

УДК 532.5.013.4:536.2

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В КРУГОВОМ ЦИЛИНДРЕ

ФИРСОВ Ю. В.

Решается задача определения предельных амплитуд акустических колебаний в цилиндрическом объеме тепловыделяющей среды, где неустойчивой по линейному приближению является одна или несколько мод. Одним из механизмов ограничения амплитуд неустойчивых акустических мод является перекачка энергии от них к затухающим модам при их нелинейном взаимодействии. Нелинейные взаимодействия плоских акустических волн в длинном канале рассмотрены в [1], здесь рассматривается взаимодействие смешанных продольно-поперечных акустических мод в закрытом цилиндрическом объеме. Выведены и исследованы уравнения взаимодействия двух и трех продольно-поперечных мод в квадратичном приближении методом медленно меняющихся амплитуд и фаз колебаний [2]. Рассмотрение проведено применительно к высокотемпературному газу, общие условия устойчивости которого по линейному приближению сформулированы в [3].

1. Уравнения термогазодинамики среды с внутренним теплоподводом при выполнении условий локального термодинамического равновесия и диффузионном описании тепловых потоков имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \rho \varepsilon + \nabla(\lambda \nabla T), \quad p = \rho R_0 T, \quad S = c_v \ln p \rho^{-1}$$

Здесь рассматривается случай, когда тепловыделение пропорционально плотности, λ — постоянный коэффициент лучистой теплопроводности. Влиянием вязкости пренебрегаем, так как вязкая диссипация акустических колебаний мала по сравнению с диссипацией обусловленной лучистой теплопроводностью. Следует заметить, что аналогичным образом можно было бы рассмотреть случай, когда тепловыделение и теплоотвод отсутствуют, а есть массоподвод.

Будем считать, что исходное стационарное состояние определяется условиями $\mathbf{V}_0 = 0$, $\rho_0 \varepsilon = -\nabla(\lambda \nabla T_0)$.

После наложения возмущений на стационарное состояние получим следующую систему уравнений при условии, что $L \nabla T_0 / T_0 \ll 1$:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + c_0(1 + \delta) \nabla \mathbf{u} + c_0 \mathbf{u} \nabla \delta = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + c_0(\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} = -\frac{c_0}{1 + \delta} \nabla \eta, \quad \gamma \eta = \delta + \theta + \delta \theta$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \mathbf{u} \nabla \eta + c_0(1 + \gamma \eta) \nabla \mathbf{u} = \frac{c_0}{L} \Gamma_1(\delta - \theta) + \frac{c_0 L}{Pe} \Delta \theta \quad (1.1)$$

$$\Gamma_1 = \frac{\varepsilon L}{c_p T c_0}, \quad \text{Pe} = \frac{c_0 L}{\kappa}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\rho_0 c_p}$$

$$\eta = \frac{p_1}{\rho_0 c_0^2}, \quad \delta = \frac{\rho_1}{\rho_0}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}_1}{c_0}, \quad \theta = \frac{T_1}{T_0}$$

где L — длина камеры; η , δ , \mathbf{u} , θ — безразмерные возмущения давления, плотности, скорости и температуры, величины, отмеченные индексом 1, обозначают отклонение соответствующих параметров от их стационарных значений, отмеченных индексом 0, а c_0 — постоянная скорость звука в среде. Ограничимся в дальнейшем только квадратичным приближением по амплитудам возмущений. Для многих задач параметры, характеризующие тепловыделение и теплоотвод, малы, т. е. Γ_1 , $1/\text{Pe} \ll 1$. При выполнении этих условий безразмерные амплитуды колебаний давления много больше амплитуд колебаний энтропии и поэтому можно воспользоваться квази-адиабатическим приближением [3].

