

УДК 532.527

КРУПНОМАСШТАБНАЯ СТРУКТУРА ЯДРА СПИРАЛЬНОГО РАЗРЫВА В ЖИДКОСТИ

БЕТЯЕВ С. К., ГАЙФУЛЛИН А. М.

Незамкнутые вихревые пелены, образующиеся при отрыве потока от тела при $R \rightarrow \infty$, имеют свободные концы, которые обычно свернуты в спираль. Мелкомасштабная структура ядра такого вихреобразования включает диффундирующий с течением времени объемный вихрь [1]. В масштабах больших, чем характерный размер вязкой области, структура ядра, имеющего бесконечное число спиральных витков, описывается с помощью уравнений Эйлера.

Считается, что асимптотическое решение задачи на малых расстояниях от центра ядра автомодельно, хотя детали выхода течения на автомодельный режим в общем случае нестационарного отрыва остаются невыясненными. Форма плоской вихревой пелены различна в зависимости от показателя автомодельности n : логарифмическая спираль при $n < 0,5$ и алгебраическая спираль при $n > 0,5$. Решение задачи о течении в ядре логарифмической спирали было получено Прандтлем [2]. Допущенная им арифметическая ошибка была исправлена в работе [3]. Течение в ядре алгебраической спирали построено в работах [4–6]. В случае $n \rightarrow 0,5$ витки спирали освобождаются от циркуляции, которая сосредоточивается в центре спирали, — в пределе $n = 0,5$ вся вихревая пелена может быть заменена¹ точечным вихрем [7, 8].

Интерес к исследованию структуры ядра спирального разрыва не ослабевает ввиду продолжающихся попыток теоретического объяснения явления распада вихря [9].

В работе предложен единый метод решения задачи и рассмотрено три конкретных примера. Первые два примера посвящены исследованию влияния завихренности на течение в ядре логарифмической и алгебраической вихревых пелен. В реальном течении поток будет завихренным либо потому, что невозмущенное течение было неоднородным, либо вследствие отрыва пограничных или энтропийных слоев.

Третий пример посвящен исследованию течения в ядре спиральной свободной границы. С помощью полученного точного обобщенного решения доказано существование течения со свободной границей в форме спирали с бесконечным числом витков. Такое течение должно наблюдаться при погружении тел в воду, при нестационарном глассировании, при нестационарном истечении жидкости в воздушное пространство через насадок или щель с острыми кромками и т. д.

Единый для всех примеров метод решения задачи заключается в преобразовании особой точки — центра вихреобразования — в конечный отрезок особой линии и в построении координатного разложения в окрестности этого отрезка.

1. Рассмотрим плоское автомодельное течение. Центр спирали, в окрестности которого ищется решение, поместим в начало полярных координат r_1, θ . Функцию тока ψ_1 , завихренность ω_1 и давление p_1 представим в виде:

$$\psi_1(r_1, \theta, t) = a^2 t^{2n-1} \psi(r, \theta), \quad \omega_1(r_1, \theta, t) = \frac{1}{t} \omega(r, \theta) \quad (1.1)$$

$$p_1(r_1, \theta, t) = \rho a^2 t^{2(n-1)} p(r, \theta)$$

где $r_1 = at^n r$, t — время ($0 \leq t \leq \infty$), ρ — плотность жидкости, a — постоянная, определяющая кинематическую размерность задачи. Циркуляция и потенциал скорости обезразмериваются так же, как функция тока ψ_1 .

¹ Такая замена не всегда возможна. Например, не существуют решения следующих плоских автомодельных задач с двумя симметричными точечными вихрями ($n=0,5$): истечение через расширяющуюся диафрагму и течение в диффузоре.

За возникновение отрыва и непотенциальный характер течения могут быть ответственны силы вязкости, сравнимые с инерциальными при $t \sim t_0 = (\nu/a^2)^{1/(2n-1)}$, где ν — кинематический коэффициент вязкости. Для значений $n > 0,5$ влияние вязкости мало при $t \gg t_0$, для значений $n < 0,5$ — при $t \ll t_0$, для значений $n = 0,5$ — при $R = (\nu/a^2)^{-1} \rightarrow \infty$.

