МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 · 1982

УДК 532.59.013.4

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

НЕВОЛИН В. Г.

Исследуется устойчивость равновесия свободной поверхности бесконечного слоя невязкой несжимаемой жидкости, совершающей колебания вдоль вертикальной оси. Задача решается в нелинейной постановке разложением в ряд по амплитуде возбуждения. Получены мягкий и жесткий режимы возбуждения поверхностных волн. Исследуется устойчивость полученных режимов. Показано, что возникающая на поверхности жидкости плоская волна неустойчива.

1. Рассматривается устойчивость свободной поверхности слоя невязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины. Слой совершает малые колебания с заданной частотой ω вдоль вертикальной оси y по периодическому закону. Декартова система координат выбрана таким образом, что плоскость (xz) совпадает с невозмущенной границей раздела. В движущейся системе координат жидкость неподвижна, а эффективное ускорение силы тяжести $\mathbf{g}(t)=(1-\eta\cos\omega t)\mathbf{g}$, где $\eta\equiv\beta\omega^2/g$ — безразмерная амплитуда модуляции, β — амплитуда модуляции, $\mathbf{g}=(0,\ -g,\ 0)$ — ускорение силы тяжести.

Условия равновесия системы запишутся

$$\mathbf{V}_0=0,\quad Z_0=0,\quad \nabla P_0=-\rho(1-\eta\cos\omega t)\mathbf{g} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{V}=\{U(x,\ y,\ t),\ V(x,\ y,\ t),\ 0\}$ — вектор скорости, $Z(x,\ t)$ — смещение поверхности от положения равновесия, $P(x,\ y,\ t)$ — давление, ρ — плотность жидкости.

Исследуем устойчивость этого равновесия, для чего обычным образом внесем возмущения скорости и давления и, выбирая в качестве единиц измерения длины, времени, частоты, скорости и давления соответственно $(\alpha/\rho g)^{1/2}$, $(\alpha/\rho g^3)^{1/4}$, $(\rho g^3/\alpha)^{1/4}$, $(\alpha g/\rho)^{1/4}$ и $(\alpha\rho g)^{1/2}$, получим для возмущений следующую систему уравнений [1]:

$$\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}=-\nabla P,\quad \nabla\mathbf{V}=0 \tag{1.2}$$

На поверхности жидкости и на дне соответственно имеем

$$\begin{gathered}\frac{\partial Z}{\partial t}+U\frac{\partial Z}{\partial x}=V\\ P=(1-\eta\cos\omega t)Z-\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\left[1+\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2\right]^{-3/2}\end{gathered} \tag{1.3}$$

$$U\to0,\quad V\to0\quad (y\to-\infty) \tag{1.4}$$

Будем считать, что отклонение поверхности от положения равновесия мало, тогда можно представить решение задачи (1.2)—(1.4) в виде ряда по малому параметру ε, т. е.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{V} \\ P \\ Z \end{Bmatrix} = \sum_j \varepsilon^j \begin{Bmatrix} \mathbf{V}^{(j)} \\ P^{(j)} \\ Z^{(j)} \end{Bmatrix}, \quad \eta = \eta_0 + \sum_j \varepsilon^j \eta^{(j)} \tag{1.5}$$

Такое разложение η является, в сущности, определением параметра ε, поскольку амплитуда возбуждения η задана.

Подставляя разложение (1.5) в уравнения (1.2)—(1.4), получим для $F^{(j)}$ следующее:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial \mathbf{V}^{(1)}}{\partial t} + \nabla P^{(1)}\right) + \varepsilon^2\left[\frac{\partial \mathbf{V}^{(2)}}{\partial t} + (\mathbf{V}^{(1)}\nabla)\mathbf{V}^{(1)} + \nabla P^{(2)}\right] + \varepsilon^3\left[\frac{\partial \mathbf{V}^{(3)}}{\partial t} + \right.$$
$$\left. + (\mathbf{V}^{(1)}\nabla)\mathbf{V}^{(2)} + (\mathbf{V}^{(2)}\nabla)\mathbf{V}^{(1)} + \nabla P^{(3)}\right] + \ldots = 0, \quad \nabla \mathbf{V}^{(j)} = 0 \tag{1.6}$$

