграл в выражении  $q(\omega)$ .

**2. Условия возникновения конвекции в тонкой пленке с учетом ван-дер-ваальсова давления.** Найдем нейтральную кривую  $\text{Ra} = \text{Ra}_*(k)$ , соответствующую переходу от затухающих ( $\omega > 0$ ) к нарастающим ( $\omega < 0$ ) возмущениям. Решение уравнения (1.6) при  $\omega = 0$ , удовлетворяющее граничным условиям (1.7), приводит в длинноволновом пределе  $k \ll 1$ ,  $k^2 \text{Ra} \ll 1$  к следующей формуле:

$$\text{Ra}_*(k) = -4q(0) \left[ \text{Wa} - \frac{1}{\mu} \left( 1 + \frac{k^2}{W} \right) \right] \quad (2.1)$$

При  $\text{Wa} < 0$  ван-дер-ваальсово давление оказывает стабилизирующее воздействие на возникновение конвекции ( $\text{Ra}_*$  возрастает). Наоборот, при  $\text{Wa} > 0$   $F(h)$  понижает порог возникновения конвективной неустойчивости. По мере усиления  $F(h)$  при уменьшении толщины пленки устойчивость ее к конвекции снижается, а при  $\text{Wa} \geq \mu^{-1}$  конвекция возникает даже при  $T_2 \leq T_1$ , и для ее устранения необходимо создать в пленке разность температур  $T_2 - T_1 \geq -4q(0) (\mu \text{Wa} - 1) / \beta$ .

Таким образом, ван-дер-ваальсово давление существенно изменяет характер конвективной устойчивости в тонкой пленке жидкости, приводя, в частности, к возможности возникновения конвекции при подогреве сверху.

Отметим, что условие возникновения конвекции в слое жидкости с деформируемой свободной границей [2] с точностью до численного множителя следует из (2.1) при  $k \rightarrow 0$ , если в нем не учитывать  $F(h)$  ( $\text{Wa} = 0$ ) и вязкоупругость жидкости ( $K(\tau) = 0$ ,  $q(0) = 1$ ).

**3. Устойчивость формы поверхности тонкой пленки вязкой и вязкоупругой жидкости под действием ван-дер-ваальсова давления.** Рассмотрим динамику деформирования свободной поверхности пленки под действием  $F(h)$ , когда в ней отсутствует градиент температуры. Для этого следует положить в (1.6)  $\text{Ra} = 0$ ,  $T_1 = T_2 = T_0$ . Однако проще отбросить уравнение теплопроводности и решать систему уравнений (1.4) с граничными условиями (1.5) относительно  $v_z(z)$ , положив  $T = T_0$ ,  $T' = 0$ . Тогда в длинноволновом низкочастотном пределе  $k \ll 1$ ,  $k^2 q(\omega) \ll \omega + 1$  получаем в дополнение к аналогу известной волны в вязкой жидкости  $\omega = k^2 q(\omega)$  [5] дисперсионное соотношение

$$\omega q(\omega) + A(k) = 0, \quad A(k) = \frac{k^2}{3 \text{Pr}} \left[ \text{Wa} - \frac{1}{\mu} \left( 1 + \frac{k^2}{W} \right) \right] \quad (3.1)$$

Из структуры уравнения (3.1) видно, что  $\omega = 0$  только в тех точках  $k$ , где  $A(k) = 0$ . При  $\text{Wa} < \mu^{-1}$  существует только одно такое действительное значение  $k_1 = 0$ . В случае  $\text{Wa} > \mu^{-1}$  появляется вторая точка  $k_2 = \sqrt{W(\mu \text{Wa} - 1)}$ , в которой  $\omega(k) = 0$ . Определим ход кривой  $\omega(k)$  вблизи точек  $k_1$  и  $k_2$ , разложив уравнение (3.1) в ряд Тейлора до первых не исчезающих членов по  $\delta k_i = k - k_i$  ( $i = 1, 2$ ) и малым  $\omega$ :

$$\omega q(0) + \frac{\mu \text{Wa} - 1}{3\mu \text{Pr}} (\delta k_1)^2 = 0 \quad (3.2)$$

$$\omega q(0) - \frac{2\sqrt{W}}{3\mu \text{Pr}} (\mu \text{Wa} - 1)^{3/2} \delta k_2 = 0 \quad (3.3)$$

Поскольку в определяющем уравнении среды (1.2) сумма вязкого и вязкоупругого членов, очевидно, положительна, то  $q(0) > 0$ . Из соотношения (3.2) тогда следует, что при  $Wa < \mu^{-1}$  пленка устойчива ( $\omega > 0$ ) относительно деформаций ее свободной поверхности с любым пространственным периодом. В случае  $Wa > \mu^{-1}$  из (3.2) — (3.3) следует, что пленка неустойчива только относительно деформаций ее с волновыми числами  $k$ , лежащими внутри интервала  $[0, k_2]$ , а при  $k > k_2$  устойчива.

