

УДК 532.546

## РАСЧЕТ ДВУМЕРНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПРИМЕСИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА

БАСАНСКИЙ Е. Г., КОЛОБАШКИН В. М., КУДРЯШОВ Н. А.

В работе рассматривается двумерная задача о течении содержащего примесь газа через пористую среду. В начальный момент времени содержащий равномерно распределенную примесь газ при высоком давлении находится в сферической полости, расположенной в пористой среде на некотором расстоянии от плоской поверхности. Предполагается, что при  $t > 0$  движение газа-носителя описывается системой уравнений фильтрации, а распространение примеси — уравнениями конвективной диффузии и неравновесной адсорбции. Обсуждается численная методика решения задачи. Приводятся некоторые результаты расчета. Анализируется влияние плоской поверхности на фильтрацию газа и распространение примеси.

При решении ряда научно-технических вопросов (разделение смесей газов хроматографическими методами [1], исследование подземных течений методами введения радиоактивных индикаторов [2], интенсификация добычи нефти и газа [3–5], анализ миграции радионуклидов из мест захоронения отходов ядерной энергетики и т. д.) возникает задача о распространении примеси через пористую среду в потоке фильтрующегося газа или жидкости.

Исследование распространения примеси через пористую среду при фильтрации газа-носителя проводилось в ряде работ (см., например, [6–19]).

Постановка и решение одномерных задач о движении примеси с учетом конвективной диффузии и неравновесной адсорбции приведены в [6–10]. Движение смеси газов при различных изотермах сорбции изучалось в [11–14]. Численное моделирование распространения примеси в грунтовых водах проводилось в [15–18]. Результаты расчета одномерного движения радионуклидов в фильтрующемся из сферической полости газе приводятся в [19].

**1. Постановка задачи.** Пусть в начальный момент времени  $t=0$  в сферической полости, расположенной на расстоянии  $H$  от плоской поверхности, находится газ с примесью при давлении  $P_1 > P_0$  ( $P_0$  — давление газа в пористой среде в начальный момент времени). Рассмотрим движение газа при  $t > 0$ . Предположим, что течение газа через пористую среду описывается следующей системой уравнений:

$$m \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.1)$$

$$\mathbf{v} = - \frac{k}{\mu} \operatorname{grad} P \quad (1.2)$$

$$P = A \rho T, \quad T = T(\mathbf{r}) \quad (1.3)$$

Здесь  $P(\mathbf{r}, t)$  — давление,  $\rho(\mathbf{r}, t)$  — плотность,  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  — скорость,  $T(\mathbf{r})$  — температура фильтрующегося газа;  $m$  — пористость,  $k$  — проницаемость среды,  $\mu$  — вязкость газа.

В (1.1)–(1.3) принято, что уравнение движения газа в пористой среде определяется законом Дарси [20, 21]. Давление, плотность и температура газа связаны уравнением состояния идеального газа. В (1.3) учтено, что из-за малой теплоемкости газа по сравнению с теплоемкостью пористой

среды фильтрация газа происходит в поле заданной температуры [22].

Система уравнений распространения примеси через пористую среду с учетом процессов конвективной диффузии и неравновесной адсорбции имеет вид [8, 9]

$$\frac{\partial (a+c)}{\partial t} = \operatorname{div}(D \operatorname{grad} c - vc) \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta(c - \gamma a) \quad (1.5)$$

Здесь  $c(r, t)$  — концентрации газовой примеси в потоке,  $a(r, t)$  — количество адсорбированной примеси в единице объема пористой среды,  $D$  — коэффициент конвективной диффузии,  $\beta$  — кинетический коэффициент массообмена,  $\gamma$  — коэффициент, обратный коэффициенту Генри.

В (1.5) принято, что изотермой сорбции является изотерма Генри, что справедливо при малой концентрации примеси в потоке.

Величина коэффициента конвективной диффузии зависит от скорости фильтрующегося газа и свойств пористой среды [23–26]. Для однородной и изотропной пористой среды коэффициент конвективной диффузии определяется зависимостью [24, 25]

$$D = D_0 [E^{-1} + \varphi(vD_0^{-1}d)^n] \quad (1.6)$$

Здесь  $D_0$  — коэффициент молекулярной диффузии,  $d$  — средний размер зерен пористой среды,  $v$  — скорость фильтрующегося газа,  $E$  — коэффициент извилистости для среды,  $\varphi$  и  $n$  — коэффициенты, зависящие от характера пористой среды.