При принятых допущениях система уравнений (1.1) приводится к виду

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + c_0 \nabla \eta = N_u, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \nabla \mathbf{u} = N_\eta + \frac{c_0}{L} \Gamma \left(1 + \frac{(\gamma-1)L^2}{\text{Pe} \Gamma} \Delta \right) \eta \quad (1.2)$$

$$\Gamma = (2-\gamma)\Gamma_1, \quad N_u = -c_0 [(\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} - \eta \nabla \eta], \quad N_\eta = -c_0 (\mathbf{u} \nabla \eta + \gamma \eta \nabla \mathbf{u})$$

откуда следует волновое уравнение с правой частью

$$-\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + c_0^2 \Delta \eta = c_0 \text{div} N_u - \frac{\partial}{\partial t} N_\eta - \frac{c_0}{L} \Gamma \left(1 + \frac{(\gamma-1)L^2}{\text{Pe} \Gamma} \Delta \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (1.3)$$

В этом уравнении первые два слагаемых в правой части характеризуют нелинейность гидродинамической системы, а третий — неконсервативность колебаний.

Уравнение (1.3) будем решать в замкнутом объеме цилиндрической камеры с жесткими стенками, граничные условия на которых имеют вид

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \eta}{\partial z} \right|_{z=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial \eta}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (1.4)$$

2. Решение линейного волнового уравнения с граничными условиями (1.4) представим в виде суммы стоячих волн

$$\eta = \sum A_{nml} \cos(\omega_{nml} t) \eta_{nml}, \quad \omega_{nml}^2 = c_0^2 (k_n^2 + \beta_{ml}^2)$$

$$\eta_{nml} = \cos(m\varphi) J_m(\beta_{ml} r) \cos(k_n z)$$

где A_{nml} — амплитуда, ω_{nml} — собственная частота мод колебаний с номерами n , m , l , значения k_n , β_{ml} определяются из граничных условий линейной задачи.

При этом $k_n = n\pi/L$ ($n=0, 1, \dots$), а β_{ml} являются корнями функции $J_m'(\beta_{ml} R) = 0$, R — радиус цилиндра, здесь $m=0, 1, \dots$ — номер функции Бесселя, $l=0, 1, \dots$ — номер корня функции Бесселя с фиксированным индексом m . В дальнейшем будем считать, что собственная частота ни одной из мод не равна нулю.

Нелинейные члены в волновом уравнении (1.3) приводят к взаимодействию различных мод колебаний. Будем искать решение полного урав-

нения (1.3) в виде

$$\eta = \sum a_{nmi} A_{nmi}(t) \cos(\omega_{nmi} t + \psi_{nmi}(t)) \eta_{nmi}, \quad \frac{1}{a_{nmi}^2} = \frac{1}{v} \int \eta_{nmi}^2 dv \quad (2.1)$$

Возмущение скорости найдем из первого уравнения без правой части системы (1.2), так как u в (1.3) везде входит в нелинейные слагаемые и поэтому учет более высокого порядка зависимости возмущений скорости от возмущений давления приведет к нелинейностям третьего порядка, которые здесь не учитываются.

Введем упрощающие обозначения $a_i = a_{nmi}$, $A_i = A_{nmi}$ и т. д., при таком выборе $a_i^2 A_i^2$ будет иметь смысл удвоенной полной энергии i -моды в объеме камеры. Зависимость A_i и ψ_i от координат в (2.1) не учитывается по аналогии с [1], где справедливость пренебрежения этой зависимостью показана для продольных акустических колебаний в ограниченном объеме с консервативными границами.

Будем считать, что амплитуды и фазы являются медленно меняющимися функциями времени, т. е.

$$\left| \frac{dA_i}{dt} \right| \ll \omega_i |A_i|, \quad \left| \frac{d\psi_i}{dt} \right| \ll \omega_i \quad (2.2)$$

Для решения уравнения (1.3) воспользуемся методом Галеркина и учтем линейные соотношения

$$\omega_i u_i = -c_0 \nabla \eta_i, \quad \omega_i \eta_i = c_0 \nabla u_i \quad (2.3)$$