Приводя условия на поверхности при $y = Z(x, t)$ к условиям при $y = 0$, имеем

$$\varepsilon\left(\frac{\partial Z^{(1)}}{\partial t} - V^{(1)}\right) + \varepsilon^2\left(\frac{\partial Z^{(2)}}{\partial t} - V^{(2)} + U^{(1)}\frac{\partial Z^{(1)}}{\partial x} - Z^{(1)}\frac{\partial V^{(1)}}{\partial y}\right) +$$
$$+ \varepsilon^3\left(\frac{\partial Z^{(3)}}{\partial t} - V^{(3)} + U^{(1)}\frac{\partial Z^{(2)}}{\partial x} + U^{(2)}\frac{\partial Z^{(1)}}{\partial x} + Z^{(1)}\frac{\partial U^{(1)}}{\partial y}\frac{\partial Z^{(1)}}{\partial x} - \right.$$
$$\left. - Z^{(1)}\frac{\partial V^{(2)}}{\partial y} - Z^{(2)}\frac{\partial V^{(1)}}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial y^2} Z^{(1)} Z^{(1)}\right) + \ldots = 0$$

$$\varepsilon\left[P^{(1)} - (1 - \eta_0 \cos \omega t) Z^{(1)} + \frac{\partial^2 Z^{(1)}}{\partial x^2}\right] + \varepsilon^2\left[P^{(2)} - (1 - \eta_0 \cos \omega t) Z^{(2)} + \right.$$
$$\left. + Z^{(1)}\frac{\partial P^{(1)}}{\partial y} + \eta^{(1)} Z^{(1)} \cos \omega t + \frac{\partial^2 Z^{(2)}}{\partial x^2}\right] + \varepsilon^3\left[P^{(3)} - (1 - \eta_0 \cos \omega t) Z^{(3)} + \right. \tag{1.7}$$
$$+ \frac{\partial^2 Z^{(3)}}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(Z^{(1)})^2\frac{\partial^2 P^{(1)}}{\partial y^2} + Z^{(1)}\frac{\partial P^{(2)}}{\partial y} + Z^{(2)}\frac{\partial P^{(1)}}{\partial y} +$$
$$\left. + \eta^{(1)} Z^{(2)} \cos \omega t + \eta^{(2)} Z^{(1)} \cos \omega t - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial Z^{(1)}}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 Z^{(1)}}{\partial x^2}\right] + \ldots = 0$$

$$y \to -\infty: \quad U^{(j)} \to 0, \quad V^{(j)} \to 0 \tag{1.8}$$

2. Решая систему уравнений (1.6) с граничными условиями (1.7) и (1.8), получим

$$Z^{(1)} = Z_1^{(1)} e^{ikx} + \bar{Z}_1^{(1)} e^{-ikx}, \quad V^{(1)} = \dot{Z}_1^{(1)} e^{ikx+ky} + \text{к. с.}$$
$$U^{(1)} = i\dot{Z}_1^{(1)} e^{ikx+ky} + \text{к. с.}, \quad P^{(1)} = -\frac{1}{k}\ddot{Z}_1^{(1)} e^{ikx+ky} + \text{к. с.}$$

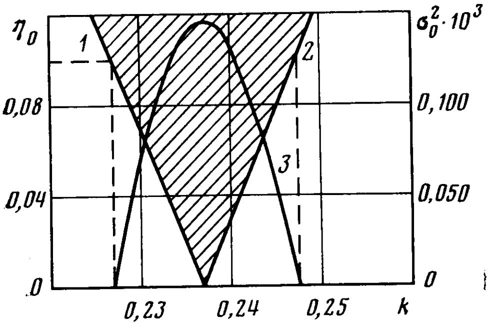
где k — волновое число, а $Z_1^{(1)}$ описывается уравнением вида

$$\ddot{Z}_1^{(1)} + (\omega_0^2 - \eta_0 k \cos \omega t) Z_1^{(1)} = 0, \quad \omega_0^2 = k^3 + k, \quad \dot{Z} \equiv \partial Z/\partial t \tag{2.1}$$

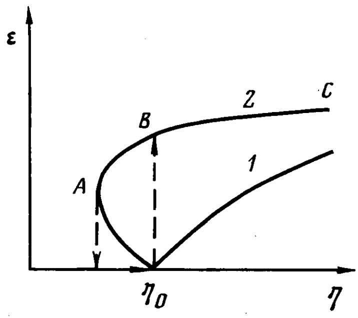
Уравнение (2.1) является уравнением Матье [2]. Будем исследовать его вблизи основного резонанса. Тогда решение этого уравнения внутри заштрихованной области (фиг. 1) будет неустойчивым, т. е. его амплитуда неограниченно растет со временем, вне этой области решение уравнения Матье будет устойчивым, т. е. его амплитуда ограничена на всем временно́м интервале. Вблизи границы области устойчивости (прямые *1*, *2*, фиг. 1) решение уравнения (2.1) можно представить в виде

$$Z_1^{(1)}=ae^{i\frac{1}{2}\omega t}+be^{-i\frac{1}{2}\omega t} \tag{2.2}$$

где a и b — постоянные. Однако при $\eta_0\to 0$ это же решение будет иметь место и в заштрихованной (фиг. 1) области [2—5]. Тем самым рассматривается решение задачи, а в дальнейшем и исследование ее устойчивости вблизи $\omega_0^2=\omega^2/4$ (носика заштрихованной на фиг. 1 области).