Автомодельное решение (1.1) при $n < 0,5$ нереально, так как в начальный момент времени $t = 0$ циркуляция равна бесконечности. Поэтому Прандтль [2] в этом случае рассмотрел автомодельные течения с «отрицательным временем» ($-\infty \leq t \leq 0$)

$$\psi_1(r_1, \theta, t) = a^2 (-t)^{2n-1} \psi(r, \theta), \quad r_1 = a(-t)^n r \quad (1.2)$$

Случай $0 < n < 0,5$ соответствует схлопыванию вихревых пелен, случай $n < 0$ соответствует обтеканию тел, расширяющихся по обратному степенному закону в зависимости от времени, случай $n = 0$ соответствует обтеканию ускоренным потоком жидкости тела неизменной формы с неизменными по форме вихревыми пеленами.

В рассматриваемой постановке задачи представление (1.2) сводится к (1.1) с помощью формальной замены $t \rightarrow -t$, $\psi \rightarrow -\psi$, $\omega \rightarrow -\omega$. Поэтому ограничимся изучением решения (1.1) во всем диапазоне значений показателя автомодельности n . Подставляя значение $\omega_1 = -\Delta\psi_1$ в уравнение Гельмгольца $d\omega_1/dt = 0$ и переходя к автомодельным переменным, получим уравнение для определения безразмерной функции тока ψ

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - nr \right) \frac{\partial \Delta \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \theta} = \Delta \psi \quad (1.3)$$

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

В случае безвихревого течения ($\Delta\psi = 0$) вместо искомой функции ψ удобно воспользоваться безразмерным потенциалом ϕ , удовлетворяющим уравнению Лапласа

$$\Delta \phi = 0 \quad (1.4)$$

Переходим к постановке граничных условий. На вихревой пелене $\theta = \theta_1(r)$ нормальная производная от функции тока терпит разрыв. Нормальная к пелене скорость жидкости с обеих ее сторон равна скорости перемещения вихревой пелены. Следовательно, при $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_1 + 2\pi$ имеем

$$\frac{d\theta_1}{dr} \left(nr^2 - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad (1.5)$$

Кроме того, на вихревой пелене непрерывно давление

$$p(r, \theta_1) = p(r, \theta_1 + 2\pi) \quad (1.6)$$

Свободная граница состоит из двух спиралей $\theta = \theta_1(r)$ и $\theta = \theta_2(r)$, которые на фиг. 1 обозначены цифрами 1 и 2. Нормальная к свободной границе скорость жидкости также равна скорости перемещения свободной границы. Ограничиваясь в данном случае рассмотрением потенциальных течений, получим граничные условия при $\theta = \theta_{1,2}$ в виде

$$r^2 \frac{d\theta_{1,2}}{dr} \left[nr - \frac{\partial \phi(r, \theta_{1,2})}{\partial r} \right] + \frac{\partial \phi(r, \theta_{1,2})}{\partial \theta} = 0 \quad (1.7)$$

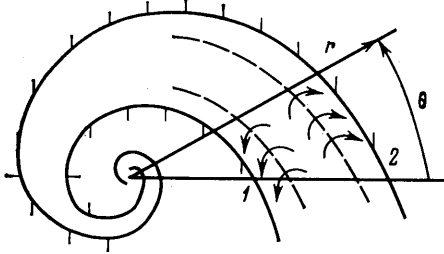
На свободной границе давление постоянно. Воспользовавшись интегра-

лом Бернулли для нестационарных течений, положим, не теряя общности, входящую в него постоянную равной нулю

$$2(2n-1)\varphi(r, \theta_{1,2}) - 2nr \frac{\partial \varphi(r, \theta_{1,2})}{\partial r} + \left[\frac{\partial \varphi(r, \theta_{1,2})}{\partial r} \right]^2 + \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial \varphi(r, \theta_{1,2})}{\partial \theta} \right]^2 = 0 \quad (1.8)$$

Итак, асимптотическое решение ($r \rightarrow 0, \theta \rightarrow \infty$) уравнения для вихревой пелены (1.3) будем искать с граничными условиями (1.5)–(1.6), а асимптотическое решение уравнения для свободной границы (1.4) – с условиями (1.7)–(1.8).

