**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1982**

УДК 532.517.2

ДИСПЕРСИЯ ПРИМЕСИ В ПУЛЬСИРУЮЩЕМ ПОТОКЕ

ПРИГОЖИН Л. Б.

Предложенная Тэйлором [1] одномерная модель дисперсии примеси приближенно описывает распределение средней по сечению трубы концентрации примеси в пуазейлевском потоке. Арис [2] уточнил значение эффективного коэффициента диффузии в модели Тэйлора и решил задачу для общего случая стационарного течения в канале с произвольным сечением. В настоящее время опубликовано большое количество работ, посвященных конкретным применениям этой теории ([3–5] и др.). В [6–8] строятся дисперсионные модели, уточняющие модель Тэйлора – Ариса при малых значениях времени и совпадающие с ней при больших временах.

Рассматриваемое в этих работах ускорение процесса перемешивания примеси при одновременном действии молекулярной диффузии и конвективного переноса имеет место и в нестационарных потоках. В частности, наличие пульсаций скорости влияет на рост дисперсии даже если в каждой точке потока средняя скорость течения равна нулю.

В данной работе теория Тэйлора – Ариса переносится на случай ламинарных потоков с периодически изменяющейся скоростью течения.

1. Дисперсионная модель. Рассматривается ламинарный поток жидкости в бесконечной прямой трубе с сечением Ω площади S. Предполагается, что скорость течения v всюду направлена вдоль оси трубы, имеет период T_0 по времени и одинакова в каждом сечении. Начало координат выбрано движущимся со средней скоростью течения, так что

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+T_0}\int\limits_{\Omega} v\,d\Omega\,dt\equiv 0 \qquad (1.1)$$

В безразмерных координатах уравнение конвективной диффузии примеси в потоке принимает вид

$$\frac{\partial c}{\partial t}+v\frac{a}{D}\frac{\partial c}{\partial z}=\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}$$

$$(x,\ y,\ z)\in\Omega\times R^1,\ t>0 \qquad (1.2)$$

$$\left(x=\frac{x_0}{a},\ y=\frac{y_0}{a},\ z=\frac{z_0}{a},\ t=\frac{Dt_0}{a^2}\right)$$

На решение $c(x,\ y,\ z,\ t)$ накладываются условия ограниченности при $z\to\pm\infty$ и краевое условие

$$\frac{\partial c}{\partial n}=0,\quad (x,y,z)\in\partial\Omega\times R^1 \qquad (1.3)$$

Здесь $a=\sqrt{S}$ – характерный линейный размер области Ω, D – молекулярный коэффициент диффузии, c – концентрация, n – нормаль к поверхности трубы, $\partial\Omega$ – граница области Ω.

Одномерная дисперсионная модель Тэйлора — Ариса в безразмерных координатах (z, t) запишется в виде

$$\frac{\partial c^*}{\partial t}=\frac{D^*}{D}\frac{\partial^2 c^*}{\partial z^2},\qquad z\in R^1,\quad t>0 \tag{1.4}$$

В этом уравнении D^* — эффективный коэффициент диффузии, c^* — средняя по сечению концентрация примеси, ограниченная при $z\to\pm\infty$. Начальные значения c и c^* при $t=0$ в задачах (1.2)—(1.3) и (1.4) предполагаются согласованными:

$$c^*(z,0)=\int\limits_\Omega c(x,y,z,0)\,d\Omega$$

(площадь области Ω в переменных (x, y) равна единице).

Тэйлоровский эффективный коэффициент диффузии выбирается в случае стационарных течений из условия асимптотического равенства дисперсий, определяемых по конвективной и упрощенной моделям.

В случае пульсирующих течений интерес обычно представляют средние за период изменения скорости значения концентрации. Эффективный коэффициент диффузии для такого типа потоков естественно определить как коэффициент в модели Тэйлора — Ариса, при котором отношение дисперсии примеси к осредненной за период колебаний величине дисперсии в конвективной модели стремится к единице при $t\to\infty$.

