

УДК 532.517.4

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КРУПНОМАСШТАБНОЙ
СТРУКТУРЫ НЕОДНОРОДНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ**

БОРИСОВ А. Г., КУЗНЕЦОВ В. Р., РАСЩУПКИН В. И.

Изучение крупномасштабных колебаний в турбулентных потоках является важной задачей, поскольку известно [1], что такие колебания играют особую роль в процессах турбулентного переноса, обуславливая их нелокальный характер. В литературе [2] часто высказывается мнение, что такие колебания существуют при всех числах Рейнольдса, а их структура носит неслучайный или не вполне случайный характер. Наличие крупномасштабных возмущений в турбулентных потоках подтверждается различными экспериментальными методами (визуализация, анализ временных и пространственных корреляций). Однако количественная информация, даваемая этими методами, явно недостаточна.

В данной работе для количественного описания крупномасштабных структур использован метод ортогонального разложения поля турбулентных пульсаций скорости. Общее описание этого метода можно найти в работах [3, 4]. Для исследования турбулентных течений этот метод был предложен Ламли [5]. Идея ортогональных разложений естественна и вводилась для различных целей многими авторами (см., например, обзор, приведенный в [5]). Идея метода заключается в представлении поля скорости в виде комбинации стандартных возмущений (колебаний) со случайными и некоррелированными коэффициентами. В однородной турбулентности таким представлением является разложение поля скорости (мгновенного) в интеграл Фурье по системе гармонических функций $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$. Коэффициенты этого разложения (амплитуды гармоник) оказываются некоррелированными случайными функциями волнового вектора \mathbf{k} . В неоднородной турбулентности разложение скорости по гармоническим функциям также возможно, однако коэффициенты этого разложения коррелированы между собой.

Используя метод ортогональных разложений, Пейн и Ламли [6] получили форму одного доминирующего колебания в следе за цилиндром. Для этого им пришлось, исходя из данных работы [7], аналитически аппроксимировать пространственную корреляционную функцию пульсаций скорости. Цель данной работы состоит в получении вида нескольких доминирующих колебаний в струе, их энергии, а также в исследовании взаимодействия поля средней скорости с крупномасштабными колебаниями.

1. Рассмотрим течение в струе и проанализируем для простоты распределение только продольной компоненты пульсаций скорости вдоль координаты y , перпендикулярной оси симметрии струи ($y=0$ на оси струи): $u(y) = u_1(y) - \langle u_1(y) \rangle$ (индекс 1 — направление вдоль оси симметрии). Пусть

$$R(y, y') = \langle u(y)u(y') \rangle = R(y', y) \tag{1.1}$$

— одномерная пространственная корреляционная функция пульсаций скорости y и y' . Рассмотрим однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(y, y') f(y') dy' = E f(y) \tag{1.2}$$

Из (1.1) видно, что ядро R уравнения (1.2) симметрично. Из теории таких уравнений [8] известно, что нетривиальное решение существует лишь при некоторых значениях собственных чисел E , совокупность кото-

рых называется спектром. Собственные функции f уравнения (1.2), соответствующие разным E , ортогональны, и без ограничения общности их можно считать нормированными. Система собственных чисел E может быть дискретной или непрерывной в зависимости от сходимости интеграла

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R^2(y, y') dy dy' \quad (1.3)$$

Если $I < \infty$, то все собственные числа образуют последовательность, сходящуюся к нулю. При $I = \infty$ спектр может быть дискретным, непрерывным или состоять из дискретной и непрерывной частей. Поперечные спектры струйных течений всегда дискретны. В самом деле, известно [9], что при $y \rightarrow \infty$ течение становится потенциальным и $\langle u^2(y) \rangle \sim y^{-4}$. Следовательно, интеграл (1.3) сходится и спектр оказывается дискретным. В этом заключается существенное отличие поперечного спектра струйных течений от спектра однородной турбулентности, который обычно непрерывен.

Известно также, если $I < \infty$, то ядро уравнения (1.2) можно представить в виде

$$R(y, y') = \sum_{n=1}^{\infty} E_n f_n(y) f_n(y') \quad (1.4)$$

Отсюда легко показать, что коэффициенты в разложении случайного поля $u(y)$ по системе собственных функций уравнения (1.2)

$$u(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n f_n(y) \quad (1.5)$$

не коррелированы, т. е.

$$\langle A_n A_m \rangle = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ E_m, & n = m \end{cases} \quad (1.6)$$

Действительно, если формула (1.6) справедлива, то из (1.5) получаем (1.4) и, следовательно, удовлетворяется уравнение (1.2) (необходимое условие).