В [24, 25] отмечается резкое количественное расхождение зависимостей (1.6) для жидкости и газа. Однако, как показано В. Н. Николаевским, это расхождение устраняется, если строить зависимость коэффициента конвективной диффузии не от числа Пекле, а от числа Рейнольдса, поскольку при этом учитывается изменение чисел Прандтля.

Величина кинетического коэффициента массообмена определяется из критериального уравнения [19, 27]

$$\operatorname{Nu} = A \operatorname{Re}^m \operatorname{Pr}^\kappa \quad (1.7)$$

Здесь  $\operatorname{Nu} = \beta d^2 D_0$  — число Нуссельта,  $\operatorname{Pr} = \eta D_0^{-1}$  — диффузионный критерий Прандтля,  $\operatorname{Re} = v d \eta^{-1}$  — число Рейнольдса;  $A$ ,  $m$ ,  $\kappa$  — постоянные.

Используя (1.7) для частиц пористой среды произвольных размеров [19, 27], получаем

$$\beta = 0,1 v D_0 (\eta d)^{-1} \quad (1.8)$$

Начальные и граничные условия для фильтрационной задачи (1.1)–(1.3) запишем в виде

$$P(r, t=0) = \begin{cases} P_1, & r \leq R \\ P_0, & r > R \end{cases} \quad (1.9)$$

$$P(r \in \Gamma, t) = P_0, \quad P(R, t > 0) = p(t) \quad (1.10)$$

В (1.9)–(1.10)  $R$  — радиус сферической полости,  $\Gamma$  — плоская поверхность.

Давление в сферической полости изменяется из-за утечки газа

$$\frac{dp}{dt} = -3vpR^{-1}, \quad p(t=0) = P_1 \quad (1.11)$$

В начальный момент примеси в пористой среде нет, поэтому

$$c(r, t=0) = a(r, t=0) = 0. \quad (1.12)$$

Граничные условия для системы уравнений (1.4)–(1.5) имеют вид

$$c(R, t) = \varphi(t), \quad c(r \in \Gamma, t) = 0. \quad (1.13)$$

Здесь  $\varphi(t)$  определяется из решения обыкновенного дифференциального уравнения, учитывающего утечку примеси из сферической полости аналогично (1.11). В начальный момент времени  $\varphi(t=0) = \varphi_0$  ( $\varphi_0$  – концентрация примеси в сферической полости при  $t=0$ ).

**2. Метод решения.** Для однородной и изотропной пористой среды задача имеет аксиальную симметрию. Используя сферическую систему координат с началом отсчета в центре полости, уравнения (1.1)–(1.2), (1.4)–(1.5) запишем в безразмерном виде

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{T}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 P T^{-1} \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( P r \sin \theta \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \quad (2.1)$$

$$v_r = -\frac{\partial P}{\partial r}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta}, \quad T = T(r) \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + v_r \frac{\partial c}{\partial r} + v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta} + c \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \beta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) \right] - \beta \gamma a = \\ = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 D_r \frac{\partial c}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( D_\theta \sin \theta \frac{\partial c}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta(c - \gamma a) \quad (2.4)$$

В (2.1)–(2.4) введены следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned} P = \frac{P}{P_0}, \quad r = \frac{r}{H}, \quad v_0 = \frac{kP_0}{\mu H}, \quad v_r = \frac{v_r}{v_0}, \quad v_\theta = \frac{v_\theta}{v_0}, \\ t = \frac{tmkP_0}{\mu H^2}, \quad \rho_0 = \frac{P_0}{AT_0}, \quad \rho = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad t^* = \frac{H}{mv_0}, \quad c = \frac{c}{\rho_0}, \\ a = \frac{a}{\rho_0}, \quad \beta = \frac{\beta mkP_0}{\mu H^2}, \quad D_r = \frac{D_r t^*}{H^2}, \quad D_\theta = \frac{D_\theta t^*}{H^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Начальные и граничные условия (1.9)–(1.13) для системы уравнений (2.1)–(2.4) изменяются с учетом безразмерных переменных и параметров (2.5).