Если вместо независимых переменных r, θ ввести новые переменные r и $\eta = \theta - \theta_1(r)$, то область, в которой ищется решение, будет полуполосой:



Фиг. 1

$r \geq 0, 0 \leq \eta \leq \eta_0$. При этом линии $r = \text{const}$ в физической плоскости соответствует переход от одного (берега) разреза к другому по окружности. В предположении, что функции $|\theta_1'(r)|$ и $|\theta_2'(r)|$ монотонно возрастают с уменьшением r , точка пересечения окружности с линиями (линией) тангенциального разрыва будет единственной.

Уравнение Гельмгольца в новых координатах преобразуется к виду

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - nr \right) \frac{\partial \Delta \psi}{\partial r} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - nr \theta_1' \right) \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \eta} = \Delta \psi \quad (1.9)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2\theta_1' \frac{\partial^2}{\partial r \partial \eta} + \left[(\theta_1')^2 + \frac{1}{r^2} \right] \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \left(\theta_1'' + \frac{1}{r} \theta_1' \right) \frac{\partial}{\partial \eta}$$

Граничные условия (1.5) ставятся при $\eta = 0$ и $\eta = \eta_0 = 2\pi$

$$\frac{\partial \psi(r, 0)}{\partial r} = nr^2 \theta_1', \quad \frac{\partial \psi(r, 2\pi)}{\partial r} = nr^2 \theta_1'$$

Если функция $\theta_1'(r)$ известна, то эти условия могут быть проинтегрированы

$$\psi(r, 0) = n \int_0^r r^2 \theta_1' dr, \quad \psi(r, 2\pi) = n \int_0^r r^2 \theta_1' dr \quad (1.10)$$

Одинаковые значения функции тока на разных берегах разреза свидетельствуют об отсутствии источника в центре спирали.

Вместо условия (1.6) получим

$$p(r, 0) = p(r, 2\pi) \quad (1.11)$$

Оператор Лапласа в уравнении (1.4) имеет вид (1.9). Граничные условия (1.7) преобразуются в следующие:

$$\begin{aligned} r^2\theta_1'[nr-\varphi_r'(r, 0)]+[1+r^2(\theta_1')^2]\varphi_\eta'(r, 0) &= 0 \\ r^2\theta_2'[nr-\varphi_r'(r, \eta_0)]+[1+r^2(\theta_2')^2]\varphi_\eta'(r, \eta_0) &= 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Вместо (1.8) имеем

$$2(2n-1)\varphi-2nr\varphi_r'+2nr\theta_{1,2}'\varphi_\eta'+(\varphi_r'-\theta_{1,2}'\varphi_\eta')^2+\frac{1}{r^2}\varphi_\eta'^2=0 \quad (1.13)$$

($\eta=0$ и $\eta=\eta_0$.)

2. Если пелена имеет логарифмическую форму

$$\theta_1=-a_0 \ln r, \quad \eta=\theta+a_0 \ln r \quad (2.1)$$

то существует точное решение уравнения (1.9), обобщающее решение Прандтля [2]

$$\psi(r, \eta)=r^2\psi_0(\eta), \quad \omega(r, \eta)=\omega(\eta) \quad (2.2)$$

Подставив (2.2) в (1.9), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(2\psi_0+na_0)\frac{d\omega}{d\eta}=-\omega, \quad \omega=-(1+a_0^2)\psi_0''-4a_0\psi_0'-4\psi_0 \quad (2.3)$$

Граничные условия (1.10) интегрируются

$$\psi_0(0)=-na_0/2, \quad \psi_0(2\pi)=-na_0/2 \quad (2.4)$$

Градиент давления вдоль вихревой пелены определяется из уравнений Эйлера после несложных, но громоздких вычислений

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p(r, \eta)}{\partial r} \Big|_{\eta=0, 2\pi} = -r[(1+a_0^2)\psi_0'(\psi_0'-1)-n(n-1)a_0^2]$$

В соответствии с условием (1.11) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} [p(r, 2\pi)-p(r, 0)] &= \\ = r(1+a_0^2) [\psi_0'(0)-\psi_0'(2\pi)] [\psi_0'(0)+\psi_0'(2\pi)-1] &= 0 \end{aligned}$$

Наличие вихревой пелены подразумевает разрыв скорости, т. е. $\psi_0'(0)-\psi_0'(2\pi) \neq 0$. Следовательно,

$$\psi_0'(0)+\psi_0'(2\pi)=1 \quad (2.5)$$

Итак, необходимо решить обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка (2.3) с граничными условиями (2.4), (2.5).