2. Метод моментов. Рассмотрим осевые моменты распределения концентрации и их средние по сечению Ω значения [2]

$$\mu_p(x,y,t)=\int\limits_{R^1} z^p c(x,y,z,t)\,dz$$

$$m_p(t)=\int\limits_\Omega \mu_p(x,y,t)\,d\Omega,\qquad p=0,1,2,\ldots$$

в предположении, что при $t=0$ эти величины существуют. Используя уравнения (1.2)—(1.3), получим последовательность начально-краевых задач (2.1) и задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (2.2):

$$\frac{\partial\mu_p}{\partial t}+\Lambda\mu_p=\frac{pa}{D}v\mu_{p-1}+p(p-1)\mu_{p-2}$$

$$\left.\frac{\partial\mu_p}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0,\quad \mu_p|_{t=0}=\mu_p{}^0(x,y)\qquad \Lambda=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{2.1}$$

$$\frac{dm_p}{dt}=p(p-1)m_{p-2}+\frac{pa}{D}\int\limits_\Omega v\mu_{p-1}\,d\Omega \tag{2.2}$$

$$m_p(0)=\int\limits_\Omega \mu_p{}^0\,d\Omega$$

Предположим также, что граница $\partial\Omega$ области Ω состоит из конечного числа гладких кривых. Тогда существует полная в $L_2(\Omega)$ ортонормированная система собственных функций $\{1, u_1, u_2,\ldots\}$ с собственными значениями $0=\lambda_0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots$ оператора Λ, таких, что $\partial u_i/\partial n|_{\partial\Omega}=0$.

Решение задачи (2.1) может быть выражено через функцию Грина G и коэффициенты разложения функции μ_p^0 в ряд Фурье по системе $\{u_i\}$:

$$\mu_p=\mu_{p0}+\sum_{i=1}^{\infty}\mu_{pi}e^{-\lambda_i t}u_i(x,y)+p\int_0^t\int_\Omega G(x,\xi,y,\eta,t-\tau)\times$$

$$\times\left\{\frac{a}{D}v\mu_{p-1}+\mu_{p-2}(p-1)\right\}d\xi\,d\eta\,d\tau \qquad (2.3)$$

$$G(x,\xi,y,\eta,t-\tau)=1+\sum_{i=1}^{\infty}e^{-\lambda_i(t-\tau)}u_i(x,y)u_i(\xi,\eta)$$

$$\mu_{pi}=\int_\Omega \mu_p{}^0 u_i\,d\Omega$$

При $p=0$

$$\mu_0(x,y,t)=\mu_{00}+\sum_{i=1}\mu_{0i}e^{-\lambda_i t}u_i(x,y) \qquad (2.4)$$

$$m_0(t)\equiv\mu_{00} \qquad (2.5)$$

Тождество (2.5) выражает неизменность количества примеси в системе.

Коэффициенты $v_i(t)$ разложения функции v в ряд

$$v=v_0(t)+\sum_{i=1}^{\infty}v_i(t)u_i(x,y) \qquad (2.6)$$

можно ввиду ее периодичности разложить в тригонометрические ряды Фурье

$$v_i=v_{i0}+\sum_{j=1}^{\infty}(p_{ij}\cos(\omega_j t)+q_{ij}\sin(\omega_j t)) \qquad (2.7)$$

$$\omega_j=\frac{2\pi j}{T},\qquad T=\frac{DT_0}{a^2}$$

Здесь T — период функции v по t, а $v_{00}=0$ в силу условия (1.1).

Вычисляя μ_1 из (2.3) с учетом (2.4), (2.6), (2.7) и отбрасывая исчезающие при $t\to\infty$ члены, получим

$$\mu_1\sim\frac{a}{D}(\mu_{00}f(x,y,t)+M_1) \qquad (2.8)$$

$$f=\sum_{i=1}^{\infty}u_i\left\{\sum_{j=1}^{\infty}(p_{ij}(\lambda_i\cos(\omega_j t)+\omega_j\sin(\omega_j t))+\right.$$

$$\left.+q_{ij}(\lambda_i\sin(\omega_j t)-\omega_j\cos(\omega_j t)))\frac{1}{\omega_j^2+\lambda_i^2}+\frac{v_{i0}}{\lambda_i}\right\}+$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p_{0j}\sin(\omega_j t)-q_{0j}\cos(\omega_j t)}{\omega_j},\qquad M_1=\text{const}$$

Здесь знак $\sim$ означает равенство с точностью до $O(te^{-\lambda_1 t})$, функция f — периодическая.

