получим, что явление параметрического резонанса для первой гармоники будет иметь место при частотах вертикальных колебаний Ω, лежащих в интервале $4{,}325 \leqslant \Omega \leqslant 4{,}475$ с$^{-1}$, т. е. рассмотренный эффект должен наблюдаться в реализуемых лабораторно условиях.

В заключение автор благодарит С. В. Нестерова за интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
2. *Нестеров С. В.* Исследование по нелинейной теории гравитационных волн: Дис. на соискание уч. ст. докт. физ.-мат. наук. М., МЭИ, 1972.
3. *Секерж-Зенькович С. Я., Калиниченко В. А.* О возбуждении внутренних волн в двухслойной жидкости вертикальными колебаниями.– Докл. АН СССР, 1979, т. 249, № 4, с. 797–799.
4. *Краусс В.* Внутренние волны. Л.: Гидрометеоиздат, 1968. 272 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.II.1981

УДК 533.6.011:662.6

К ВИХРЕВОЙ ТЕОРИИ НЕСУЩЕГО ВИНТА

АНИКИН В. А.

Расчет аэродинамических характеристик винта связан с определением поля возмущенных скоростей. Для этих целей разработаны вихревые модели винта [1–4, 7]. В рамках линейной модели расчет поля индуктивных скоростей основан на применении формулы Био – Савара к скошенным винтовым полубесконечным вихрям. Интегрирование по полубесконечной области и, кроме того, осциллирующий характер функций требуют для расчета поля скоростей винта значительных затрат времени ЭВМ. В связи с этим в приложениях получила широкое распространение дисковая вихревая теория винта, в которой истинные индуктивные скорости заменяются средними по времени. В результате интегрирование выполняется по конечному отрезку, а трудоемкость расчета резко сокращается. Вносимая в расчет погрешность быстро убывает с ростом числа лопастей.

В настоящее время известны формулы для средних по времени индуктивных скоростей винта для ряда расчетных случаев [4–6], допускающие их эффективную реализацию на ЭВМ.

В данной работе приводятся формулы для всех компонент средней по времени индуктивной скорости в произвольной точке пространства.

Полученные результаты могут найти применение при исследовании аэродинамических характеристик комбинации несущих винтов, взаимовлияния винта и крыла в линейной постановке, а также при расчете истинных индуктивных скоростей от удаленного вихревого следа в линейной и нелинейной постановках [4, 7].

1. Будем рассматривать k-лопастный винт правого вращения, помещенный в однородный невозмущенный поток. Оси правой системы координат поместим в центр винта так, что ось Y будет перпендикулярна плоскости диска, в которой движутся лопасти винта, вращающегося с угловой скоростью ω, а ось X лежит в плоскости диска и направлена навстречу потоку.

Опишем вихревую модель винта. Лопасти винта схематизируются радиальными отрезками вихрей с переменной по радиусу ρ и постоянной по азимуту θ циркуляцией Γ. Непрерывный вихревой слой, стекающий с лопастей со скоростью V, образует в пространстве скошенную винтовую поверхность S постоянного шага, простирающуюся до бесконечности. Ось вихревой колонны образует с осью X угол α. Причем $\alpha<0$, если колонна отходит от винта вниз.

Координаты точки (x_*, y_*, z_*), в которой вычисляется индуктивная скорость, выразим через полярный радиус r и азимут ψ, отсчитываемый от отрицательной полуоси X в направлении вращения винта

$$x_* = -r\cos\psi, \qquad y_* = y, \qquad z_* = r\sin\psi \tag{1.1}$$

Будем пользоваться далее относительными величинами, при этом линейные размеры будем относить к радиусу винта R, скорости – к ωR, циркуляции – к ωR^2.

Будем исходить из следующих выражений для компонент средней по времени скорости, индуцируемой вихревой системой винта в точке (1.1)

$$v_{ai}=\frac{k}{4\pi V}\int_0^1 \Gamma'(\rho) I_{ai}(\rho,r,y,\psi,V,\alpha)\,d\rho \qquad i=1,2,3 \tag{1.2}$$

где

$$a_1=x,\qquad a_2=y,\qquad a_3=z,$$

$$I_x(\rho,r,y,\psi,V,\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho\cos\theta\,(L\sin\alpha-y)+VL_z\sin\alpha}{L(L^*+L_x\cos\alpha)}\,d\theta$$

$$I_y(\rho,r,y,\psi,V,\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^2-\rho r\cos\theta}{L^2}\left(1+\frac{y}{l^2}\,\frac{yL_x\cos\alpha+l^2\sin\alpha}{L^*+L_x\cos\alpha}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\rho r\sin(\theta-\psi)L_z\cos\alpha}{l^2(L^*+L_x\cos\alpha)}+\frac{VL_z\cos\alpha}{L(L^*+L_x\cos\alpha)}\right]d\theta$$

$$I_z(\rho,r,y,\psi,V,\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-\rho\sin\theta\,(L\sin\alpha-y)+V(y\cos\alpha+L_x\sin\alpha)}{L(L^*+L_x\cos\alpha)}\,d\theta$$

$$l=\sqrt{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta-\psi)}$$

$$L=\sqrt{y^2+l^2},\qquad L^*=L-y\sin\alpha$$

$$L_x=\rho\cos\theta-r\cos\psi,\qquad L_z=\rho\sin\theta-r\sin\psi$$

а штрих при Γ означает производную по ρ.