Фиг. 1



Фиг. 2

Решая уравнение (2.1) вблизи основного резонанса, получим для границ области неустойчивости

$$\tfrac{1}{2}\eta_0 k=\tfrac{1}{4}\omega^2-\omega_0^2\quad (a=b);\qquad \tfrac{1}{2}\eta_0 k=\omega_0^2-\tfrac{1}{4}\omega^2\quad (b=-a) \tag{2.3}$$

Отсюда следует, что области неустойчивости соответствует спектр волновых чисел от k_1 до k_2, удовлетворяющих уравнению

$$k_{1,2}^3+(1\pm\tfrac{1}{2}\eta_0)k_{1,2}=\tfrac{1}{4}\omega^2 \tag{2.4}$$

Подставляя решение уравнений первого порядка в уравнения второго порядка по ε, из (1.6)–(1.8) получим

$$Z^{(2)}=Z_1^{(2)}e^{ikx}+Z_2^{(2)}e^{2ikx}+\text{к.с.}$$

$$U^{(2)}=i\dot Z_1^{(2)}e^{ky+ikx}+i(\dot Z_2^{(2)}-2k\dot Z_1^{(1)}Z_1^{(1)})e^{2ky+2ikx}+\text{к.с.}$$

$$V^{(2)}=\dot Z_1^{(2)}e^{ky+ikx}+(\dot Z_2^{(2)}-2k\dot Z_1^{(1)}Z_1^{(1)})e^{2ky+2ikx}+\text{к.с.}$$

$$P^{(2)}=2(1-e^{2ky})|\dot Z_1^{(1)}|^2+2\,\mathrm{Re}(Z^{(1)}\ddot Z^{(1)})-\frac{1}{k}\ddot Z_1^{(2)}e^{ky+ikx}-$$

$$-\frac{1}{2k}(\ddot Z_2^{(2)}-2k\ddot Z_1^{(1)}Z_1^{(1)}-2k\dot Z_1^{(1)}\dot Z_1^{(1)})e^{2ky+2ikx}+\text{к.с.}$$

$$\ddot Z_1^{(2)}+(\omega_0^2-\eta_0 k\cos\omega t)Z_1^{(2)}=\eta^{(1)}Z_1^{(1)}\cos\omega t \tag{2.5}$$

$$\ddot Z_2^{(2)}+(\omega_1^2-2\eta_0 k\cos\omega t)Z_2^{(2)}=2k(\dot Z_1^{(1)})^2,\qquad \omega_1^2\equiv 8k^3+2k \tag{2.6}$$

Из условия разрешимости для $Z_1^{(2)}$ имеем, что $\eta^{(1)}\equiv 0$ и решение уравнения (2.5) совпадает с решением (2.2) для $Z_1^{(1)}$.

Подставляя решение (2.2) в уравнение (2.6) и пренебрегая членами порядка $\eta_0 Z_2^{(2)}$, получим

$$Z_2^{(2)}=k\omega^2\left(\frac{ab}{\omega_1^2}-\frac{a^2\cos\omega t}{\omega_1^2-\omega^2}\right)+\left(\frac{ka^2\omega^2}{\omega_1^2-\omega^2}-\frac{kab\omega^2}{\omega_1^2}\right)\cos\omega_1 t \tag{2.7}$$

При этом учтено, что поскольку в начальный момент времени высшие гармоники отсутствуют, то $Z^{(j)}(t=0)=0$ при $j\geqslant 2$.

Используя решения первого и второго порядка по ε, из (1.6) – (1.8) получим

$$Z^{(3)}=Z_1^{(3)}e^{ikx}+Z_2^{(3)}e^{2ikx}+Z_3^{(3)}e^{3ikx}+\text{к.с.}$$

$$\ddot Z_1^{(3)}+(\omega_0^2-\eta_0 k\cos\omega t)Z_1^{(3)}=\eta^{(2)}kZ_1^{(1)}\cos\omega t+\frac{3k^5}{2}Z_1^{(1)}|Z_1^{(1)}|^2-$$

$$-2k\frac{d}{dt}(Z_2^{(2)}\dot{\bar Z}_1^{(1)})-2k^2Z_1^{(1)}|\dot Z_1^{(1)}|^2+k^2[(\dot Z_1^{(1)})^2\bar Z_1^{(1)}-(Z_1^{(1)})^2\ddot{\bar Z}_1^{(1)}]$$

Воспользовавшись условием разрешимости, имеем

$$\eta^{(2)}=\left[\frac{1}{T}\int_0^T(Z_1^{(1)})^2\cos\omega t\,dt\right]^{-1}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T\left[2Z_1^{(1)}\frac{d}{dt}(Z_2^{(2)}\dot{\bar Z}_1^{(1)})+k(Z_1^{(1)})^3\ddot{\bar Z}_1^{(1)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2k\left(|\dot Z_1^{(1)}|^2-\frac{3k^3}{4}|Z_1^{(1)}|^2\right)(Z_1^{(1)})^2-k|Z_1^{(1)}|^2(\dot Z_1^{(1)})^2\right]dt\right\}$$

где T достаточно велико.