Из соотношения (2.8) следует, что центр тяжести примеси при больших t совершает периодические колебания относительно некоторой точки, движущейся со средней скоростью течения.

Перейдем к определению дисперсии примеси. В модели Тэйлора — Ариса (1.4) дисперсия $m_2{}^*$ растет с постоянной скоростью

$$\frac{dm_2{}^*}{dt}=2\mu_{00}\frac{D^*}{D} \tag{2.9}$$

Изменение дисперсии примеси в рамках конвективной модели описывается уравнением (2.2) при $p=2$. С учетом (2.5) и (2.8) имеем

$$\frac{dm_2}{dt}\sim 2\left(\mu_{00}+\frac{a^2}{D^2}\int_{\Omega} v(\mu_{00}f+M_1)\,d\Omega\right)$$

Пусть $\langle\ \rangle$ — оператор осреднения:

$$\langle\varphi\rangle(t)=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\varphi(\tau)\,d\tau$$

Поскольку операторы $\langle\ \rangle$ и d/dt перестановочны, осредненная дисперсия, равная дисперсии осредненного распределения концентрации, меняется со скоростью

$$\frac{d\langle m_2\rangle}{dt}\sim 2\left(\mu_{00}+\frac{a^2}{TD^2}\int_t^{t+T}\int_{\Omega} v(\mu_{00}f+M_1)\,d\Omega\,d\tau\right)$$

Вычисляя интеграл в правой части, получим

$$\frac{d\langle m_2\rangle}{dt}\sim 2\mu_{00}\left(1+\frac{a^2}{D^2}\sigma\right) \tag{2.10}$$

$$\sigma=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p_{ij}{}^2+q_{ij}{}^2}{\lambda_i{}^2+\omega_j{}^2}\lambda_i+\sum_{i=1}\frac{v_{i0}{}^2}{\lambda_i} \tag{2.11}$$

Из (2.9) и (2.10) следует, что независимо от начального распределения примеси

$$\lim_{t\to\infty}\frac{m_2{}^*}{\langle m_2\rangle}=1$$

если

$$D^*=D+\frac{a^2\sigma}{D} \tag{2.12}$$

Отметим, что коэффициенты ряда Фурье функции $v_0(t)$ не вошли в выражение (2.11). Лишь приводящие к стратификации потока составляющие скорости способствуют ускорению перемешивания.

3. Сопряженная задача. Практическое вычисление эффективного коэффициента диффузии (2.12) с помощью ряда (2.11) затруднительно. Покажем, что введенный в п. 2 коэффициент σ можно выразить через решение задачи

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}+\Lambda u=v, \qquad (x,y)\in\Omega, \qquad 0\leqslant t\leqslant T\\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0, \qquad u|_{t=0}=u|_{t=T}\end{gathered} \tag{3.1}$$

С помощью метода Фурье может быть доказано следующее утверждение.

Если v — непрерывно дифференцируемая по t функция со значениями в $L_2(\Omega)$, заданная на окружности S^1 длины T, и выполнено условие

$$\int_0^T\int_\Omega v\,d\Omega\,dt=0$$

то решение задачи (3.1) существует и единственно с точностью до константы в классе непрерывно дифференцируемых по t функций со значениями в пространстве Соболева $H_1(\Omega)$, заданных на S^1.

Решение может быть представлено в виде ряда

$$u=U_0+\int_0^t v_0\,d\tau+\sum_{i=1}^\infty\left\{g_ie^{-\lambda_it}+\int_0^t e^{-\lambda_i(t-\tau)}v_i\,d\tau\right\}u_i \tag{3.2}$$

$$g_i=\int_0^T e^{-\lambda_i(T-\tau)}v_i\,d\tau/(1-e^{-\lambda_it})$$

сходящегося в $H_1(\Omega)$ равномерно по t. Здесь $v_i(t)$ — коэффициенты ряда (2.6), а U_0 — произвольная постоянная. Нетрудно показать, что из (3.2) следует равенство

$$\sigma=\frac{1}{T}\int_0^T\int_\Omega(\nabla u,\nabla u)\,d\Omega\,dt$$

справедливое при любом значении U_0.

