

УДК 532.526+533.6.011.55-3

РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ТРЕУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ В ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

ДУДИН Г. Н.

Проведены расчеты пространственного пограничного слоя на треугольной пластине конечной длины на режиме сильного вязкого взаимодействия с внешним гиперзвуковым потоком как при симметричном обтекании, так и при наличии угла скольжения. Исследовано влияние изменения давления на задней кромке пластины на характеристики пограничного слоя.

Взаимодействие пограничного слоя с невязким внешним гиперзвуковым потоком может приводить к отрыву пограничного слоя, появлению сильных поперечных течений, а также значительных тепловых потоков [1]. Первые важные результаты исследования симметричного обтекания тонкой треугольной пластины на режиме сильного взаимодействия были получены в [2]. В [3, 4] была установлена возможность распространения возмущений вверх по течению. В дальнейшем вопросы взаимодействия гиперзвукового потока с пограничным слоем для отрывных двумерных и пространственных течений были рассмотрены в [5, 6]. В [7, 8] в предположении, что уравнения пограничного слоя верны на всем треугольном крыле, получены глобальные решения краевой задачи как при симметричном обтекании, так и при наличии угла скольжения. Однако в вышеуказанных работах рассматривалось гиперзвуковое обтекание полубесконечных треугольных крыльев, для которых краевая задача сводилась к автомодельной. Следующим шагом в решении этой проблемы является исследование обтекания тонких крыльев конечной длины.

Решение полной краевой задачи включает учет течения в следе, который образуется за крылом [5], однако в данной работе, чтобы не рассматривать это течение, краевое условие задается на задней кромке треугольного крыла. При этом следует иметь в виду, что при обтекании нехолодной пластины разложение в ряды решения в окрестности передней кромки содержит произвольную функцию, так как течение докритическое [5], а поэтому для отбора единственного решения краевой задачи на задней кромке необходимо также задавать функцию. В настоящей работе в качестве такой функции используется заданное распределение давления на задней кромке. Изменение краевых условий на задней кромке крыльев может приводить к существенному изменению характеристик течения на всем крыле.

1. Рассматривается обтекание при нулевом угле атаки плоского треугольного крыла конечной длины на режиме сильного вязкого взаимодействия пограничного слоя с внешним гиперзвуковым потоком. Вводится декартова система координат, начало которой расположено в вершине треугольного крыла, ось x° направлена вдоль оси симметрии, ось z° — по размаху, а ось y° — по нормали к плоскости крыла. Форма крыла задается уравнением $z^\circ = Sx^\circ$, где $S = \text{ctg } \omega$, а ω — угол стреловидности. В работе рассматривается как симметричное обтекание крыла, так и обтекание при наличии угла скольжения β .

В соответствии с обычными оценками для пограничного слоя в гиперзвуковом потоке [9] вводятся следующие безразмерные переменные: $u u_\infty$, $w u_\infty$, $v \tau S^{-1} u_\infty$ — проекции полной скорости на оси $x^\circ = xL$, $z^\circ = zSL$, $y^\circ = y\tau L$, $\rho \tau \rho_\infty$ — плотность, $\rho \tau^2 \rho_\infty u_\infty^2$ — давление, $g u_\infty^2 / 2$ — энтальпия торможения, $\mu \mu_0$ — динамический коэффициент вязкости, $\delta \tau L$ — толщина вытеснения пограничного слоя. Параметр $\tau = \frac{4}{\sqrt{S/R}}$, где число Рейнольдса $R = \rho_\infty u_\infty L / \mu_0$, определяется по значениям плотности и скорости газа в не-

возмущенном потоке, коэффициента вязкости при температуре торможения, характерного продольного размера крыла L . Далее предполагается линейная зависимость вязкости от температуры.