Решение системы уравнений (2.1)–(2.4) с условиями (1.9)–(1.13) проводилось численно, с помощью ЭВМ. С этой целью дифференциальные операторы в (2.1)–(2.4) аппроксимировались разностными с точностью  $O(h_r^2 + h_\theta^2 + \tau)$  ( $h_r$  – шаг по координате  $r$ ,  $h_\theta$  – шаг по углу,  $\tau$  – шаг по времени). Для численной реализации использовался метод переменных направлений [28]. При этом применялась неявная продольно-поперечная схема, в которой вводились  $P(r_k, \theta_l, t_n)$ ,  $c(r_k, \theta_l, t_n)$  и  $P(r_k, \theta_l, t_n + 0,5\tau)$ ,  $c(r_k, \theta_l, t_n + 0,5\tau)$ . Переход от временного слоя к следующему совершался в два этапа с шагами  $0,5\tau$ . Разностные краевые задачи решались методом прогонки [28]. Поскольку уравнение для давления газа в пористой среде – нелинейное, то при его решении на каждом временном слое проводились итерации. Хорошая точность достигалась уже при трех – четырех итерациях.

Компоненты вектора скорости фильтрации определялись из разностного аналога уравнения Дарси (2.2).

Для решения уравнения кинетики адсорбции (2.4) использовалась неявная разностная схема Эйлера [29].

При численном решении уравнений (2.3)–(2.4) с начальными и граничными условиями (1.12)–(1.13) на каждом временном слое использовались значения скорости движения газа, полученные из решения фильтрационной задачи.

**3. Результаты и их обсуждение.** Рассмотрим фильтрацию газа, содержащего примесь ксенона-135.

При расчетах принимались следующие значения параметров задачи:  $P_1=100$ ;  $P_0=1$ ;  $m=0,1$ ;  $k=10^{-12}$  м<sup>2</sup>,  $\mu=0,25 \cdot 10^{-4}$  н·с/м<sup>2</sup>.

В результате численного решения фильтрационной задачи получены значения давления и скорости движения газа в пористой среде в зависимости от пространственных и временных переменных.

Проведенные численные расчеты задачи о течении газа через пористую среду показали, что при указанных выше параметрах до момента времени  $t_0=40$  мин результаты почти не отличаются от сферически-симметричного случая. Момент времени  $t_0$  принимался за время выхода газа на поверхность. Зависимости давления и скорости движения газа в пористой среде на этом отрезке времени согласуются с результатами, приведенными в [30, 31]. Зависимости плотности ксенона-135 в потоке газа и в порах среды соответствуют рассчитанным в работе [19]. До момента времени  $t=t_0$ , при расчетах движения газа можно пользоваться одномерной методикой, принимая угловые составляющие скорости фильтрации газа равными нулю, а давление и радиальные составляющие скорости зависящими лишь от расстояния и времени.

В данной работе давление газа на плоской поверхности предполагалось постоянным и не зависящим от времени. Такое условие реализуется при малости динамического давления газа по сравнению со статическим, что справедливо при фильтрационных скоростях течения. Кроме того, движение газа выше плоской границы описывается газодинамической системой уравнений и поэтому релаксация характеристик газа происходит со звуковыми скоростями.

При  $t > t_0$  из-за постоянного давления на границе происходит увеличение скорости движения газа в направлении нормали. Вблизи поверхности пористой среды существенные изменения претерпевают как радиальные, так и угловые составляющие скорости фильтрационного течения. Из-за аксиальной симметрии задачи при  $\theta=0$  угловая составляющая скорости равна нулю. Положение максимума тангенциальной составляющей скорости зависит от расстояния  $H$ .

Процесс конвективной диффузии приводит к размытию концентрации примеси. Максимальное диффузионное размытие наблюдается в области резкого изменения давления газа-носителя. Влияние конвективной диффузии зависит также от расстояния, на котором измеряется концентрация примеси.

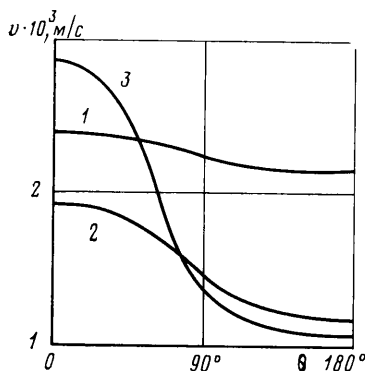
В системе уравнений (1.4)–(1.5), которой описывается распространение примеси через пористую среду, процесс адсорбции характеризуется двумя параметрами: кинетическим коэффициентом массообмена и коэффициентом Генри. Величина кинетического коэффициента адсорбции изменяется в зависимости от фильтрационной скорости движения от 0 до  $10^{-3}$  с<sup>-1</sup>. При  $\beta t^0 \gg 1$  ( $t^0$  — характерное время рассматриваемого процесса) кинетику адсорбции примеси можно не учитывать и считать, что установление равновесия между концентрациями примеси в газовой и конденсированной фазах происходит мгновенно. Однако для характерных параметров настоящей задачи выполняется неравенство  $\beta t^0 \ll 1$ .