После умножения левой и правой частей уравнения (1.3) на $a_i \eta_i$ и интегрирования по объему имеем с учетом ортогональности мод и условий (2.2) для каждой из рассматриваемых мод

$$2v\omega_i [A_i \dot{\sin}(\omega_i t + \psi_i) + A_i \dot{\psi}_i \cos(\omega_i t + \psi_i)] = a_i c_0 \int (\text{div } N_u) \eta_i dv - \quad (2.4)$$

$$- a_i \int \left(\frac{\partial}{\partial t} N_\eta \right) \eta_i dv + \frac{c_0 \Gamma \omega_i v}{L} \left(1 - \frac{(\gamma-1)L^2 \omega_i^2}{c_0^2 \text{Re } \Gamma} \right) A_i \sin(\omega_i t + \psi_i)$$

Метод решения уравнения (2.4) заключается в следующем: после подстановки u и η в правую часть и интегрирования для каждой моды сохраним только резонансные или близкие к резонансным члены, т. е. члены, имеющие одинаковое или близкое к одинаковому распределение по времени, а все остальные отбросим. После этого получается бесконечная система уравнений, описывающая поведение амплитуд и фаз рассматриваемых мод.

3. Ограничимся рассмотрением трех «почти» резонансных волн $\omega_3 = \omega_2 + \omega_1 + \Delta\omega$, $\Delta\omega \ll \omega_i$, $\omega_2 \neq 2\omega_1$, двухволновое взаимодействие $\omega_2 = 2\omega_1 + \Delta\omega$, $\Delta\omega \ll \omega_i$ описывается аналогично. Упростим нелинейности в правой части (2.4), будем считать, что $\omega_3 = \omega_2 + \omega_1$ (точный резонанс), отбрасывая при этом расстройку $\Delta\omega$, так как ее учет приводит к нелинейностям третьего порядка малости. Сначала упростим нелинейность, в которую входит N_η . Для этого используются линейные соотношения (2.3), а также то, что стенки жесткие. После несложных преобразований для каждой из трех мод имеем

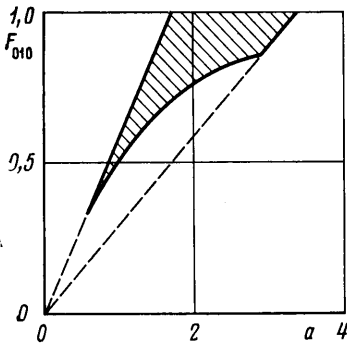
$$-a_i \int \left(\frac{\partial}{\partial t} N_\eta \right) \eta_i dv = \frac{\gamma+1}{2} \omega_i^2 a_i a_j a_k A_j A_k \left\{ \begin{array}{l} \cos(\omega_i t + \psi_3 - \psi_2) \\ \cos(\omega_i t + \psi_3 - \psi_1) \\ \cos(\omega_i t + \psi_1 + \psi_2) \end{array} \right\} \int \eta_i \eta_j \eta_k dv$$

$$\int \nabla (\mathbf{u} \nabla \mathbf{u}) \eta_i dv = \int \nabla (\eta \nabla \eta) \eta_i dv$$

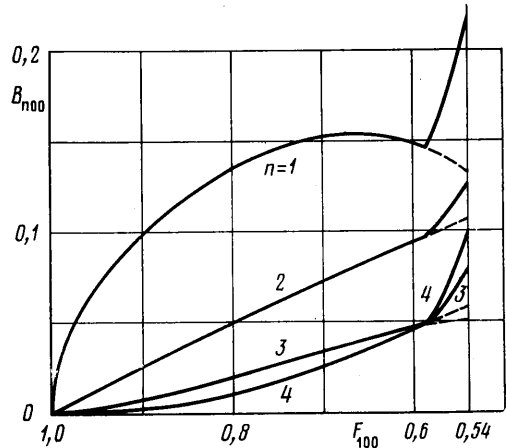
откуда следует

$$a_i c_0 \int (\operatorname{div} N_u) \eta_i dv = -c_0^2 a_i \int \nabla (\mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}) \eta_i dv = 0$$

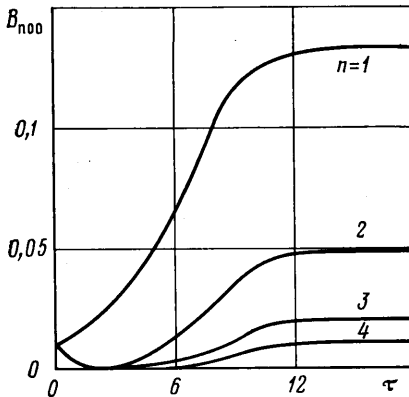
так как вследствие (2.3) поле скоростей квазипотенциально и $\operatorname{rot} \mathbf{u} \approx 0$.