Проведем качественное исследование решения. Особые точки уравнения (2.3) определяются соотношением $\psi_0=-na_0/2$. Согласно условиям (2.4), обе граничные точки $\eta=0$ и $\eta=2\pi$ являются особыми. Значение ω в особой точке будет конечным, если $\psi_0' < 0$. Не ограничивая общности, предположим, что это условие выполняется в точке $\eta=0$. Тогда либо внутри интервала $0 < \eta < 2\pi$, либо на его конце $\eta=2\pi$ будет существовать по меньшей мере одна особенность $\psi_0=-na_0/2$, где $\psi_0' > 0$, т. е. $\omega = \infty$.

При заданном значении n задача имеет однопараметрический произвол. Действительно, для организации счета от точки $\eta=0$ необходимо задать три константы: a_0 , $\psi_0'(0)$ и ω_0 , тогда как условие (2.5) и второе условие (2.4) определяют только две константы. Можно считать, что остается не-

определенной некоторая величина ω_0 , характеризующая завихренность. Решение Прандтля $\psi = \psi_1$ соответствует случаю $\omega_0 = 0$:

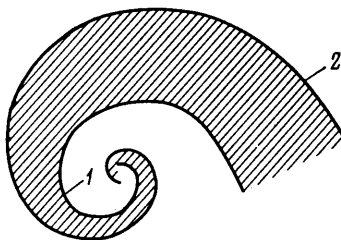
$$\psi_1(\eta) = A \exp\left(-\frac{2a_0\eta}{1+a_0^2}\right) \sin\left(2\frac{\eta+\eta_1}{1+a_0^2}\right) \quad (2.6)$$

Зависимости A , a_0 , η_1 от показателя автомодельности n находятся из граничных условий (2.4), (2.5).

Если $\omega_0 \ll 1$, то задача допускает линейризацию

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \psi_1 + \omega_0 \psi_2 + O(\omega_0^2) \\ \omega &= \omega_0 \exp\left(-\int_0^\eta \frac{d\eta}{2\psi_1 + na_0}\right) + O(\omega_0^2) \end{aligned}$$

Бесконечных значений завихренности ($\omega \rightarrow \infty$ при $\eta \rightarrow 2\pi$) можно избежать, если, например, принять, что область завихренности примыкает



Фиг. 2

к одной стороне вихревой пелены, заполняя слой $0 \leq \eta \leq \eta_2 < 2\pi$, заштрихованный на фиг. 2 (кривая 1 соответствует $\eta = 0$; 2π ; кривая 2 — $\eta = \eta_2$). В незаштрихованной области справедливо решение Прандтля (2.6). На линии $\eta = \eta_2$ значения ψ_0 и ψ_0' не терпят разрыва.

3. Зададим форму вихревой пелены в окрестности центра в виде ряда по степеням r^k

$$\theta_1'(r) = \frac{d\theta_1}{dr} = \frac{a_1}{r^{1+k}} + \frac{a_2}{r} + \frac{a_3}{r^{1-k}} + O(r^{2k-1}), \quad k > 0 \quad (3.1)$$

Логарифмическая спираль (2.1) является частным случаем этого более общего представления вихревой пелены при $a_1 = a_3 = a_4 = \dots = 0$, $a_2 = a_0$.

В соответствии с условиями (1.10) функция тока должна иметь следующее разложение:

$$\psi(r, \eta) = r^{2-k}b_1 + r^2b_2 + r^{2+k}\psi_1(\eta) + r^{2+2k}\psi_2(\eta) + O(r^{2+3k}) \quad (3.2)$$

Первые два коэффициента разложения (3.2) приняты постоянными, так как в этом случае обеспечивается минимальная особенность для завихренности.

Окружная скорость

$$v(r, \eta) = \frac{\partial \psi}{\partial r} - \theta_1' \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \sim r^{1-k} \quad (r \rightarrow 0)$$

Угловая скорость частиц бесконечна, деформации также бесконечны, частицы растягиваются в спирали.