Подстановка этих переменных в уравнении Навье – Стокса и граничные условия и совершение предельного перехода $R \rightarrow \infty$ приводят к уравнениям пространственного пограничного слоя, которые в переменных А. А. Дородницына имеют вид

$$\begin{aligned} Su \frac{\partial u}{\partial x} + v_s \frac{\partial u}{\partial \lambda} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\mu \rho \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) \\ Su \frac{\partial w}{\partial x} + v_s \frac{\partial w}{\partial \lambda} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\mu \rho \frac{\partial w}{\partial \lambda} \right) \\ Su \frac{\partial g}{\partial x} + v_s \frac{\partial g}{\partial \lambda} + w \frac{\partial g}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \mu \rho \left[\frac{1}{\sigma} \frac{\partial g}{\partial \lambda} - \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{\partial (u^2+w^2)}{\partial \lambda} \right] \right\} \\ S \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v_s}{\partial \lambda} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \quad v_s = \rho v + Su \frac{\partial \lambda}{\partial x} + w \frac{\partial \lambda}{\partial z} \\ \rho &= \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{g-u^2-w^2}, \quad \mu = g-u^2-w^2 \\ \lambda &= \int_0^y \rho dy, \quad \delta = \frac{\gamma-1}{2\gamma p} \int_0^\infty (g-u^2-w^2) d\lambda \\ u &= v_s = w = 0, \quad g = g_w(\lambda=0) \\ u &\rightarrow \cos \beta, \quad w \rightarrow \sin \beta, \quad g \rightarrow 1 \quad (\lambda \rightarrow \infty) \\ (|z| \leq x, \quad 0 \leq x \leq 1) \end{aligned} \tag{1.1}$$

где σ – число Прандтля, γ – отношение удельных теплоемкостей.

Внешняя граница пограничного слоя в гиперзвуковом потоке в первом приближении определена точно [10], так как плотность газа в ударном слое по порядку величины в τ^2 раз больше, чем в пограничном слое. Для решения системы уравнений пограничного слоя (1.1) необходимо знать распределение давления, которое не задано и должно определяться в процессе решения краевой задачи (1.1) совместно с уравнениями для внешнего невязкого течения. В настоящей работе для простоты используется формула «касательного клина», причем в форме справедливой при $M_\infty \tau \gg 1$ [9]:

$$p = \frac{\gamma+1}{2} \left[\frac{\partial \delta}{\partial x} \cos \beta + \frac{\partial \delta}{\partial z} \frac{\sin \beta}{S} \right]^2 \tag{1.2}$$

Заметим, что на задней кромке крыла при заданном распределении давления $p_k(z)$ толщина вытеснения $\delta(x, z)$, полученная в результате решения краевой задачи, должна удовлетворять соотношению

$$\frac{\gamma+1}{2} \left[\frac{\partial \delta}{\partial x} \cos \beta + \frac{\partial \delta}{\partial z} \frac{\sin \beta}{S} \right]^2 = p_k(z)$$

при значении продольной координаты $x=1$.

Для учета особенностей поведения функций течения в окрестности носика плоского треугольного крыла вводятся новые переменные

$$\begin{aligned}x &= x^*, & z &= xz^*, & \lambda &= x^{1/2}\lambda^*, & u &= u^*, & w &= w^*, & g &= g^* \\v_0 &= x^{-3/4} \left(v^* - Sxu \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) \\p &= x^{-1/2} p^*(x^*, z^*), & \mu &= \mu^* \\ \rho &= x^{-1/2} \rho^*(x^*, \lambda^*, z^*), & \delta &= x^{3/4} \delta^*(x^*, z^*)\end{aligned}\tag{1.3}$$

Следует отметить, что введение переменных вида (1.3) при рассмотрении обтекания полубесконечного треугольного крыла позволяет свести уравнения трехмерного пограничного слоя (1.1) к системе, зависящей от двух переменных. Решение этой автомодельной системы уравнений использовалось в работе для апробации предложенного метода расчета пространственного пограничного слоя в случае, когда на задней кромке треугольного крыла конечной длины задавалось распределение давления $p_h(z^*)$, соответствующее обтеканию полубесконечного крыла.

Далее в работе предполагается, что в окрестности передних кромок $z^* = \pm 1$ заданное давление $p_h(\pm 1)$ всегда совпадает с давлением, соответствующим обтеканию полубесконечного крыла. Для численного решения краевой задачи (1.1), (1.2) необходимо учесть особенности поведения давления p^* и толщины вытеснения пограничного слоя δ^* в окрестности передних кромок крыла ($z^* = \pm 1$).