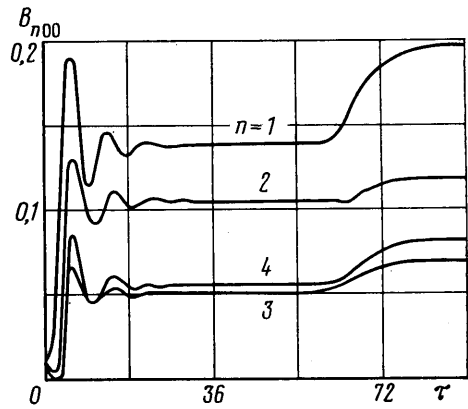
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Таким образом, можно выписать окончательную систему уравнений, описывающих взаимодействие трех резонансных мод

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= \nu_1 A_1 - b_1 A_2 A_3 \sin \Phi \\ \frac{dA_2}{dt} &= \nu_2 A_2 - b_2 A_1 A_3 \sin \Phi, \quad \frac{dA_3}{dt} = \nu_3 A_3 + b_3 A_1 A_2 \sin \Phi \\ \frac{d\Phi}{dt} &= \left(-\frac{b_1 A_2 A_3}{A_1} - \frac{b_2 A_1 A_3}{A_2} + \frac{b_3 A_1 A_2}{A_3} \right) \cos \Phi + \Delta \omega \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$v_1 = \frac{c_0 \Gamma}{2L} (1 - F^2), \quad v_2 = \frac{c_0 \Gamma}{2L} \left(1 - \frac{\omega_2^2 F^2}{\omega_1^2} \right), \quad v_3 = \frac{c_0 \Gamma}{2L} \left(1 - \frac{\omega_2^3 F^2}{\omega_1^2} \right).$$

$$F = \frac{\omega_1}{\omega_*}, \quad \omega_*^2 = \frac{c_0^2 \text{Re } \Gamma}{(\gamma - 1) L^2}$$

$$b_i = \frac{\gamma + 1}{4\nu} \omega_i a_i a_j a_k \int \eta_i \eta_j \eta_k dv \quad (3.2)$$

Здесь b_i — коэффициент перекачки энергии от моды к моде, F — параметр, характеризующий удаление от границы устойчивости по линейному приближению. Три уравнения на неизвестные функции ψ_i объединены в одно на $\Phi = \psi_3 - \psi_2 - \psi_1 - (\Delta\omega)t$. Заметим, что в первом уравнении системы (3.1) отсутствует слагаемое $\sim A_1 A_2$, а во втором $\sim A_1^2$ в силу того, что $\omega_2 \neq 2\omega_1$.

Аналогичным образом описывается взаимодействие двух резонансных волн в [4], а также в [1, 5].

4. Будем считать, что неустойчивыми по линейному приближению являются две моды: первая продольная и первая тангенциальная (1L и 1T)

$$\eta_{100} = \cos(k_1 z), \quad \eta_{010} = \cos \varphi J_1(\beta_{10} r)$$

$$k_1 = \frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{aR}, \quad \beta_{10} = \frac{1,84}{R}, \quad a = \frac{L}{R}$$

На фиг. 1 изображена область в координатах $F_{010} = \omega_{010}/\omega_*$, a , где неустойчивы по линейному приближению только 1T- и 1L-моды, а остальные устойчивы. Все дальнейшие рассуждения будут относиться именно к этой области, хотя могут быть распространены и на другие области графика.