Численное моделирование переноса примеси через пористую среду под действием избыточного давления газа показало существенное влияние конвективной диффузии и адсорбции на распределение примеси.

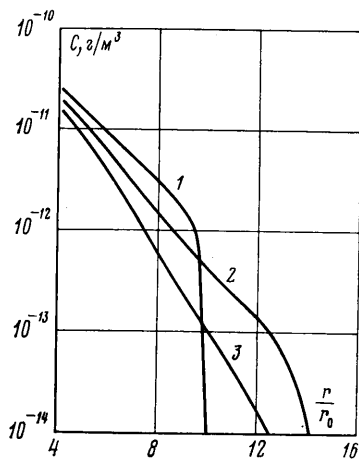
Влияние плоской поверхности на характеристики фильтрующегося газа и примеси определяется расстоянием от центра сферической полости до поверхности  $H$ . При  $H \sim R$  влияние существенно, при  $H/R \gg 1$  пренебрежимо мало.

Некоторые особенности двумерного распространения примеси при нестационарной фильтрации газа из сферической полости иллюстрируются графически на фиг. 1–4.

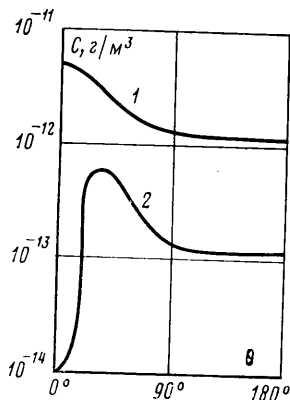
На фиг. 1 показана зависимость скорости фильтрации газа от угла для различных расстояний от сферической полости (кривая 1 –  $r=0,1 H$ , кривая 2 –  $r=0,5 H$ , кривая 3 –  $r=0,9 H$ ) в момент времени  $t=120$  мин.



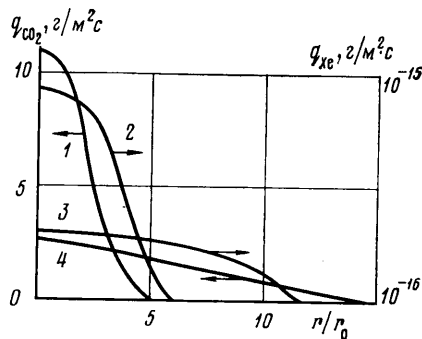
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Из фигуры видно: вблизи сферической полости влияние плоской поверхности на скорость движения газа (кривая 1) мало, вблизи плоской поверхности (кривая 3) – существенно.

На фиг. 2 представлена зависимость концентрации ксенона-135 в фильтрационном потоке от расстояния для углов  $\theta=0$  (кривая 1),  $\theta=\pi/3$  (кривая 2),  $\theta=\pi$  (кривая 3). Заметное уменьшение примеси при  $\theta=0$  объясняется влиянием граничного условия для примеси на плоской поверхности.

Фигура 3 иллюстрирует зависимость концентрации ксенона-135 в фильтрационном потоке от угла при  $r=0,5 H$  (кривая 1) и  $r=0,9 H$  (кривая 2).

На фиг. 4 показано распределение потоков газа и примеси ксенона-135, выходящих через плоскую поверхность пористой среды при  $t=80$  мин (кри-

вые 1 и 2) и при  $t=280$  мин (кривые 3, 4). Приведенные зависимости имеют разный масштаб. Если не учитывать процесс конвективной диффузии ( $D=0$ ) и адсорбции ( $\beta=\gamma=0$ ) на распределение примеси ксенона-135, то указанные зависимости будут подобными.

Расчет движения примеси под действием избыточного давления газов, фильтрующихся из сферической полости, можно проводить с учетом зависимости фильтрационных характеристик от  $r$  и  $\theta$ , а также при других геометриях полости и поверхности.