Подставляя в это выражение значения для $Z^{(j)}$ из (2.2) и (2.7), имеем

$$\eta^{(2)}=-abk[\omega^2+9k^3+\omega^4/\omega_1^2+\omega^4/(\omega_1^2-\omega^2)] \tag{2.8}$$

Разложение (1.5) амплитуды возбуждения η позволяет определить параметр разложения ε следующим образом: $\varepsilon=\sqrt{\Delta\eta/\eta^{(2)}}$, где $\Delta\eta\equiv\eta-\eta_0$ – надкритичность.

Из выражения (2.8) следует, что $\eta^{(2)}$ может быть как положительной, так и отрицательной величиной. Поскольку амплитуда поверхностных волн ε вещественна, то оказывается, что при $\eta^{(2)}<0$ возбуждение поверхностных волн возможно при $\eta<\eta_0$ – это так называемый «жесткий» режим возбуждения, а при $\eta^{(2)}>0$ возбуждение волн будет происходить при $\eta>\eta_0$ – это так называемый «мягкий» режим возбуждения волн.

На фиг. 2 показана зависимость амплитуды поверхностных волн ε от амплитуды возбуждения η. Кривая *1* соответствует «мягкому», а кривая *2* фиг. 2 – «жесткому» режиму возбуждения поверхностных волн. В случае «мягкого» возбуждения амплитуда волн растет начиная от нуля при $\eta\geqslant\eta_0$. В случае «жесткого» возбуждения возрастание η до η_0 не приводит к колебанию поверхности жидкости, но при $\eta=\eta_0$ на поверхности возникает волна с конечной амплитудой $\varepsilon(B)$, которая в дальнейшем растет с ростом по линии BC. Если будем уменьшать η, амплитуда поверхностных волн будет плавно уменьшаться до нуля при $\eta=\eta_0$ в случае «мягкого» возбуждения и уменьшится до $\varepsilon(A)$ при достижении η величины η_A ($\eta_A<\eta_0$) в случае «жесткого» возбуждения. Дальнейшее уменьшение амплитуды возбуждения приводит к резкому исчезновению поверхностных волн. Иначе говоря, в случае «жесткого» возбуждения имеет место гистерезис, связанный с возможностью возбуждения конечно-амплитудных волн в подкритической области.

Таким образом, как только частота возбуждения ω попадает в резонансную область (2.3), равновесное состояние (1.1) теряет устойчивость и на поверхности жидкости возникает плоская волна с волновым числом k из интервала $k_1\leqslant k\leqslant k_2$. Причем в зависимости от знака выражения (2.8) возбуждение поверхностных волн будет происходить «мягким» или «жестким» образом.

3. Рассмотрим устойчивость возникшей плоской волны. Для этого добавим в исходное решение ($\mathbf{V}$, P, Z) малое возмущение ($\mathbf{V}'$, P', Z') по правилу

$$\mathbf{V}=\mathbf{V}+\mathbf{V}', \quad P=P+P', \quad Z=Z+Z'$$
$$F'(x, y, z, t)=e^{-\sigma t}f(x, y, z, t) \tag{3.1}$$

где F' — возмущения рассматриваемых величин, а f — периодическая функция времени. Будем искать решение $f(x, y, z, t)$ в виде ряда по степеням ε [6, 7]

$$f=f^{(1)}+\varepsilon f^{(2)}+\varepsilon^2 f^{(3)}+\ldots, \quad \sigma=\sigma_0+\varepsilon\sigma^{(1)}+\varepsilon^2\sigma^{(2)}+\ldots \tag{3.2}$$

Подставив выражение (3.1) с учетом представления (3.2) и (1.5) в уравнения (1.2)—(1.4), получим для $\mathbf{v}^{(j)}=\{u^{(j)}, v^{(j)}, w^{(j)}\}$, $p^{(j)}$, $\zeta^{(j)}$ линеаризованную систему уравнений и условия на поверхности жидкости при $y=0$:

$$\frac{\partial\mathbf{v}^{(1)}}{\partial t}-\sigma_0\mathbf{v}^{(1)}+\nabla p^{(1)}+\varepsilon\left[\frac{\partial\mathbf{v}^{(2)}}{\partial t}-\sigma_0\mathbf{v}^{(2)}-\sigma^{(1)}\mathbf{v}^{(1)}+(\mathbf{V}^{(1)}\nabla)\mathbf{v}^{(1)}+\right.$$
$$\left.+(\mathbf{v}^{(1)}\nabla)\mathbf{V}^{(1)}+\nabla p^{(2)}\right]+\varepsilon^2\left[\frac{\partial\mathbf{v}^{(3)}}{\partial t}-\sigma_0\mathbf{v}^{(3)}-\sigma^{(1)}\mathbf{v}^{(2)}-\sigma^{(2)}\mathbf{v}^{(1)}+\right.$$
$$+(\mathbf{V}^{(2)}\nabla)\mathbf{v}^{(1)}+(\mathbf{V}^{(1)}\nabla)\mathbf{v}^{(2)}+(\mathbf{v}^{(2)}\nabla)\mathbf{V}^{(1)}+(\mathbf{v}^{(1)}\nabla)\mathbf{V}^{(2)}+$$
$$\left.+\nabla p^{(3)}\right]+\ldots=0, \quad \nabla\mathbf{v}^{(j)}=0 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial\zeta^{(1)}}{\partial t}-\sigma_0\zeta^{(1)}-v^{(1)}+\varepsilon\left(\frac{\partial\zeta^{(2)}}{\partial t}-\sigma_0\zeta^{(2)}-\sigma^{(1)}\zeta^{(1)}-v^{(2)}+u^{(1)}\frac{\partial Z^{(1)}}{\partial x}+\right.$$
$$\left.+U^{(1)}\frac{\partial\zeta^{(1)}}{\partial x}-\zeta^{(1)}\frac{\partial V^{(1)}}{\partial y}-Z^{(1)}\frac{\partial v^{(1)}}{\partial y}\right)+\varepsilon^2\left(\frac{\partial\zeta^{(3)}}{\partial t}-\sigma_0\zeta^{(3)}-\sigma^{(1)}\zeta^{(2)}-\right.$$
$$-\sigma^{(2)}\zeta^{(1)}-v^{(3)}+U^{(1)}\frac{\partial\zeta^{(2)}}{\partial x}+U^{(2)}\frac{\partial\zeta^{(1)}}{\partial x}+u^{(1)}\frac{\partial Z^{(2)}}{\partial x}+u^{(2)}\frac{\partial Z^{(1)}}{\partial x}-$$
$$\left.-Z^{(1)}\frac{\partial v^{(2)}}{\partial y}-\zeta^{(1)}\frac{\partial V^{(2)}}{\partial y}-\zeta^{(2)}\frac{\partial V^{(1)}}{\partial y}-Z^{(2)}\frac{\partial v^{(1)}}{\partial y}\right)+\ldots=0 \tag{3.4}$$

$$p^{(1)}-\left[1-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\eta_0\cos\omega t\right]\zeta^{(1)}+\varepsilon\left\{p^{(2)}+\zeta^{(1)}\frac{\partial P^{(1)}}{\partial y}+\right.$$
$$\left.+Z^{(1)}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial y}-\left[1-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\eta_0\cos\omega t\right]\zeta^{(2)}\right\}+\varepsilon^2\left\{p^{(3)}-\right.$$
$$-\left[1-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\eta_0\cos\omega t\right]\zeta^{(3)}+\eta^{(2)}\zeta^{(1)}\cos\omega t+Z^{(1)}\frac{\partial p^{(2)}}{\partial y}+$$
$$\left.+Z^{(2)}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial y}+\zeta^{(1)}\frac{\partial P^{(2)}}{\partial y}+\zeta^{(2)}\frac{\partial P^{(1)}}{\partial y}\right\}+\ldots=0 \tag{3.5}$$

$$y\to-\infty:\ u^{(j)}\to 0, \quad v^{(j)}\to 0 \tag{3.6}$$

Решая систему уравнений (3.3) с условиями (3.4)—(3.6), получим

$$u^{(1)}=\frac{i\varkappa_1}{\varkappa}L_1^{(1)}e^{\varkappa y+i(\varkappa_1 x+\varkappa_2 z)}+\text{к. с.}, \quad v^{(1)}=L_1^{(1)}e^{\varkappa y+i(\varkappa_1 x+\varkappa_2 z)}+\text{к. с.}$$

$$\zeta^{(1)}=\zeta_1^{(1)}e^{i(\varkappa_1 x+\varkappa_2 z)}+\text{к. с.},\quad p^{(1)}=-(L_1^{(1)}-\sigma_0 \mathring{L}_1^{(1)})\frac{e^{\varkappa y+i(\varkappa_1 x+\varkappa_2 z)}}{\varkappa}+\text{к. с.}$$

$$w^{(1)}=\frac{i\varkappa_2}{\varkappa}e^{\varkappa y+i(\varkappa_1 x+\varkappa_2 z)}+\text{к. с.},\quad L_n^{(j)}\equiv\mathring{\zeta}_n^{(j)}-\sigma_0\zeta_n^{(j)} \tag{3.7}$$

где $\varkappa^2=\varkappa_1^2+\varkappa_2^2$; $\varkappa_{1,2}$ — волновое число возмущений вдоль осей x и z; $\zeta_1^{(1)}$ определяется из уравнения

$$\ddot{\zeta}_1^{(1)}-2\sigma_0\dot{\zeta}+(\omega_2^2+\sigma_0^2-\eta_0\varkappa\cos\omega t)\zeta_1^{(1)}=0,\quad \omega_2^2\equiv\varkappa^3+\varkappa \tag{3.8}$$

Это уравнение представляет собой модификацию уравнения Матье.