С другой стороны, пусть $f_n(y)$ — собственные функции уравнения (1.2).

Тогда случайные числа $A_n = \int_{-\infty}^{\infty} u(y) f_n(y) dy$ удовлетворяют соотношению

$$\langle A_n A_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle u(y) u(y') \rangle f_n(y) f_n(y') dy dy' \quad (1.7)$$

Подставляя в (1.7) вместо $\langle u(y) u(y') \rangle$ разложение (1.4) и учитывая ортонормированность функций, получим (1.6) (достаточное условие).

Полная энергия пульсаций e равна сумме всех собственных чисел. Используя (1.4) — (1.6), получим

$$e = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} R(y, y) dy = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$$

Поэтому каждое собственное число можно считать частью энергии, приходящейся на соответствующее возмущение (с точностью до размерного множителя — плотности).

Как показано в [5], обобщение этого метода для трехмерной турбулентности приводит к уравнениям

$$\int R_{ij}(x, x') f_j(x') dx' = E f_i(x)$$

Здесь $R_{ij}(x, x') = \langle (u_i(x) - \langle u_i(x) \rangle) (u_j(x') - \langle u_j(x') \rangle) \rangle$ — напряжения Рейнольдса. Эта задача требует большого числа сложных измерений и вычислений, поэтому в работе рассмотрена лишь одна компонента тензора $R_{11}(y, y')$, а интегрирование по пространству заменено интегрированием по одному направлению. Физически это означает, что перенос энергии от одной компоненты скорости к другой не учитывается.

В случае однородной турбулентности корреляционная функция дается соотношением $R(y, y') = R(y - y')$ и тогда собственные функции уравнения (1.2) описываются выражением $f = \exp(iky)$, в чем легко убедиться простой подстановкой. При этом формулы (1.5) и (1.6) приобретают из-

вестный из теории однородной турбулентности вид $u = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iky} dZ(k)$,

$$\langle dZ(k_1) dZ^*(k_2) \rangle = E(k_1) \delta(k_1 - k_2).$$

Отсюда видно, что разложение поля скорости (1.5) по собственным функциям уравнения (1.2) является естественным обобщением гармонического анализа, широко применяемого при исследовании однородных процессов.

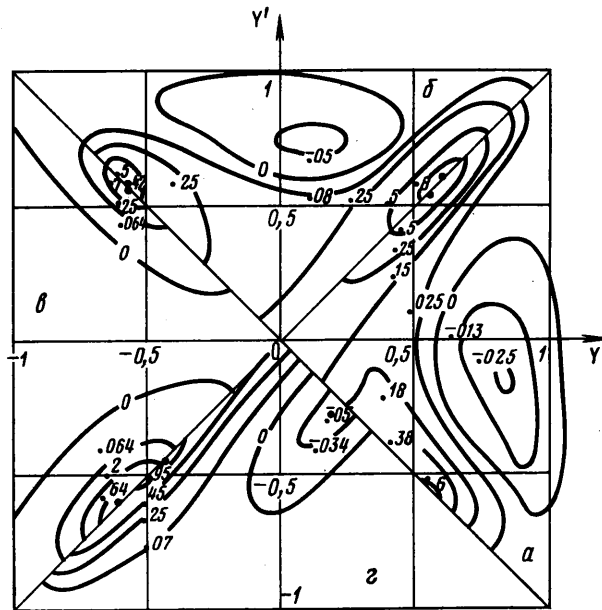
Изучение спектра неоднородной турбулентности является весьма сложной задачей, поскольку вид собственных функций заранее не известен, и для выделения отдельных колебаний необходимо измерить функцию двух переменных $R(y, y')$, а затем решить уравнение (1.2).

2. Измерения корреляционной функции $R(y, y')$ были проведены на начальном и основном участках турбулентных воздушных струй, истекающих из сопла круглого сечения. Диаметр сопла при исследовании начального участка составлял 75 мм. Начальный уровень турбулентности был равен 0,2%, толщина пограничного слоя составляла примерно 1,5 мм, а течение в нем было переходным от ламинарного к турбулентному. Исследования проводились при средней скорости истечения 1,6 и 3,7 м/с. Пространственная корреляционная функция измерялась на расстоянии двух диаметров выходного сечения сопла d . Можно ожидать, что турбулентность на начальном участке струи при не очень больших числах Рейнольдса имеет неразвитую структуру и при решении (1.2) получится небольшое число собственных чисел, содержащих почти всю энергию пульсаций.

Развитая турбулентность изучалась на основном участке турбулентной струи. Диаметр сопла в этом случае составлял 10 мм, скорость истечения 50 м/с, а измерения проводились на расстоянии $x/d = 63,5$ от среза сопла.