Рассмотрим дисперсионное соотношение (3.1) для случая вязкой жидкости и вязкоупругой жидкости в приближении дискретного набора времен релаксации.

В простейшем случае вязкой жидкости ( $K(\tau) = 0, q(\omega) = 1$ ) уравнение (3.1) преобразуется к виду

$$\omega = -\frac{k^2}{3 \text{Pr}} \left[ Wa - \frac{1}{\mu} \left( 1 + \frac{k^2}{W} \right) \right] \quad (3.4)$$

График зависимости (3.4) в области малых  $k$  в случае  $Wa > \mu^{-1}$  приведен на фиг. 2 (кривая 1). Отметим, что максимальный инкремент  $\gamma$  имеют возмущения с пространственным периодом  $\lambda$ :

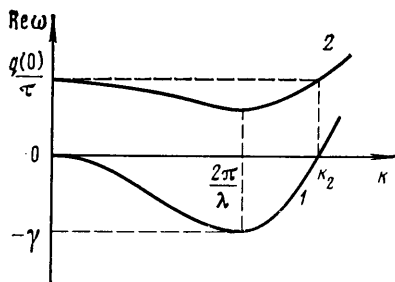
$$\gamma = \frac{W(\mu Wa - 1)^2}{12\mu \text{Pr}}, \quad \lambda = 2\pi \sqrt{2[W(\mu Wa - 1)]^{-1/2}}$$

В случае предельно тонких пленок вязкой жидкости, когда гидростатическим давлением можно пренебречь по сравнению с ван-дер-ваальсовым ( $Wa \gg \mu^{-1}$ ), из соотношения (3.4) можно получить дисперсионное уравнение, выведенное в [6] для частного вида  $F(h)$ .

Для анализа устойчивости плоской свободной поверхности пленки вязкоупругой жидкости выберем ядро релаксации  $K(\tau)$  в виде

$$K(\tau) = \sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_{\alpha}}\right)$$

где  $\tau_{\alpha}$  ( $\alpha=1, 2, \dots, N$ ) — безразмерные времена релаксации. Если  $\omega^{-1} > \max \tau_{\alpha}$ , то интеграл в  $q(\omega)$  существует. Для вязкоупругой жидкости с одним временем релаксации  $q(\omega)$  и дисперсионное соотношение имеют вид



Фиг. 2

$$q(\omega) = 1 + \frac{h^2}{\eta v} \frac{\varphi \tau}{1 - \omega \tau}, \quad \omega_{\pm} =$$

$$= \frac{q(0) - \tau A(k) \pm \sqrt{[q(0) - \tau A(k)]^2 + 4\tau A(k)}}{2\tau}$$

Анализ последнего соотношения показывает, что на ветви  $\omega_+(k)$   $\text{Re } \omega_+ > 0$  (фиг. 2, кривая 2), а ветвь  $\omega_-(k)$  соответствует дисперсионной кривой вязкой жидкости (фиг. 2, кривая 1) и переходит в нее при  $\tau \rightarrow 0$ . Если  $\varphi > 0$ , то  $\text{Im } \omega(k) = 0$  для всех действительных  $k$ ; при  $\varphi < 0$  существует диапазон  $k$ , где  $\text{Im } \omega(k) \neq 0$ , при этом  $\text{Re } \omega(k) > 0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Изаксон В. Х., Юдович В. И.* О возникновении конвекции в слое жидкости со свободной границей.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 4, с. 23—28.
2. *Изаксон В. Х.* О влиянии поверхностного натяжения на возникновение конвекции в слое жидкости со свободной поверхностью.— ПМТФ, 1969, № 3, с. 89—93.
3. *Дзялошинский И. Е., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Общая теория ван-дер-ваальсовых сил.— Усп. физ. наук, 1961, т. 73, № 3, с. 381—422.
4. *Чураев Н. В.* Молекулярные силы в смачивающих пленках неполярных жидкостей.— Коллоидн. ж., 1974, т. 36, № 2, с. 318—327.
5. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.—Л.: Гостехиздат, 1944. 624 с.
6. *Ruckenstein E., Jain R. K.* Spontaneous rupture of thin liquid films.— Faraday Transactions II, 1974, № 1, p. 132—147.

Москва

Поступила в редакцию  
4.V.1981