Учитывая периодичность по времени функции $\zeta^{(j)}$ вследствие представления (3.2), а также то, что область устойчивости плоских волн естественно ожидать вблизи границы их возникновения, будем искать решение уравнения (3.8) в виде

$$\zeta_1^{(1)}=Ae^{i^1\!/_2\omega t}+Be^{-{}^1\!/_2 i\omega t},\quad A^2=B^2 \tag{3.9}$$

откуда получаем для σ_0

$$\sigma_0^2=-(\omega_2^2+{}^1\!/_4\omega^2)+\sqrt{(\omega_2^2+{}^1\!/_4\omega^2)^2+{}^1\!/_4\eta_0^2\varkappa^2-(\omega_2^2-{}^1\!/_4\omega^2)^2} \tag{3.10}$$

При ${}^1\!/_4\eta_0^2\varkappa^2>(\omega_2^2-{}^1\!/_4\omega^2)^2$ $\sigma_0^2>0$ и волны, возникающие на поверхности жидкости, неустойчивы. При ${}^1\!/_4\eta_0^2\varkappa^2<(\omega_2^2-{}^1\!/_4\omega^2)^2$ $\sigma_0^2<0$ и решение нейтрально устойчиво. Из выражения (3.10) следует, что поверхностные волны неустойчивы, когда $k_1<\varkappa<k_2$, где k_j определяется из уравнения (2.4). При ${}^1\!/_4\eta_0^2\varkappa^2=(\omega_2^2-{}^1\!/_4\omega^2)^2$ или $\varkappa=k_j$ $\sigma_0=0$ и об устойчивости волны ничего нельзя сказать.

На фиг. 1 (кривая *3*) показано изменение величины σ_0^2 в зависимости от величины волнового числа k при $\omega=1$ и $\eta_0=0$, 1. Теперь необходимо найти поправки к декременту $\sigma^{(1)}$ и $\sigma^{(2)},\ldots$, позволяющие сделать вывод об устойчивости возникшей плоской волны малой, но конечной амплитуды. Эти поправки определяются из условий разрешимости неоднородных уравнений последовательных приближений.

Решая уравнения первого порядка по ε, получим, используя выражения (3.7) и (3.9), из (3.3)–(3.6) для $\zeta^{(2)}$ следующее:

$$\zeta^{(2)}=\zeta_1^{(2)}e^{i(\varkappa_1 x+\varkappa_2 z)}+\zeta_2^{(2)}e^{i(\varkappa_1-k)x+i\varkappa_2 z}+\zeta_3^{(2)}e^{i(\varkappa_1+k)x+i\varkappa_2 z}+\text{к.с.}$$

$$\ddot{\zeta}_1^{(2)}-2\sigma_0\dot{\zeta}_1^{(2)}+(\omega_2^2+\sigma_0^2-\eta_0\varkappa\cos\omega t)\zeta_1^{(2)}=2\sigma^{(1)}L_1^{(1)} \tag{3.11}$$

$$\ddot{\zeta}_2^{(2)}-2\sigma_0\dot{\zeta}_2^{(2)}+(m^3+m+\sigma_0^2-\eta_0 m\cos\omega t)\zeta_2^{(2)}=(k-\varkappa_1-m)\ddot{Z}_1^{(1)}\zeta_1^{(1)}+$$
$$+\left(\varkappa-m-\frac{k\varkappa_1}{\varkappa}\right)\bar{Z}_1^{(1)}(L_1^{(1)}-\sigma_0 L_1^{(1)})+\left[k-\varkappa_1+\varkappa-\frac{k\varkappa_1}{\varkappa}-m\left(1+\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\right)\right]\dot{\bar{Z}}_1^{(1)}L_1^{(1)} \tag{3.12}$$

$$\ddot{\zeta}_3^{(2)}-2\sigma_0\dot{\zeta}_3^{(2)}+(n^3+n+\sigma_0^2-\eta_0 n\cos\omega t)\zeta_3^{(2)}=(k+\varkappa_1-n)\ddot{Z}_1^{(1)}\zeta_1^{(1)}+$$
$$+\left(\varkappa-n+\frac{k\varkappa_1}{\varkappa}\right)Z_1^{(1)}(L_1^{(1)}-\sigma_0 L_1^{(1)})+\left[k+\varkappa_1+\varkappa+\frac{k\varkappa_1}{\varkappa}-n\left(1-\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\right)\right]\dot{Z}_1^{(1)}L_1^{(1)} \tag{3.13}$$

$$m^2\equiv\varkappa_2^2+(\varkappa_1-k)^2,\quad n^2\equiv\varkappa_2^2+(\varkappa_1+k)^2$$

Из условия разрешимости уравнения (3.11) имеем $\sigma^{(1)}\equiv0$, $\zeta_1^{(2)}\equiv0$.