Поскольку моды с большой частотой быстро затухают, ограничимся рассмотрением десяти ближайших по частотам мод к неустойчивым 1T- и 1L-модам. Эти моды для параметра $a=2$ (длина камеры равна диаметру) представлены ниже

Моды	1L	1T	1T1L	2T	2L	2T1L	1T2L	1R	1R1L	3T	2T2L	3L
$\omega_i R/c_0$	1,57	1,84	2,42	3,05	3,14	3,43	3,64	3,83	4,14	4,20	4,38	4,71

Вообще говоря, неустойчивые моды могут взаимодействовать со всеми остальными, но так как стенки жесткие, то число взаимодействий уменьшается из-за того, что коэффициенты перекачки, вычисленные по (3.2), во многих случаях равны нулю. Но есть и еще одна причина уменьшающая число взаимодействий между модами, — это большая расстройка. В самом деле, если $\Delta\omega \sim \omega_i$, то $d\Phi/dt \sim \Delta\omega \sim \omega_i$ и метод медленно меняющихся амплитуд и фаз неприменим.

Итак, оставляя связи с малой расстройкой и вычисляя коэффициенты перекачки по формуле (3.2), находим, что наиболее существенным образом 1L-мода взаимодействует только с продольными модами, а 1T — с первой радиальной (1R), а также с 1T1L и 1R1L из рассматриваемых двенадцати мод. Ниже приведены расстройки между взаимодействующими модами при различных a .

$\frac{j}{a}$	1	2	2	2	2
$\Delta\omega_j/\omega_{010}$	Любое	2,0	2,4	2,6	2,856
	0,0808	0,066	0,028	0,014	0,0

Здесь $j=1$ соответствует взаимодействию 1T- и 1R-моды, $j=2$ — 1T, 1T1L и 1R1L.

5. Рассмотрим сначала взаимодействие плоских мод. Система, описывающая взаимодействие всех плоских волн (бесконечного числа) при отсутствии расстройек, записана в [5]. В [1] получены предельные амплитуды при взаимодействии двух и трех плоских волн, а также найдены границы применимости соответствующих приближений. В данной работе были подсчитаны по схеме Адамса трех- и четырехволновые приближения. Это позволило не только получить предельные амплитуды и границу устойчивости, но и график установления по времени этих предельных амплитуд.

При рассмотрении взаимодействия четырех мод решалась система

$$\begin{aligned} \frac{dB_{100}}{dt} &= \nu_{100}B_{100} + b_{100}B_{100}^*B_{200} + b_{100}B_{200}^*B_{300} + b_{100}B_{300}^*B_{400} \\ \frac{dB_{200}}{dt} &= \nu_{200}B_{200} + b_{100}B_{100}^2 + b_{200}B_{100}^*B_{300} + b_{200}B_{200}^*B_{400} \\ \frac{dB_{300}}{dt} &= \nu_{300}B_{300} + b_{300}B_{100}B_{200} + b_{300}B_{100}^*B_{400} \\ \frac{dB_{400}}{dt} &= \nu_{400}B_{400} + b_{200}B_{200}^2 + b_{400}B_{100}B_{300} \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\frac{L}{\pi c_0} b_{100} = 0,39, \quad b_{n00} = n b_{100}, \quad \gamma = 1, 2, \quad B_i = A_i e^{i\psi_i}, \quad \nu_{n00} = \frac{c_0 \Gamma}{2L} [1 - (nF_{100})^2]$$

При этом были получены следующие результаты: во-первых, граница применимости данного четырехволнового приближения шире, чем трехволнового (предельная $F_{100} = 0,62$), здесь же она по крайней мере не больше $F_{100} = 0,54$. Были обнаружены три разных режима достижения предельных амплитуд, предельные амплитуды показаны на фиг. 2. Штриховой линией обозначены промежуточные неустойчивые предельные амплитуды. При $F_{100} = 1,0 - 0,57$ режим установления амплитуд по времени $\tau = c_0 \Gamma t / 2L$ показан на фиг. 3 при параметрах $\omega_{100} L / c_0 \Gamma = 10$, $F_{100} = 0,8$. При $F_{100} = 0,57 - 0,54$ предельные амплитуды достигаются как на фиг. 4 ($F_{100} = 0,55$). На ней хорошо видны промежуточные неустойчивые предельные амплитуды, а при $F_{100} = 0,54 - 0,5$ предельные амплитуды быстро осциллируют, но остаются все еще ограниченными. Здесь следует отметить, что при таких быстрых осцилляциях перестает выполняться первоначальное допущение о медленно меняющихся амплитудах и фазах и поэтому дальше $F_{100} = 0,54$ рассматривать решение (5.1) не имеет смысла. Дальше $F_{100} = 0,5$ решение не рассматривалось.