Соотношения (1.2) получаются при подстановке в формулы Био – Савара координат точки (1.1) и уравнений вихревой поверхности S в координатной форме (см. [4]) с последующим осреднением индуктивных скоростей по времени. Несколько в иной форме соотношения (1.2) получены в [6].

Функции $I_{ai}(\rho, r, y, \psi, V, \alpha)$ суть функции влияния, выражающие индуктивное воздействие от элементарной вихревой структуры винта единичной интенсивности в точке (1.1).

Реализация формул (1.2) на ЭВМ в представленном виде затруднительна, так как подынтегральные функции содержат особенность при $L^*+L_x\cos\alpha=0$. Однако при интегрировании (1.2) по ψ особенность можно выделить аналитически. Это свойство реализуется при разложении функций (1.2) в ряд Фурье по ψ.

2. Представим функции I_{ai} рядами Фурье по переменной ψ

$$I_{ai}(\rho,r,y,\psi,V,\alpha)=R^{ai}(\rho,r,y,V,\alpha)+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n^{ai}(\rho,r,y,V,\alpha)\cos n\psi+$$
$$+S_n^{ai}(\rho,r,y,V,\alpha)\sin n\psi],\qquad i=1,2,3 \tag{2.1}$$

где

$$R^{ai}(\rho,r,y,V,\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}I_{ai}(\rho,r,y,\psi,V,\alpha)\,d\psi$$

$$C_n^{ai}(\rho,r,y,V,\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}I_{ai}(\rho,r,y,\psi,V,\alpha)\cos n\psi\,d\psi$$

$$S_n^{ai}(\rho,r,y,V,\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}I_{ai}(\rho,r,y,\psi,V,\alpha)\sin n\psi\,d\psi$$

После интегрирования по ψ и ряда преобразований придем к следующим выражениям для гармонических составляющих функции влияния (коэффициентов Фурье):

$$R^x = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{\rho_*^2-\rho_*\cos\theta}{l^2}\left(1+\frac{iy_*}{L}\right)\frac{i\cos\alpha}{1+i\sin\alpha}\,d\theta \qquad (2.2)$$

$$R^y = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\rho_*^2-\rho_*\cos\theta}{l^2}\left(1+\frac{iy_*}{L}\right)d\theta, \qquad R^z = -\frac{V}{\pi r}\int\limits_0^{\pi}\frac{i\cos\alpha}{L(1+i\sin\alpha)}\,d\theta$$

$$S_n^x = \operatorname{tg}\alpha\, S_n^y, \qquad S_n^y = (-1)^{n+1}\frac{2V}{\pi r}\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos n\varphi}{L}W_n\,d\theta$$

$$S_n^z = (-1)^n\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left[i\frac{\sin\varphi\sin n\varphi}{l}\left(\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{y_*\operatorname{tg}\alpha}{L}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\rho_*^2-\rho_*\cos\theta}{l^2}\cos n\varphi\left(\operatorname{tg}\alpha-\frac{y_*}{L\cos\alpha}\right)\right]W_n\,d\theta$$

$$C_n^x = (-1)^{n+1}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left[i\frac{\rho_*^2-\rho_*\cos\theta}{l^2}\left(\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{y_*\operatorname{tg}\alpha}{L}\right)\cos n\varphi+\right.$$
$$\left.+\left(\operatorname{tg}\alpha-\frac{y_*}{L\cos\alpha}\right)\frac{\sin\varphi\sin n\varphi}{l}\right]W_n\,d\theta$$

$$C_n^y = (-1)^n\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(i\frac{y_*}{L}\frac{\rho_*^2-\rho_*\cos\theta}{l^2}\cos n\varphi-\frac{\sin\varphi\sin n\varphi}{l}\right)W_n\,d\theta$$

$$C_n^z = (-1)^{n+1}\frac{2V}{\pi r\cos\alpha}\int\limits_0^{\pi} i\frac{\cos n\varphi}{L}W_n\,d\theta$$

Здесь

$$\rho_*=\rho/r,\quad y_*=y/r,\quad l=\sqrt{1+\rho_*^2-2\rho_*\cos\theta},\quad L=\sqrt{y_*^2+l^2}$$

$$i=\begin{cases}1, & L\sin\alpha > y_*\\ -1, & L\sin\alpha \leqslant y_*\end{cases}$$

$$W_n = \left[\frac{L}{l}\left(1+\frac{iy_*}{L}\right)\frac{\cos\alpha}{1+i\sin\alpha}\right]^n$$

а параметр φ определяется из соотношений

$$\sin\varphi = \frac{\rho_*\sin\theta}{l}, \qquad \cos\varphi = \frac{\rho_*\cos\theta-1}{l}$$

В случае $y=0$ формулы для R^y, S_n^y, C_n^y обращаются в известные [5].