Решая уравнения второго порядка по ε, получим из условия разрешимости уравнения для $\zeta_1^{(3)}$ следующее выражение для $\sigma^{(2)}$

$$\sigma^{(2)}=\left(\frac{2}{T}\int_0^T\zeta_1^{(1)}L_1^{(1)}dt\right)^{-1}\left\{\frac{1}{T}\int_0^T\left[\zeta_1^{(1)}(\varkappa-\varkappa_1)Z_1^{(1)}\zeta_2^{(2)}+\right.\right. \tag{3.14}$$

$$+\zeta_1^{(1)}(\varkappa+\varkappa_1)\ddot{\bar{Z}}_1^{(1)}\zeta_3^{(2)}-\eta^{(2)}\varkappa(\zeta_1^{(1)})^2\cos\omega t+\varkappa_1\zeta_1^{(1)}\dot{\bar{Z}}_1^{(1)}L_3^{(2)}-$$

$$-\varkappa_1\zeta_1^{(1)}\dot{Z}_1^{(1)}L_2^{(2)}+\frac{k\varkappa_1}{\varkappa}(Z_1^{(1)}(\dot{M}-\sigma_0M)-(\dot{H}-\sigma_0H)\bar{Z}_1^{(1)})\zeta_1^{(1)}+$$

$$+\left(\frac{\varkappa^2(k+\varkappa_1)-nk\varkappa_1}{\varkappa}\dot{\bar{Z}}_1^{(1)}H-\frac{\varkappa^2(k-\varkappa_1)+mk\varkappa_1}{\varkappa}\dot{Z}_1^{(1)}M\right)\zeta_1^{(1)}+$$

$$\left.\left.+(\varkappa+k)(Z_1^{(1)}\dot{\bar{Z}}_1^{(1)}(\varkappa+\varkappa_1)+(\varkappa-\varkappa_1)\bar{Z}_1^{(1)}\dot{Z}_1^{(1)})\zeta_1^{(1)}L_1^{(1)}\right]dt\right\}$$

$$M\equiv L_2^{(2)}-(k-\varkappa_1)\dot{\bar{Z}}_1^{(1)}\zeta_1^{(1)}-\left(\varkappa-\frac{k\varkappa_1}{\varkappa}\right)\bar{Z}_1^{(1)}L_1^{(1)}$$

$$H\equiv L_3^{(2)}-(k+\varkappa_1)\dot{Z}_1^{(1)}\zeta_1^{(1)}-\left(\varkappa+\frac{k\varkappa_1}{\varkappa}\right)Z_1^{(1)}L_1^{(1)}$$

Подставляя выражения для $Z_1^{(1)}$ и $\zeta_1^{(1)}$ из (2.2) и (3.9) и пренебрегая членами порядка $\eta_0\zeta_{2,3}^{(2)}$, получим

$$\zeta_2^{(2)}=C_1+iC_2+d_1(Abe^{i\omega t}+aBe^{-i\omega t})+id_2(Abe^{i\omega t}-aBe^{-i\omega t})+$$
$$+f_1(\sin t(m^3+m)^{1/2},\ \cos t(m^3+m)^{1/2})$$

$$\zeta_3^{(2)}=C_3+iC_4+d_3(aAe^{i\omega t}+bBe^{-i\omega t})+id_4(aAe^{i\omega t}-bBe^{-i\omega t})+$$
$$+f_2(\sin t(n^3+n)^{1/2},\ \cos t(n^3+n)^{1/2}) \tag{3.15}$$

где C_j и d_j ($j=1-4$) найдем из (3.12) и (3.13) при подстановке в них выражений (3.15), а $f_{1,2}$ найдем из условия $\zeta_{3,2}^{(2)}(0)=0$. В целях сокращения объема выражения для C_j, d_j и $f_{1,2}$ не выписываются. Кроме того, $f_{1,2}$ не вносят вклада в $\sigma^{(2)}$, поскольку при усреднении обращаются в нуль.