При введении переменных

$$\begin{aligned}\lambda^* &= \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} (1-z^{*2})^{1/2} \gamma} \\p^* &= (1-z^{*2})^{-1/2} p_0(x^*, z^*) \\ \delta^* &= (1-z^{*2})^{3/4} \Delta(x^*, z^*) \\v^* &= \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} (1-z^{*2})^{1/2}} \left[v_0 \frac{p_0}{1-z^{*2}} - (w^* - Su^* z^*) \frac{\partial \eta}{\partial z^*} \right] \\p_h(z^*) &= (1-z^{*2})^{-1/2} p_{h0}(x^*, z^*)\end{aligned}\tag{1.4}$$

Краевая задача (1.1), (1.2) с учетом (1.3) и без верхнего индекса * принимает следующий вид

$$\begin{aligned}F \frac{\partial u}{\partial x} + \Phi \frac{\partial u}{\partial z} + v_0 \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + S \frac{\gamma-1}{2\gamma p_0} (g-u^2-w^2) \left[(1-z^2) \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} \right) + \right. \\ &\quad \left. + z \left(z + \frac{1-z^2}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial z} \right) \right] \\F \frac{\partial w}{\partial x} + \Phi \frac{\partial w}{\partial z} + v_0 \frac{\partial w}{\partial \eta} &= - \frac{\gamma-1}{2\gamma p_0} (g-u^2-w^2) \left(z + \frac{1-z^2}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \\F \frac{\partial g}{\partial x} + \Phi \frac{\partial g}{\partial z} + v_0 \frac{\partial g}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{\sigma} \frac{\partial g}{\partial \eta} - \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{\partial (u^2+w^2)}{\partial \eta} \right] \\ \frac{\partial v_0}{\partial \eta} - (w-Suz) \frac{z}{2p_0} + \frac{1-z^2}{p_0} \left(Sx \frac{\partial u}{\partial x} - Sz \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{Su}{4} \right) &= 0\end{aligned}\tag{1.5}$$

$$F = Sux \frac{1-z^2}{p_0}, \quad \Phi = (w - Suz) \frac{1-z^2}{p_0}$$

$$\Delta = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \frac{1}{p_0} \int_0^\infty (g - u^2 - w^2) d\eta$$

$$p_0 = \frac{\gamma+1}{2} \left\{ \left[\frac{3}{4} (1-z^2) \Delta + x (1-z^2) \frac{\partial \Delta}{\partial x} - z \left((1-z^2) \frac{\partial \Delta}{\partial z} - \frac{3}{2} z \Delta \right) \right] \cos \beta + \right.$$

$$\left. + \left[(1-z^2) \frac{\partial \Delta}{\partial z} - \frac{3}{2} z \Delta \right] \frac{\sin \beta}{S} \right\}^2$$

$$u = v_0 = w = 0, \quad g = g_w(\eta = 0)$$

$$u \rightarrow \cos \beta, \quad w \rightarrow \sin \beta, \quad g \rightarrow 1 (\eta \rightarrow \infty)$$

$$(|z| \leq 1, \quad 0 \leq x \leq 1)$$

$$p_0(x, z) = p_{k0}(z) \quad (|z| \leq 1, \quad x = 1)$$

Система уравнений (1.5) описывает течение в трехмерном пограничном слое на плоской треугольной пластине на режиме сильного вязкого взаимодействия с заданным распределением давления p_{k0} на задней кромке. Следует отметить, что в носике треугольного крыла ($x=0$) в системе (1.5) члены, содержащие x , выпадают и краевая задача оказывается зависящей только от двух независимых переменных z и η . Получающаяся система дифференциальных уравнений в частных производных описывает также течение на полубесконечном треугольном крыле [8]. На передних кромках крыла при значениях координаты $z = \pm 1$ система уравнений (1.5) вырождается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Заметим, что для треугольного крыла в этих уравнениях члены, содержащие x , выпадают и их решения справедливы при всех значениях x ($0 \leq x \leq 1$).