Поскольку u — решение задачи (3.1), это равенство можно записать иначе:

$$\sigma=\frac{1}{T}\int_0^T\int_\Omega uv\,d\Omega\,dt \tag{3.3}$$

Используя (3.3) и возвращаясь к переменным x_0, y_0, t_0, из (2.12) получим окончательное выражение для эффективного коэффициента диффузии

$$D^*=D+\frac{1}{D}\left(\frac{1}{ST_0}\int_0^{T_0}\int_\Omega u_0v\,d\Omega\,dt_0\right) \tag{3.4}$$

где $u_0(x_0, y_0, t_0)$ есть T_0 — периодическое решение задачи

$$\frac{1}{D}\frac{\partial u_0}{\partial t_0}-\Delta u_0=v(x_0,y_0,t_0) \tag{3.5}$$

$$\left.\frac{\partial u_0}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0 \tag{3.6}$$

В стационарном случае из (3.4)–(3.6) может быть получено известное решение [2].

4. Пример. Рассмотрим течение ньютоновской несжимаемой жидкости в круглой трубе радиуса R, установившееся под действием гармонически изменяющегося перепада давления

$$-\frac{dP}{dz}=\rho(\chi_0+\chi_1\cos(\omega_0 t_0))$$

где ρ – плотность жидкости.

Введем характерные масштабы для стационарной и пульсирующей компонент скорости, равные средним скоростям течения в стационарных потоках при перепадах давления – $dP_i/dz_0=\rho\chi_i$ $(i=0,1)$. В случае круглой трубы эти величины равны $V_i=\chi_i R^2/8\nu$, где ν – вязкость жидкости. Скорость течения в пульсирующем потоке относительно выбранного начала координат определяется формулой [9]

$$v=V_0\left(1-2\left(\frac{r_0}{R}\right)^2\right)+\frac{8V_1}{H^2}\left(B\left(\frac{r_0}{R}\right)\cos(\omega_0 t_0)+\left(1-A\left(\frac{r_0}{R}\right)\right)\sin(\omega_0 t_0)\right)$$

$$A(r)=A_1\operatorname{bei}(Hr)+B_1\operatorname{ber}(Hr)$$

$$B(r)=A_1\operatorname{ber}(Hr)-B_1\operatorname{bei}(Hr)$$

$$A_1=\frac{\operatorname{bei}H}{\operatorname{bei}^2H+\operatorname{ber}^2H},\qquad B_1=\frac{\operatorname{ber}H}{\operatorname{bei}^2H+\operatorname{ber}^2H}$$

где ber и bei – функции Кельвина, а $H=R\sqrt{\omega_0/\nu}$ – безразмерная частота колебаний. Составляющую скорости $8V_1\sin(\omega_0 t_0)/H^2$, не влияющую на осредненную дисперсию, можно отбросить. Решение уравнения (3.5) будем искать в виде

$$u_0(r_0,t_0)=R^2\left(V_0E\left(\frac{r_0}{R}\right)+\frac{8V_1}{H^2}\left\{F\left(\frac{r_0}{R}\right)\cos(\omega_0 t_0)+G\left(\frac{r_0}{R}\right)\sin(\omega_0 t_0)\right\}\right)$$

При этом выражение (3.4) примет вид

$$D^*=D+\frac{V_0^2R^2}{D}k_0+\frac{V_1^2R^2}{D}k_1 \tag{4.1}$$

$$k_0=2\int_0^1 rE(r)(1-2r^2)\,dr \tag{4.2}$$

$$k_1=\frac{64}{H^4}\int_0^1 r(B(r)F(r)-A(r)G(r))\,dr \tag{4.3}$$

Здесь функции $E(r)$, $F(r)$, $G(r)$ – решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dE}{dr}\right)=1-2r^2,\qquad W^2F+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dG}{dr}\right)=A(r)$$

$$W^2G-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dF}{dr}\right)=B(r)$$

$$\left.\frac{dE}{dr}\right|_0=\left.\frac{dE}{dr}\right|_1=\left.\frac{dF}{dr}\right|_0=\left.\frac{dF}{dr}\right|_1=\left.\frac{dG}{dr}\right|_0=\left.\frac{dG}{dr}\right|_1=0$$

а безразмерная диффузионная частота $W=R\sqrt{\omega_0/D}=H\sqrt{\mathrm{Sc}}$, где $\mathrm{Sc}=\nu/D$ – критерий Шмидта. Определение функции $E(r)$ и вычисление интеграла (4.2) не вызывают трудностей. Полученный коэффициент $k_0 = {}^1/_{48}$ является коэффициентом Тэйлора.