Первые два члена разложения (3.2) удовлетворяют с необходимой точ-

ностью исходному уравнению и граничному условию (1.11), значения постоянных b_1 и b_2 находятся из (1.10)

$$b_1 = \frac{na_1}{2-k}, \quad b_2 = \frac{na_2}{2}$$

Вычислим завихренность

$$\Delta\psi = r^{-k}A_1(\eta) + A_2(\eta) + O(r^k) \quad (3.3)$$

$$A_1 = a_1^2\psi_1'' + n(2-k)a_1 \neq 0, \quad A_2 = a_1^2\psi_2'' + 2a_1a_2\psi_1'' - (k+4)a_1\psi_1' + 2na_2$$

Подставляя разложения (3.2) и (3.3) в уравнение Гельмгольца (1.9), получим в первом приближении

$$(kn-1)A_1=0$$

Так как $A_1 \neq 0$, имеем

$$k=1/n \quad (3.4)$$

Такое же значение k получается для безвихревого потока ($A_1=0$) из условия равенства давлений по разные стороны вихревой пелены.

Во втором приближении в уравнение (1.9) войдет ψ_2 , в третьем — ψ_3 и т. д. Следовательно, зависимость $A_1(\eta)$ или $\psi_1(\eta)$ осталась достаточно произвольной (ψ_1 удовлетворяет условиям (1.10), (1.11)). Такой произвол в значении завихренности, характерный для течений идеальной жидкости, исключается при рассмотрении условий вдали от центра спирали, где образуется завихренность.

Градиент давления вдоль вихревой пелены определяется из уравнений Эйлера

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p(r, \eta)}{\partial r} \simeq n^2 a_1^2 r^{1-2/n}$$

Давление при $r \rightarrow 0$ конечно, если $n > 1$. Если $n \leq 1$, то в центре вихря имеется бесконечно большое разрежение. Завихренность в центре ядра бесконечна. Циркуляция скорости вдоль пелены, отсчитываемая от ее центра, равна

$$\Gamma \simeq -\frac{n}{2n-1} a_1^2 \psi_1' r^{2-1/n}$$

4. Рассмотрим безвихревое течение в центре спиральной свободной границы

$$\theta_1 = -a_0 \ln r, \quad \theta_2 = -a_0 \ln r + \theta_0, \quad \eta_0 = \theta_0 \quad (4.1)$$

Потенциал $\varphi(r, \eta) = r^2 \varphi_0(\eta)$ является точным решением уравнения Лапласа (1.4)

$$\varphi_0(\eta) = \left(c_1 \cos \frac{2\eta}{1+a_0^2} + c_2 \sin \frac{2\eta}{1+a_0^2} \right) \exp \left(-\frac{2a_0\eta}{1+a_0^2} \right) \quad (4.2)$$

Постоянные c_1 , c_2 , a_0 и θ_0 , определяющие решение задачи, находятся из граничных условий (1.12) — (1.13)

$$c_1 = \pm \frac{na_0}{2} \exp \left(-\frac{2a_0\theta_0}{1+a_0^2} \right), \quad c_2 = \frac{na_0}{2} \quad (4.3)$$

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4} (2l+1) (1+a_0^2) \quad (l=0, 1, 2, \dots)$$

$$n = \pm \frac{1+a_0^2}{2a_0} \left(\operatorname{sh} \left(\frac{2a_0\theta_0}{1+a_0^2} \right) \pm a_0 \right)^{-1}$$

Верхние знаки в последнем соотношении соответствуют нечетным значениям собственного числа l , нижние — четным. Из геометрических соображений ясно, что $\theta_0 < 2\pi$. Это неравенство приводит к ограничениям на l и a_0 .

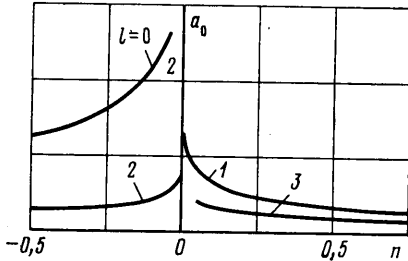
$$l \leq 3, \quad a_0 < \sqrt{\frac{7-2l}{1+2l}}$$

Зависимость $a_0(n)$ для значений $l=0, 1, 2, 3$ приведена на фиг. 3. Кривые не доходят до оси $n=0$. Предельные значения для соответствующих кривых равны n_l (в масштабах фиг. 3 они малы):

$$n_0 = -5,17 \cdot 10^{-2}, \quad n_1 = 4,68 \cdot 10^{-3}, \quad n_2 = -4,73 \cdot 10^{-3}, \quad n_3 = 4,68 \cdot 10^{-2}$$

Таким образом, в диапазоне $n_2 < n < n_1$ решений не существует. В диапазонах $n_0 < n < n_2$ и $n_1 < n < n_3$ существует только одно решение. Наконец, при $n \leq n_0$ и $n \geq n_3$ имеется два решения.