2. Для решения указанных систем дифференциальных уравнений использовался метод конечных разностей. Для аппроксимации уравнений использовались разностные схемы первого и второго порядка по координатам x , z и второго порядка по координате η . Разностная схема первого порядка по z использовалась для расчета функций течения при отходе от кромок крыла, т. е. при $z = \pm 1 \mp \Delta z$, хотя не представляет большого труда использовать здесь схему второго порядка по z , например [11]. Разностная схема первого порядка по x для системы (1.5) использовалась при отходе от носика крыла ($x = \Delta x$). Заметим, что и здесь возможно построить схему второго порядка, если только отрыв пограничного слоя не происходит с носика крыла. В связи с тем что в общем случае возможно изменение знаков коэффициентов F и Φ в системе (1.5), производные $F \partial / \partial x$ и $\Phi \partial / \partial z$ расписывались в разностном виде с учетом направления параболичности системы (1.5) [12]. Таким образом, разностная схема автоматически учитывает направление течения внутри трехмерного пограничного слоя.

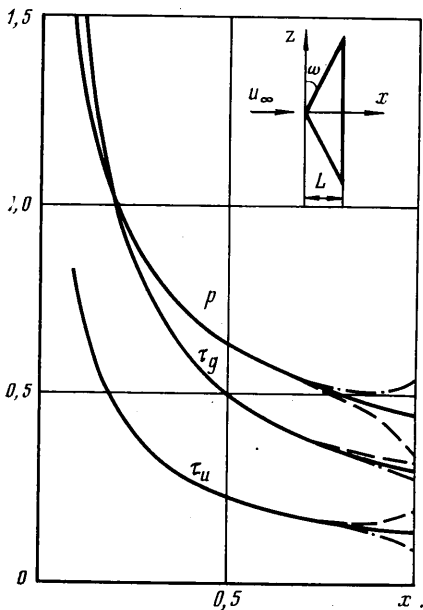
Для решения разностных уравнений, полученных для уравнений продольного и поперечного импульса, а также энтальпии использовался метод прогонки, причем для неизвестных функций брались релаксированные значения с предыдущей итерации. Уравнение неразрывности аппроксимировалось разностным уравнением с погрешностью $O(\Delta x^2, \Delta z^2, \Delta \eta^2)$. Краевая задача (1.5) решалась следующим образом. Сначала находились решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений на кромках треугольного крыла ($z = \pm 1$). Используя полученные решения как краевые условия, решалась задача, описывающая течение в носике крыла ($x=0$). Наконец, используя заданное распределение давления на задней кромке крыла и полученные решения в носике крыла и на его кромках как краевые условия, решалась общая система уравнений (1.5). Итерационный процесс организован следующим образом. При заданном приближенном распределении давления $p_0(x, z)$ решаются уравнения движения и энергии. Полученные значения функций течения u ,

w и g и давление используются для определения толщины вытеснения Δ . Затем из формулы касательного клина находится новое давление и итерационный процесс продолжается, пока не будет достигнута требуемая точность.

Как показали численные расчеты, для устойчивости разностной краевой задачи необходимо релаксировать как функции течения u , w и g , так и давление p_0 , причем коэффициенты релаксации оказались порядка $\varphi_1=0,2-0,5$ соответственно для u , w и g и $\varphi_2=0,01-0,05$ для p_0 . Итерации заканчивались, когда максимальное отличие на двух последующих итерациях для величины $p_0(x, z)$ (как наиболее медленно сходящейся величины) и отличие заданного давления $p_{k0}(z)$ от давления вычисленного на задней кромке $p_0(x=1, z)$ становилось меньше 10^{-4} . Для этого требовалось 300-400 итераций.

3. В численных расчетах предполагалось, что $S=2$ (угол стреловидности $\sim 27^\circ$), $\gamma=1,4$, $\sigma=0,71$ и $g_w=0,5$. Результаты расчета характеристик пространственного пограничного слоя на плоском треугольном крыле на режиме сильного взаимодействия при симметричном обтекании $\beta=0$ представлены на фиг. 1-2, а при наличии угла скольжения $\beta=10^\circ$ — на фиг. 3-5. Результаты на этих фигурах представлены в безразмерных переменных, которые были введены в самом начале настоящей работы.