Подставляя в выражение (3.14) для $\sigma^{(2)}$ выражения для $\zeta_1^{(1)}$, $\zeta_{2,3}^{(2)}$ и $Z_1^{(1)}$ из (3.9), (3.15) и (2.2), получим

$$\sigma^{(2)}=\frac{(abA+a^2B)}{8B\sigma_0}\left[\varkappa\omega^2(c_1+c_3)+\varkappa_1\left(\omega^2+\frac{4\sigma_0^2k}{\varkappa}\right)(c_3-c_1)-\frac{8\sigma_0^2k^2\varkappa_1^2}{\varkappa^2}\right]+$$

$$+\frac{a^2\omega^2}{8\sigma_0}\left[\varkappa(d_1+d_3)-\varkappa_1(d_3-d_1)+\frac{2\sigma_0\varkappa_1}{\omega}(d_4-d_2)\right]+\frac{\varkappa A\eta^{(2)}}{4B\sigma_0}-$$

$$-\frac{\varkappa_1\omega}{4B}(a^2B-abA)(c_4-c_2)-\frac{abA(\varkappa+k)\omega^2\varkappa_1}{4B\sigma_0}-$$

$$-a^2k\frac{\varkappa_1}{\varkappa}\omega\left[d_2-d_4+\frac{(\sigma_0^2-\omega^2)}{2\omega\sigma_0}(d_1-d_3)-\frac{\omega(\varkappa+k)\varkappa_1}{2\varkappa\sigma_0}+\frac{\sigma_0k\varkappa_1}{\varkappa\omega}\right]-$$

$$-\frac{a^2\omega}{4\sigma_0}\left\{\frac{[\varkappa^2(\varkappa_1+k)-nk\varkappa_1]}{n\varkappa}\left[\omega d_3-\sigma_0d_4-\frac{\omega(\varkappa+k)(\varkappa_1+\varkappa)}{2\varkappa}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{[\varkappa^2(k-\varkappa_1)+mk\varkappa_1]}{m\varkappa}\left[\omega d_1-\sigma_0d_2-\frac{\omega(\varkappa+k)(\varkappa-\varkappa_1)}{2\varkappa}\right]\right\}-$$

$$-\frac{\omega(a^2B-abA)}{4B\sigma_0}\left\{\frac{[\varkappa^2(\varkappa_1+k)-nk\varkappa_1]}{n\varkappa}\left[\sigma_0c_4+\frac{\omega(\varkappa-\varkappa_1)(\varkappa-k)}{2\varkappa}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{[\varkappa^2(k-\varkappa_1)+mk\varkappa_1]}{m\varkappa}\left[\sigma_0c_2+\frac{\omega(\varkappa+\varkappa_1)(\varkappa-k)}{2\varkappa}\right]\right\}$$

$$c_1\equiv\frac{C_1}{aA+bB},\quad c_2\equiv\frac{C_2}{aA-bB},\quad c_3\equiv\frac{C_3}{bA+aB},\quad c_4\equiv\frac{C_4}{bA-aB}$$

Для определения устойчивости или неустойчивости решения необходимо определить знак выражения $\sigma=\sigma_0+(\eta-\eta_0)\sigma^{(2)}/\eta^{(2)}$. При $\sigma>0$ решение устойчиво, а при $\sigma<0$ решение неустойчиво. Расчет показывает, что в случае малых η параметрически возбужденные плоские поверхностные волны неустойчивы, поскольку возмущения с волновым числом $\varkappa$ из интервала $k_1\leqslant\varkappa\leqslant k_2$ неограниченно нарастают, так как для них $\sigma<0$. Однако в многочисленных экспериментах по параметрическому возбуждению поверхностных волн наблюдаются и плоские волны [8—10]. Возможно, их существование обусловлено конечной вязкостью или конечным значением амплитуды возбуждения, либо же специфической симметрией области (сосуда, содержащего жидкость).

В заключение автор благодарит В. А. Брискмана за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также А. А. Непомнящего — за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.— Л.: Гостехиздат, 1944. 624 с.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1967. 299 с.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. § 17. М.: Наука, 1974. 503 с.
4. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегродифференциальных уравнений. Гл. 4. Ташкент: Фан, 1974. 216 с.
5. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. Гл. 3. М.: Мир, 1972. 274 с.
6. *Schlüter A., Lortz D., Busse F.* On the stability of steady finite amplitude convection.— J. Fluid Mech., 1965, v. 23, № 1, p. 129—144.
7. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. Гл. 5. М.: Наука, 1972. 392 с.
8. *Сорокин В. И.* Об эффекте фонтанирования капель с поверхности вертикально колеблющейся жидкости.— Акуст. ж., 1957, т. 3, вып. 3, с. 262—273.
9. *Brand R. P., Nyborg W. L.* Parametrically excited surface waves.— J. Acoust. Soc. Amer., 1965, v. 37, № 3, p. 509—515.
10. *Секерж-Зенькович С. Я., Калиниченко В. А.* О возбуждении внутренних волн в двухслойной жидкости вертикальными колебаниями.— Докл. АН СССР, 1979, т. 249, вып. 4, с. 797—799.

Пермь

Поступила в редакцию
21.IV.1980