Аналоговая обработка сигнала проводилась с помощью аппаратуры фирмы DISA. Пульсации скорости измерялись двумя термоанемометрами 55D01 и 55M01 (DISA) с проволочными датчиками. Диаметр чувствительных элементов датчиков составлял 5 мкм, а длина 1,2 мм. Термоанемометры работали в режиме постоянной температуры. Мгновенные сигналы с датчиков, расположенных в точках y и y' , перемножались с помощью процессора турбулентности 52B25 и осреднялись. Время осреднения обычно бралось равным 30 с. На основе этих данных построены линии равной корреляции на плоскости (y, y') . Кроме отмеченной выше

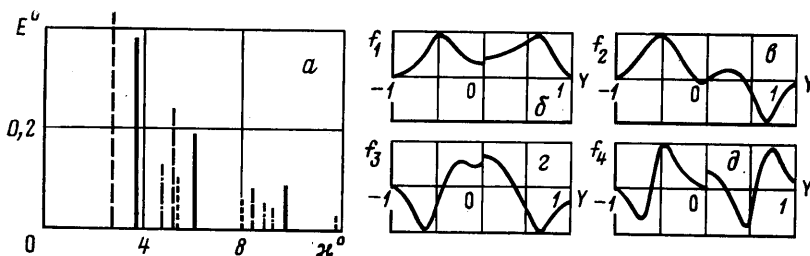
симметрии относительно прямой $y=y'$ существует симметрия относительно прямой $y=-y'$ в силу очевидного равенства $R(y, y')=R(-y, -y')$. Поэтому достаточно задать изокорреляционные линии на четверти плоскости, например между прямыми $y=y'$ и $y=-y'$, как это сделано на фиг. 1, где приведены изокорреляционные линии, полученные в результате измерений на начальном участке при $x/d=2$ и скоростях истечения 1,6 м/с (фиг. 1, а) и 3,7 м/с (фиг. 1, б). На фиг. 1, в представлены данные



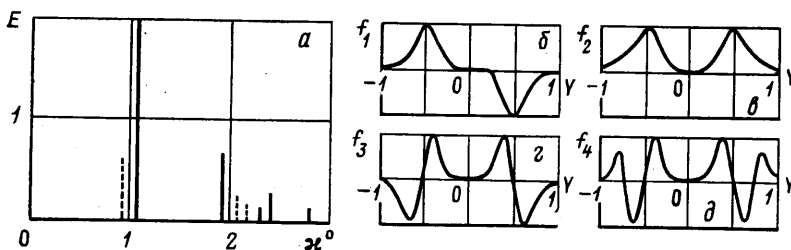
Фиг. 1

опытов, проведенных при тех же условиях истечения, что и опыты, результаты которых приведены на фиг. 1, а. Отличие состоит в том, что сигналы датчиков термоанемометра были пропущены сквозь узкополосный фильтр с центральной частотой 22,5 Гц и шириной полосы пропускания 8,5%. На фиг. 1, г изображены изокорреляционные линии для основного участка струи. По оси абсцисс на этой фигуре отложена величина $Y=y/B$, по оси ординат $-Y'=y'/B$. Величина B для случаев а-в равна d , в случае г $B=16d$.

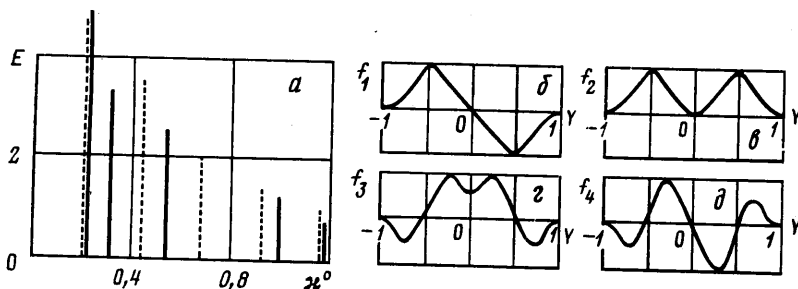
Полученные в результате измерения пространственные корреляционные функции использовались при решении уравнения Фредгольма. Интеграл (1.2) записывался в конечно-разностном виде, что позволило свести интегральное уравнение к системе линейных однородных алгебраических уравнений. Собственные функции и собственные числа находились методом вращений Якоби [9, 10]. Максимальная относительная ошибка вычисления составляла 10^{-6} . Было проверено, что при увеличении числа уравнений от 9 до 17 первые 3-4 самых больших собственных значения и соответствующие им собственные функции меняются незначительно. В дальнейших расчетах использовалась система из 17 или 33 уравнений. В одном из случаев все коэффициенты уравнений (значения элементов матрицы системы) были уменьшены или увеличены на 10% каждый, т. е. измененные элементы матрицы системы R_{ij} имели вид $R_{ij}[1+0,1(-1)^{i+j}]$. Изменения первых 3-4 самых больших собственных чисел