Сплошными линиями показаны результаты расчета решений, соответствующих обтеканию полубесконечного треугольного крыла, в данной ра-



Фиг. 1

боте эти результаты получены при решении полной системы уравнений (1.5), а не автомодельной системы уравнений, зависящей только от двух переменных. Для получения указанных решений на задней кромке крыла задавалось распределение давления, соответствующее автомодельному решению ($p_{k0}(z)=p_a$). Пунктирными линиями обозначены решения уравнений пограничного слоя с заданием пониженного давления на задней кромке крыла ($C=-0,271$), а штрихпунктирными — с заданием повышенного давления ($C=+0,21$). Давление на задней кромке плоского треугольного крыла задавалось в следующем виде:

$$p_{k0}(z) = p_a (1 + \frac{1}{2} C \times (1 + \cos(\pi z))) \quad (3.1)$$

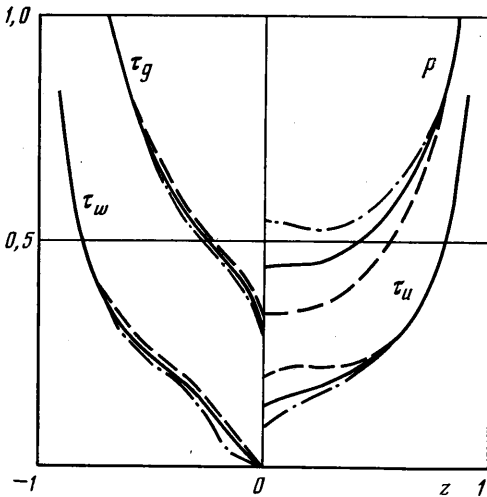
На фиг. 1 приведены результаты расчета безразмерных значений коэффициентов напряжения трения в продольном направлении $\tau_u = (\partial u / \partial y)_w \cdot 10^{-1}$, теплового потока $\tau_g = (\partial g / \partial y)_w$

и давления p по оси x в плоскости симметрии крыла $z=0$. Следует отметить существенное влияние изменения давления на величины τ_u и τ_g , которое распространяется на достаточно большие расстояния от задней кромки. Как и в двумерном случае, понижение давления при $x=1$ приводит к увеличению напряжений трения и теплового потока, а повышение давления — к уменьшению этих величин по сравнению с автомодельным случаем.

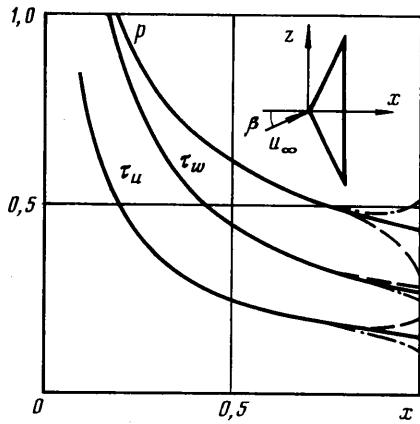
На фиг. 2 представлено распределение величин τ_u , τ_g , p , а также коэффициента напряжения трения в поперечном направлении $\tau_w = (\partial w / \partial y)_w$ по размаху крыла при $x=1$. Заметим, что приведенные на фиг. 2 распределения давления являются заданными функциями и определяются вы-

ражением (3.1). Как показали численные расчеты, изменение давления на задней кромке крыла оказывает значительное влияние на величины напряжений трения и тепловой поток, причем увеличение давления ($c=0,21$) приводит к уменьшению коэффициента напряжения трения в поперечном направлении τ_w , а уменьшение давления ($c=-0,271$) — к его увеличению.