Авторы благодарят В. Н. Николаевского за замечания, которые позволили значительно улучшить работу.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рачинский В. В. Введение в общую теорию динамики сорбции и хроматографии. М.: Наука, 1964. 135 с.
2. Iwai S., Inoue J. A method for estimation of groundwater stratification.— In: Radioisotopes in Hydrology. Proc. Sympos. Tokio, 1963, Vienna, IAEA, 1963.
3. Израэль Ю. А. Мирные ядерные взрывы и окружающая среда. Л.: Гидрометеоиздат, 1974. 135 с.
4. Кедровский О. Л. Применение камуфлетных ядерных взрывов в промышленности. Peaceful Nuclear Explosions. Proc. of Pannel Vienna.— IAEA, PL-388/20, 2–6 march, 1970.
5. Соколовский Э. В. Применение радиоактивных изотопов для контроля за разработкой нефтяных месторождений. М.: Недра, 1968. 180 с.
6. Николаевский В. Н. Конвективная диффузия в пористых средах.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 6, с. 1042–1050.
7. Николаевский В. Н., Бондарев Э. А., Миркин М. И., Степанова Г. С., Терзи В. П. Движение углеводородных смесей в пористой среде. М.: Недра, 1968. 190 с.
8. Бондарев Э. А., Николаевский В. Н. Конвективная диффузия в пористых средах с учетом явления адсорбции.— ПМТФ, 1965, № 5.
9. Бондаренко А. Г., Колобашкин В. М., Кудряшов Н. А. Диффузия и адсорбция радиоактивного газа в пористой среде.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 5, с. 85–90.
10. Кудряшов Н. А., Басанский Е. Г., Бондаренко А. Г. Влияние диффузии и сорбции на распределение радиоактивного газа в пористой среде.— Инж.-физ. ж., 1978, т. 34, № 1, с. 132–137.
11. Бондаренко А. Г., Колобашкин В. М., Кудряшов Н. А. Распространение радионуклидов в пористой среде с учетом сорбции и диффузии.— Инж.-физ. ж., 1976, т. 31, № 6, с. 1100–1104.
12. Цабек Л. К. Интегрирование квазилинейных уравнений движения смеси через пористую недеформируемую среду.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 2, с. 46–52.
13. Цабек Л. К. Движение неизотермической многокомпонентной сорбируемой смеси в пористой среде.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 3, с. 155–158.
14. Цабек Л. К. Динамика сорбции в изотермическом и неизотермическом случаях при больших значениях концентраций компонентов смеси.— Ж. физ. химии, 1980, т. 54, № 9, с. 2180–2202.
15. Picken J. F., Lennox W. C. Numerical simulation of waste movement in steady ground: water flow systems.— Water Resour. Res., 1976, v. 12, № 2, p. 171–180.
16. Cabrera Guillermo, Marino Miguele. A finite element model of contaminant movement in groundwater.— Water Resour. Bull., 1976, v. 12, № 2, p. 317–335.
17. Лаврик В. И., Рудченко П. А. Постановка и решение задач о диффузии растворимых веществ при фильтрации грунтовых вод.— В кн.: Краевые задачи подземной гидродинамики. Киев, 1976, с. 42–57.
18. Shen Hung Tao, Asce A. M. Transient dispersion in uniform porous media flow.— J. Hydraul. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 1976, v. 102, № 6, p. 707–716.
19. Басанский Е. Г., Колобашкин В. М., Кудряшов Н. А. Распространение радионуклидов через раздробленную породу под действием избыточного давления продуктов взрыва.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 2, с. 62–69.
20. Полубарина-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
21. Голубева О. В. Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа, 1972. 368 с.
22. Бондаренко А. Г., Кудряшов Н. А. Расчет термодинамических функций газового потока при фильтрации через пористые среды.— В кн.: Экспериментальные методы ядерной физики. М., 1978, вып. 4, с. 139–144.
23. Blackwell R. I., Raupе I. R., Terry W. W. Factors influencing the efficiency of miscible displacement.— Trans. AIME, 1959, v. 216.
24. Бузинов С. Н., Пешкин М. А. О коэффициенте дисперсии при вытеснении из пористой среды газа газом.— ПМТФ, 1975, № 4, с. 142–145.

25. Бузинов С. Н., Пешкин М. А. Некоторые экспериментальные данные о вытеснении газа газом из пористой среды.— Изв. АН СССР. МЖТ, 1974, № 4, с. 164—168.
26. Harleman D. R. F., Mehlhorn P. F., Rumer R. R., Jr. Dispersion-permeability correlation in porous media.— Proc. Amer. Soc. Civil. Engrs J. Hydr. Div., 1963, v. 89, № 2, pt 1, p. 67—85.
27. Тимофеев Д. П. Кинетика адсорбции. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 252 с.
28. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1973. 352 с.
29. Годунов С. К., Рябенкий В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977. 439 с.
30. Адушкин В. В., Каазик П. Б. Расчет выхода газообразных продуктов подземного взрыва в атмосферу.— ПМТФ, 1976, № 1, с. 111—120.
31. Morrison F. A., Jr. Transient gas flow in a porous column.— Ind. and Eng. Chem. Fundam., 1972, v. 11, № 2, p. 191—197.

Москва

Поступила в редакцию  
4.III.1981