При $\mathrm{Sc}\neq 1$ находим

$$F = a_1 \operatorname{bei}(Hr) + a_2 \operatorname{ber}(Hr) + a_3 \operatorname{bei}(Wr) + a_4 \operatorname{ber}(Wr)$$

$$G = -a_2 \operatorname{bei}(Hr) + a_1 \operatorname{ber}(Hr) - a_4 \operatorname{bei}(Wr) + a_3 \operatorname{ber}(Wr)$$

$$a_1 = \frac{A_1}{W^2 - H^2}, \qquad a_2 = \frac{B_1}{W^2 - H^2}$$

а коэффициенты a_3 и a_4 находятся из краевых условий в точке $r=1$. Опуская громоздкие выкладки, приведем результат вычисления интеграла (4.3)

$$k_1 = \frac{64}{H^3(H^4 - W^4)} \left\{ \frac{H}{W} \frac{(\operatorname{ber}' H)^2 + (\operatorname{bei}' H)^2}{(\operatorname{ber}' W)^2 + (\operatorname{bei}' W)^2} (\operatorname{ber} W \operatorname{ber}' W + \operatorname{bei} W \operatorname{bei}' W) - \right.$$

$$\left. - \operatorname{ber} H \operatorname{ber}' H - \operatorname{bei} H \operatorname{bei}' H \right\} \qquad (4.4)$$

где штрих означает дифференцирование.

Выражение (4.4) имеет устранимую особенность при $H=W$ и в случае $\mathrm{Sc}=1$ коэффициент k_1 можно вычислить по правилу Лопиталя. Разлагая функции Кельвина, входящие в (4.4) в ряд Тэйлора при малых значениях H и W, получим, что в квазистационарных режимах величина k_1 близка к ${}^1/_{96}$.

Используя (2.11), можно показать, что при гармоническом изменении перепада давления аналогичное соотношение $k_1 \approx k_0/2$ справедливо для квазистационарных потоков в каналах с любым сечением, если в формуле (4.1) под R понимать характерный линейный размер области, а величины V_0 и V_1 выбирать так же, как в рассмотренном примере. При увеличении H и W коэффициент k_1 стремится к нулю, что объясняется уменьшением амплитуды колебаний и деформацией профиля скорости с ростом частоты [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Taylor G.* Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube.— Proc. Roy. Soc. ser. A, 1953, v. 219, № 1137, p. 186–203.
2. *Aris R.* On the disperison of a solute in a fluid flowing through a tube.— Proc. Roy. Soc., ser A, 1956, v. 235, № 1200, p. 67–77.
3. *Fan L. T., Wang C. B.* Dispersion of matter in non-Newtonian laminar flow through a circular tube.— Proc. Roy. Soc. Ser. A., 1966, v. 292, № 1429, p. 203–208.
4. *Mazumder B. S.* Dispersion of solutes in combined free and forced convective flow through a channel.— Acta Mech., 1979, v. 32, № 4, p. 211–216.
5. *Achwal S. K., Shenoy A. V.* Axial dispersion in an annulus under various flow conditions.— Canad. J. Chem. Eng., 1980, v. 58, № 3, p. 419–421.
6. *Gill W. N., Sankarasubramanian R.* Exact analysis of unsteady convective diffusion.— Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1970, v. 316, № 1526, p. 341–350.
7. ***Марон В. И.*** Распространение примеси в ламинарном потоке в круглой трубе.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 3, с. 97–103.
8. *De Gance A. E., Johns L. E.* On the construction of dispersion approximations to the solution of the convective diffusion equation.— A. I. Ch. E. Journal, 1980, v. 26, № 3, p. 411–419.
9. *Галиуллин Р. Г., Репин В. Б., Халитов Н. Х.* Течение вязкой жидкости и теплообмен тел в звуковом поле. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1978. 128 с.

Москва

Поступила в редакцию 28.I.1981