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

не превышали при этом 10%, а соответствующие им собственные функции изменились незначительно. Итак, самые большие собственные числа, соответствующие самым крупным возмущениям (форма которых задается собственными функциями), слабо зависят от погрешности в задании корреляционной функции.

3. Используя показанные на фиг. 1 измеренные корреляционные функции, были найдены спектры собственных чисел и собственные функции для начального и основного участков струи. Результаты расчетов приведены на фиг. 2–4. Собственные числа E_n расположены на спектрах в порядке убывания обобщенного волнового числа k_n , определенного следующим образом:

$$k_n = \left[\int_0^{\infty} \left(\frac{df_n}{dy} \right)^2 dy / \int_0^{\infty} f^2 dy \right]^{1/2} \quad (3.1)$$

Легко видеть, что в однородной турбулентности k_n совпадает с обычным волновым числом. При обезразмеривании энергии и обобщенного волнового числа в качестве масштаба длины был выбран диаметр сопла d , а в качестве масштаба скорости v — максимальное значение среднеквадратичных пульсаций скорости в сечении измерения: $v^2 = \max_y \langle u^2(y) \rangle =$

$\equiv \max_y R(y, y)$. По оси абсцисс на фиг. 2, $a-4$, a отложено безразмерное обобщенное волновое число $\kappa^0 = \kappa d$, по оси ординат на фиг. 2, a и 4 , a отложена безразмерная энергия $E^0 = E_n / (v^2 d)$. Энергия на фиг. 3, a выражена в произвольных единицах. Собственные числа на фиг. 2, $a-4$, a изображены вертикальными отрезками, причем сплошными линиями обозначены отрезки, соответствующие симметричным собственным функциям, а пунктирными — соответствующие антисимметричным собственным функциям. Собственные функции на всех фигурах расположены в порядке убывания обобщенного волнового числа.

На фиг. 2 приведены спектры и собственные функции для начального участка струи при скорости истечения 1,6 м/с (сплошные и пунктирные линии на фиг. 2, a и левые части фиг. 2, $b-\partial$). Здесь же помещены результаты расчета при скорости истечения 3,7 м/с (симметричным собственным функциям соответствуют отрезки штриховых, а антисимметричным — штрихпунктирных линий; собственные функции изображены в правых частях фиг. 2, $b-\partial$). Видно, что форма первых собственных функций и вид спектров несколько меняются. Это свидетельствует о влиянии числа Рейнольдса на структуру турбулентности.

Рассмотрим теперь вопрос о связи полученных результатов с так называемыми квазиупорядоченными (когерентными) структурами. Это понятие во многом основано на интуитивных соображениях, а его строгое определение неизвестно. Из интуитивных соображений можно ожидать, что в потоке доминирует вполне определенный тип пространственных колебаний скорости, например такой, как при движении тороидальных вихрей. При этом необходимо отметить, что при существовании в потоке возмущений поля скорости определенной формы не следует ожидать появления в одномерном пространственном спектре только одной «гармоники».

Действительно, пусть в потоке существует «стандартное» распределение пульсационной скорости вида $u = u_0(y, x - Ut)$, которое сносится как целое средней скоростью течения U . Тогда при $x = \text{const}$ и разных t будут фиксироваться разные распределения u . Поэтому в поперечном пространственном спектре будут наблюдаться разные собственные функции.

Если в потоке реализуется близкий к этому случай, то для описания таких упорядоченных возмущений следует изучать пространственно-временной спектр, определяемый из уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(y, y', t-t') \varphi(y, t) dy' dt' = E\varphi(y, t)$$

Поскольку решение зависит лишь от разности $t-t'$, то его можно искать в виде $\varphi = \varphi(y, \omega) \exp(i\omega t)$, а корреляция будет иметь вид

$$R(y, y', t-t') = R_0(y, y', \omega) \exp[i\omega(t-t')] \quad (3.2)$$

Можно предположить, что представляющему интерес возмущению соответствует вполне определенное значение ω , определяющее частоту, с которой мимо датчика проносятся такие возмущения. Величину $R(y, y', \omega)$ легко найти: согласно (3.2) надо измерить корреляцию между сигналами, пропущенными через узкополосные фильтры с центральной частотой ω .