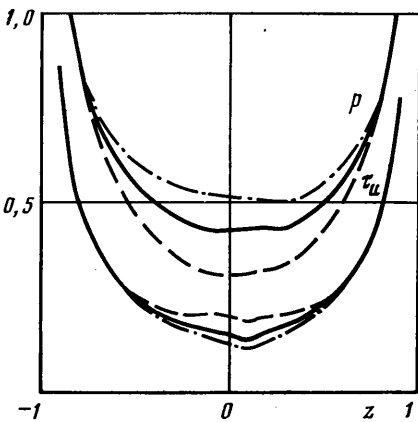
Из результатов данных расчетов следует также, что величина суммарного коэффициента напряжения трения $\tau = \sqrt{\tau_u^2 + \tau_w^2}$ возрастает при обте-



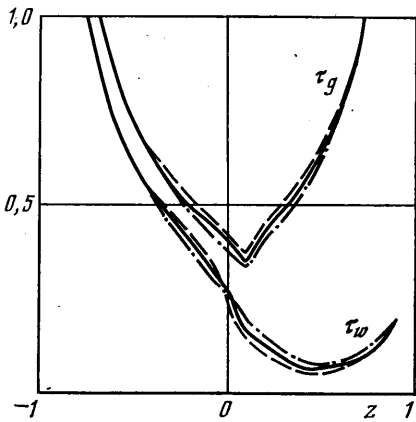
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

канию крыла с разрежением на задней кромке и уменьшается в случае сжатия.

Результаты расчета характеристик пограничного слоя при несимметричном обтекании приведены на фиг. 3—5. На фиг. 3 представлены распределения величин τ_u , τ_w и p по оси x в плоскости симметрии крыла. Величина τ_w при $z=0$ уже не равняется нулю, так как в рассмотренном случае плоскость симметрии крыла не является плоскостью стекания, как в симметричном случае. Полученные решения уравнений трехмерного по-

граничного слоя соответствуют стеканию к криволинейной поверхности. На фиг. 4, 5 приведены результаты расчетов распределения величин τ_u , τ_w , τ_g и p по оси z на задней кромке крыла. Как и следовало ожидать, значения напряжения трения и теплового потока на наветренной половине крыла $z < 0$ значительно выше, чем на подветренной $z > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровой В. Я., Давлет-Кульдеев Р. З., Рыжкова М. В. Экспериментальное исследование теплообмена на крыльях и клине.— Тр. ЦАГИ, 1970, вып. 1175, с. 170–183.
2. Ладыженский М. Д. О пространственном гиперзвуковом течении около тонких крыльев.— ПММ, 1964, т. 28, вып. 5, с. 835–844.
3. Нейланд В. Я. Распространение возмущений вверх по течению при взаимодействии гиперзвукового потока с пограничным слоем.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 4, с. 40–49.
4. Козлова И. Г., Михайлов В. В. О сильном вязком взаимодействии на треугольном и скользящем крыльях.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 6, с. 94–99.
5. Нейланд В. Я. К теории взаимодействия гиперзвукового потока с пограничным слоем для отрывных двумерных и пространственных течений. Ч. 1. Пространственные течения.— Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 2, с. 70–79.
6. Нейланд В. Я. К теории взаимодействия гиперзвукового потока с пограничным слоем для отрывных двумерных и пространственных течений. Ч. 2. Двумерные течения и треугольное крыло.— Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 3, с. 28–39.
7. Дудин Г. Н. Взаимодействие гиперзвукового потока с пограничным слоем на тонком треугольном крыле.— Тр. ЦАГИ, 1978, вып. 1912, с. 3–10.
8. Дудин Г. Н. Обтекание гиперзвуковым потоком вязкого газа тонкого треугольного крыла со скольжением.— Уч. зап. ЦАГИ, 1978, т. 9, № 3, с. 30–35.
9. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 607 с.
10. Lee R. S., Cheng H. K. On the outer-edge problem of a hypersonic boundary layer.— J. Fluid Mech., 1969, v. 38, № 1, p. 161–179.
11. Браиловская И. Ю., Чудов Л. А. Решение уравнений пограничного слоя разностным методом.— В кн.: Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1962, т. 1, с. 167–182.
12. Carter J. E. Solutions for laminar boundary layers with separation and reattachment.— AIAA Pap., 1974, № 583, 11 p.

Москва

Поступила в редакцию
24.X.1980