Для объяснения такой неоднозначности рассмотрим поле траекторий жидких частиц. Под траекторией автомодельного движения $\theta = \theta^2(r)$ по-



Фиг. 3

нимается линия, скорость перемещения которой равна нормальной к ней проекции скорости жидкости. Дифференциальное уравнение поля траекторий выводится аналогично (1.12)

$$r^2 \frac{d\theta^\circ}{dr} [nr - \varphi_r'(r, \eta^\circ)] + \left[1 + r^2 \left(\frac{d\theta^\circ}{dr} \right)^2 \right] \varphi_\eta'(r, \eta^\circ) = 0$$

$$\eta^\circ = \theta^\circ - \theta_1(r)$$

Подставляя сюда значение $\varphi(r, \eta) = r^2 \varphi_0(\eta)$, получим

$$r \frac{d\theta^\circ}{dr} (n - 2\varphi_0) + \left[1 + r^2 \left(\frac{d\theta^\circ}{dr} \right)^2 \right] \varphi_0' = 0 \quad (4.4)$$

Зоны втекания и зоны вытекания ограничены линиями раздела $d\theta^\circ/dr = 0$ (на фиг. 1 они показаны пунктиром). Уравнение линий раздела $\eta_1^\circ = \text{const}$ получается из (4.4)

$$\varphi_0'(\eta_1^\circ) = 0, \quad 0 < \eta_1^\circ < \theta_0$$

Из (4.2) — (4.3) находим

$$\text{tg} \frac{2\eta_1^\circ}{1+a_0^2} = \frac{-a_0 \exp(-b) \pm 1}{\exp(-b) \pm a_0}, \quad b = \pi a_0 \frac{2l+1}{2} \quad (4.5)$$

Уравнение (4.5) при $l=0$ имеет один корень, при $l=1$ — либо один, либо два корня, при $l=2$ — три корня, при $l=3$ — либо три, либо четыре корня.

Один корень соответствует случаю, когда имеется зона втекания и зона вытекания; два корня соответствуют наличию трех зон (фиг. 1) и т. д. Таким образом, решения $l=0$ и $l=2$ ($n \leq n_0$), а также решения $l=1$ и $l=3$ ($n \geq n_3$) топологически различимы.

Давление и циркуляция не имеют особенностей в центре спиральной свободной границы и растут пропорционально r^2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Hall M. G. Vortex breakdown.— In: Annual Rev. Fluid Mech., 1972, v. 4, p. 195–218.
2. Prandtl L. Über die Entstehung von Wirbeln in der idealen Flüssigkeit, mit Anwendung auf die Tragflügeltheorie and andere Aufgaben. Vorträge aus Hydro- und Aerodynamik.— In: Prandtl L. Gesammelte Abhandlungen, Berlin, Springer, 1961, B. 2, S. 697–713.
3. Alexander R. C. Family of similarity flows with vortex sheets.— Phys. Fluids, 1971, v. 14, № 2, p. 231–239.
4. Kaden H. Aufwicklung einer unstabilen Unstetigkeitsfläche.— Ing. Arch., 1931, B. 2, N 2, S. 140–168.
5. Mangler K. W., Weber J. The flow field near the centre of a rolled-up vortex sheet.— J. Fluid Mech., 1967, v. 30, № 1, p. 177–196.
6. Guirand J. P., Zeytounian R. Kh. A double-scale investigation of the asymptotic structure of rolled-up vortex sheets.— J. Fluid Mech., 1977, v. 79, № 1, p. 93–112.
7. Никольский А. А., Бегяев С. К., Малышев И. П. О предельной форме отрывного автомодельного течения идеальной жидкости.— В кн.: Проблемы прикладной математики и механики. М.: Наука, 1971, с. 262–268.
8. Судаков Г. Г. Расчет некоторых автомодельных трехмерных отрывных течений.— Учен. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 2, с. 109–113.
9. Лейбович С. Распад вихря.— В кн.: Вихревые движения жидкости. М.: Мир, 1979, с. 160–196. (Механика. Новое в зарубежной науке. Вып. 21).

Москва

Поступила в редакцию
13.III.1981