При рассмотрении взаимодействия четырех мод был подтвержден вывод [1], что вблизи границы устойчивости ($F_{100} \sim 1,0$) вполне можно пользоваться двухволновым приближением, на достаточном же удалении от нее график установления предельных амплитуд сильно усложняется.

При рассмотрении системы уравнений, описывающей взаимодействие трех плоских волн, выяснилось, что предельные амплитуды полностью совпадают с полученными в работе [1]. Процесс установления быстрее всего протекает при $F_{100} = 0,83 - 0,72$, время установления амплитуд $t \sim 60t_0$, t_0 — период колебаний первой моды, в то время как при $F_{100} \approx 0,95$ $t \sim 200t_0$, а при $F_{100} \approx 0,65$ $t \sim 150t_0$. Эта закономерность проявляется и для всех других взаимодействий.

6. Рассмотрим взаимодействие между смешанными модами: $1T$, $1R$, $1T1L$ и $1R1L$. Система уравнений для этих мод имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dB_{010}}{dt} &= \nu_{010}B_{010} + b_{010}B_{010}^*B_{001} e^{-i(\Delta\omega_1)t} + b_{010}B_{110}^*B_{101} e^{i(\Delta\omega_2)t} \\ \frac{dB_{001}}{dt} &= \nu_{001}B_{001} + b_{010}B_{010}^2 e^{i(\Delta\omega_1)t} \\ \frac{dB_{110}}{dt} &= \nu_{110}B_{110} + b_{110}B_{010}^*B_{101} e^{i(\Delta\omega_2)t} \end{aligned}$$

$$\frac{dB_{101}}{dt} = \nu_{101}B_{101} + b_{101}B_{010}B_{110}e^{-i(\Delta\omega_2)t}, \quad \frac{b_{010}}{\omega_{110}} = \frac{b_{110}}{\omega_{110}} = \frac{b_{101}}{\omega_{101}} = 0,32$$

Эта система решалась при различных $\Delta\omega_2$, указанных выше. Оказалось, что B_{110} , $B_{101} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ даже при $a=2,856$, когда $\Delta\omega_2=0$, и для отыскания предельных амплитуд $1T$ - и $1R$ -мод достаточно рассмотреть систему, отсеченную штриховой линией. Эта система хорошо известна в литературе, например рассмотрена в [1].

Таким образом, в отличие от плоских волн, частоты которых образуют гармонический ряд ($\omega_n = n\omega_1$) и квадратичное приближение хорошо описывает взаимодействие этих волн между собой, при рассмотрении взаимодействия продольно-поперечных мод нужно учитывать нелинейности более высокого порядка малости, так как из-за «негармоничности» частот колебаний взаимодействие между модами в квадратичном приближении очень слабое.

В заключение хочется поблагодарить К. И. Артамонова за постановку задачи и научное руководство, А. П. Воробьева за постоянное внимание к работе и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Артамонов В. И., Воробьев А. П. Нелинейная стабилизация неустойчивых акустических колебаний в ограниченной тепловыделяющей среде.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 6, с. 34–41.
2. Найфэ А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
3. Артамонов К. И. Термоакустическая устойчивость высокотемпературного тепловыделяющего газа.— Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 3, с. 563–566.
4. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.
5. Фирсов Ю. В. Нелинейное взаимодействие волн в активной среде.— Тр. 23-й Научн. конф. МФТИ, 1977. Долгопрудный, 1978, с. 6–11.

Москва

Поступила в редакцию
1.IV.1981