В случае, когда расчетная точка и вихревая пелена расположены по разные стороны диска, функция i в области интегрирования сохраняет постоянное значение. В связи с этим гармонические составляющие функций влияния приобретают важное в вычислительном отношении свойство. Действительно, в этом случае $y\sin\alpha\leqslant 0$ и

$$(-1)^n W_n(\rho_*, y_*, \theta, \alpha) = W_n^*(\rho_*, y_*, \theta)\,k^n(\alpha)$$

где

$$W_n^*(\rho_*, y_*, \theta) = \left[\frac{L-|y_*|}{l}\right]^n, \qquad k^n(\alpha) = \left(\frac{-\cos\alpha}{1+|\sin\alpha|}\right)^n$$

Разделение переменных в W_n позволяет записать (2.2) через типовые интегралы

$$R^x = ik(\alpha)R^y, \qquad R^y = \frac{1}{2}(A_0 + iy_*D_n), \qquad R^z = -ik(\alpha)\frac{1}{2}S_0^y \tag{2.3}$$

$$S_n^x = \operatorname{tg}\alpha\, S_n^y, \qquad S_n^y = -\frac{V}{r}k^n(\alpha)B_n$$

$$S_n^z = \frac{k^n(\alpha)}{\cos\alpha}\left[i(E_n - y_*\operatorname{tg}\alpha F_n) + (\sin\alpha A_n - y_*D_n)\right]$$

$$C_n^x = -\frac{k^n(\alpha)}{\cos\alpha}\left[i(A_n - y_*\operatorname{tg}\alpha D_n) + (\sin\alpha E_n - y_*F_n)\right]$$

$$C_n^y = k^n(\alpha)(iy_*A_n - E_n), \qquad C_n^z = \frac{i}{\cos\alpha}S_n^y$$

где

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\rho_*^2 - \rho\cos\theta}{l^2}\cos n\varphi W_n^*\,d\theta, \qquad B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos n\varphi}{L}W_n^*\,d\theta \tag{2.4}$$

$$D_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\rho_*^2 - \rho_*\cos\theta}{l^2}\frac{\cos n\varphi}{L}W_n^*\,d\theta$$

$$E_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\varphi\sin n\varphi}{l}W_n^*\,d\theta, \qquad F_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin\varphi\sin n\varphi}{lL}W_n^*\,d\theta$$

При этом интегралы (2.4) не зависят от α и являются функциями ρ_*, y_*. Можно показать, что они сводятся к комбинации полных эллиптических интегралов трех родов.

Интересно, что y-я составляющая средней по азимуту индуктивной скорости в области $y\sin\alpha \leqslant 0$ не зависит от α. На этом основании получаем, что формула Н. Е. Жуковского [4] для вихревой модели при осевом обтекании и формулы средней по азимуту индуктивной скорости для вихревой модели с плоской пеленой [2, 4] тождественны.

В случае $y=0$ соотношения (2.3) упрощаются ($W_n^*=1$, $L=l$).

Формулы для вихревой модели с плоской пеленой получаются из (2.3) при $\alpha=0$. Формулы (2.3) пригодны также для приближенного учета воздействия удаленного вихревого следа на поле индуктивных скоростей в области винта.

Свойства симметрии и предельные соотношения легко устанавливаются на основе (2.2), (2.3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Майкапар Г. И.* Приложение вихревой теории винта.– Тр. ЦАГИ, 1947, в. 613, с. 17–42.
2. *Проскуряков А. П.* Теория несущего винта при нулевом угле атаки.– ПММ, 1956, т. 20, в. 4, с. 519–531.
3. *Лепилкин А. М.* Вихревая теория несущего винта и взаимного влияния винтов.– Изд. АН СССР. Механ. и машиностр., 1963, № 5, с. 77–107.
4. *Баскин В. Э., Вильдгрубе Л. С., Вождаев Е. С., Майкапар Г. И.* Теория несущего винта. М.: Машиностроение, 1973. 363 с.
5. *Вождаев Е. С.* К теории индукции несущего винта с произвольным углом атаки.– Уч. зап. ЦАГИ, 1972, т. 3, № 2, с. 1–10.
6. *Сафронов Э. Д.* Вычисление индуктивной скорости в плоскости малонагруженного несущего винта.– Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 2, с. 114–122.
7. *Белоцерковский С. М., Васин В. А., Локтев Б. Е.* К построению нестационарной нелинейной теории воздушного винта.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 5, с. 107–113.

Москва

Поступила в редакцию
8.I.1981