При исследовании начального участка струи, вытекавшей со средней скоростью 1,6 м/с, было замечено, что сигнал, пропорциональный скорости, носит квазипериодический характер. Максимум энергии во временном спектре сигнала приходился на частоту 22,5 Гц, поэтому при измерении величины $R(y, y', \omega)$ сигналы с обоих датчиков пропускались через узкополосные фильтры с центральной частотой 22,5 Гц и полосой пропускания 8,5%. Для этого использовались два анализатора спектра SBA101 (RFT, ГДР). Изокорреляционные линии, соответствующие этому случаю, изображены на фиг. 1, e , а полученные в результате расчета спектр и собственные функции — на фиг. 3. Видно, что в спектре содержатся два отчетливо выделенных колебания с почти одинаковым масштабом (с близкими значениями κ). Суммарная энергия этих колебаний составляет 60% общей энергии, а их масштаб вдвое превышает масштабы остальных ко-

лебаний. На фиг. 3, б—д показаны собственные функции для этого случая. Их форма напоминает форму функций в предыдущих случаях, однако их вклад в суммарную энергию колебаний существенно больше.

Следует отметить, что исследования были проведены при не очень малых числах Рейнольдса (от $9 \cdot 10^3$ до $2 \cdot 10^4$), поэтому трудно ожидать, что реализуются один-два типа колебаний. Учитывая это замечание, можно считать, что описанный метод окажется полезным при изучении устойчивости крупномасштабных возмущений.

В заключение рассмотрим спектр, соответствующий развитому турбулентному течению на основном участке струи. Изокорреляционные линии, соответствующие этому случаю, изображены на фиг. 1, г. Пространственный спектр и собственные функции приведены на фиг. 4. Энергия, приходящаяся на первые пять собственных чисел, составляет 70% всей энергии. Это обстоятельство, возможно, существенно упрощает описание турбулентного течения. В самом деле, из уравнения Навье — Стокса можно получить систему уравнений для амплитуд — коэффициентов разложения поля скорости по любой системе ортонормированных функций. Частный случай такого разложения (разложение по гармоническим функциям) широко используется в теории однородной турбулентности. В общем случае неоднородной турбулентности разложения вида (1.5) в силу вышесказанного оказывается наиболее простым, что существенно облегчает решение (например, численное) такой системы уравнений. В такие урав-

нения войдут, в частности, величины вида $a_n = \int_{-\infty}^{\infty} U(y) f_n(y) dy$, где $U(y)$ —

средняя скорость. Значения a_n есть коэффициенты разложения поля средней скорости по системе собственных функций уравнения (1.2). Поэтому величину $a_n/\sqrt{E_n}$ можно интерпретировать как меру взаимодействия возмущений различного масштаба с полем осредненного движения. Так как профиль средней скорости симметричен, то взаимодействие будет происходить только с симметричными возмущениями. Для первых пяти симметричных собственных функций отношение $a_n/\sqrt{E_n}$ составляет $-4,2; 4,7; -3,2; -1,6; 0,8$ соответственно и убывает при дальнейшем увеличении обобщенного волнового числа. Видно, что взаимодействие средней скорости с крупными вихрями велико.

Авторы благодарны А. Н. Секундову за полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Townsend A. A. The structure of turbulent shear flow. Cambridge: Univ. Press, 1976. 429 p.
2. Рошко А. Структура турбулентных сдвиговых течений: новая точка зрения.— Ракетная техника и космонавтика, 1976, т. 14, № 10, с. 8—20.
3. Лозе М. Теория вероятностей. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 719 с.
4. Яглом А. М. Спектральные представления для различных классов случайных функций.— Тр. 4-го Всес. матем. съезда, 1961. Т. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1963, с. 250—273.
5. Lumley J. L. Stochastic tools in turbulence. New York: Acad. Press, 1970. 194 p.
6. Payne F. R., Lumley J. L. Large eddy structure of the turbulent wake behind a circular cylinder.— Phys. Fluids, 1967, v. 10, (supplement), p. 194—196.
7. Grant H. L. The large eddies of turbulent motion.— J. Fluid Mech., 1958, v. 4, № 2, p. 149—190.
8. Трихоми Ф. Интегральные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 299 с.
9. Phillips O. M. The irrotational motion outside a free turbulent boundary.— Proc. Cambr. Philos. Soc., 1955, v. 51, № 1, p. 220—229.
10. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
11. Сборник научных программ на ФОРТРАНе. М.: Статистика, 1974.

Москва

Поступила в редакцию
17.II.1981