введена соотношениями

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \qquad v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

Линии *1* и *2* соответствуют значениям функции тока $\psi=0{,}5$ и 0,05. На фиг. 1, *а* и *б* представлены течения вблизи сферы с нулевым нормальным сопротивлением ($\alpha=0$) и значениями $\beta=10$ и $\beta\to\infty$ соответственно. Значение функции тока на линии *3*, определяющее расход жидкости через сферу, с ростом касательного сопротивления уменьшается от 0,15 (фиг. 1, *а*) до 0,07 (фиг. 1, *б*).

На фиг. 1, *в* приведен пример течения с нулевым касательным сопротивлением ($\beta=0$) и значением $\alpha=10$. Функция тока на линии *3* имеет значение 0,14.

Случай равных коэффициентов сопротивления ($\alpha=\beta=10$) представлен на фиг. 1, *г*. Особенностью этого течения является однородность потока внутри сферы.

Полная сила сопротивления сферы потоку F и расход жидкости Q через сферу определяются формулами

$$F = 12\pi\frac{5\alpha+10\beta+\alpha\beta}{45+12\alpha+21\beta+2\alpha\beta}, \qquad Q = \pi\frac{45+3\beta}{45+12\alpha+21\beta+2\alpha\beta}$$

На фиг. 2 приведена зависимость F и Q от коэффициента нормального сопротивления α при различных значениях коэффициента касательного сопротивления β: $\beta=0$ (кривые *1*, *2*), $\beta=\alpha$ (кривые *3*, *4*), $\beta=10\alpha$ (кривые *5*, *6*) и $\beta\to\infty$ (кривые *7*, *8*). Как видно из фиг. 2, при $\alpha=100$ и любом значении коэффициента касательного сопротивления сфера практически непроницаема для потока ($Q\to0$), а сила сопротивления мало отличается от сопротивления твердого шара ($F\to6\pi$) при $\beta\gtrsim\alpha$ или «жидкой капли» ($F\to5\pi$) при $\beta=0$. Интересно отметить, что значение $\alpha=100$ для движения сферы с радиусом $a\sim0{,}01$ м в воде ($\eta=1$ мПа·с) соответствует сеткам с малым гидравлическим сопротивлением. Перепад давления в 1 Па на такой сетке вызывает протекание жидкости со скоростью порядка 0,1 м/с.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. II. М.: Физматгиз, 1963.

Пермь

Поступила в редакцию 16.II.1981

УДК 532.592

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В НЕПРЕРЫВНО-СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

НЕСТЕРОВ А. В.

Рассмотрено параметрическое возбуждение внутренних волн в непрерывно-стратифицированной жидкости в сосуде, совершающем колебания в вертикальном направлении. Показано, что при вертикальных колебаниях сосуда будут возбуждаться моды колебаний с собственными частотами, равными половине частоты колебаний сосуда.

Параметрическому возбуждению поверхностных и внутренних волн на границе раздела двух жидкостей посвящен ряд работ [1–3]. В данной заметке рассматривается параметрическое возбуждение внутренних волн в прямоугольном сосуде шириной l и глубиной h, заполненном непрерывно-стратифицированной жидкостью и совершающем колебания в вертикальном направлении по закону $z=a\cos\Omega t$. Верхняя граница жидкости может быть свободной либо закрытой твердой крышкой.

В линейном приближении уравнение, описывающее функцию тока в непрерывно-стратифицированной жидкости, в неподвижной системе координат имеет вид [4]

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta\psi-\beta\psi_z)=g\beta\psi_{xx}, \qquad \beta=-\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial\rho(z)}{\partial z} \tag{1}$$

где β — параметр страфикации, g — ускорение силы тяжести.

В системе координат, жестко связанной с сосудом, уравнение (1) принимает вид

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta\psi-\beta\psi_z)=g(1-\varepsilon\cos\Omega t)\psi_{xx}, \qquad \varepsilon=a\Omega^2/g \tag{2}$$

Граничные условия на твердом дне, на свободной поверхности жидкости или на твердой крышке и на боковых стенках сосуда

$$\psi_x=0, \quad z=0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=g(1-\varepsilon\cos\Omega t)\psi_{xx}, \qquad z=h \tag{4}$$

$$\psi_x=0, \quad z=h \tag{5}$$

$$\psi_z=0, \quad x=0, \quad x=l \tag{6}$$

Ищем решение задачи (2)–(6) в виде

$$\psi=\psi(t)Z(z)\sin kx, \qquad k=n\pi/l, \qquad n=1,2,3\ldots$$

При данном k условие (6) удовлетворяется. Разделяя переменные в (2) и (3)–(5), получаем

$$\psi''+\omega^2(1-\varepsilon\cos\Omega t)\psi=0 \tag{7}$$

$$Z''-\beta Z'-(k^2-k^2g\beta/\omega^2)Z=0 \tag{8}$$

$$Z(0)=0$$

$$Z(h)=0 \tag{9}$$

$$Z'(h)=k^2g\omega^{-2}Z(h) \tag{10}$$

Условие (9) выполняется на твердой крышке, условие (10) – на свободной поверхности, ω^2 – постоянная разделения переменных.

Зависимость амплитуды колебаний от времени определяется уравнением Матье (7), так же как и в случае поверхностных волн или волн на границе раздела двух жидкостей [1–2]. Известно, что при

$$\begin{gathered}1-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\left(\frac{2\omega}{\Omega}\right)^2\leqslant 1+\frac{\varepsilon}{2}\\ 4-\frac{\varepsilon^2}{3}\leqslant\left(\frac{2\omega}{\Omega}\right)^2\leqslant 4+\frac{5\varepsilon^2}{3}\end{gathered} \tag{11}$$

. . . .

решение уравнения (7) экспоненциально нарастает во времени (явление параметрического резонанса). Из (7)–(10) видно, что при вертикальных колебаниях сосуда будут возбуждаться моды внутренних волн с собственными частотами ω, лежащими в интервалах (11), причем наиболее легко возбуждаются волны с $\omega\sim\Omega/2$.

Приведем пример, когда задача решается в явном виде [4]. Пусть $\rho=\rho\exp(-\beta z)$ и верхняя граница сосуда – твердая крышка. Тогда зависимость амплитуды колебаний от вертикальной координаты z и собственные частоты $\omega_{ns}{}^2$ имеют соответственно вид

$$Z(z)=C\exp\left(\frac{\beta z}{2}\right)\sin\frac{2\pi s}{h}z$$

$$\omega_{ns}{}^2=\frac{gk}{\lambda(k,s)}, \qquad \lambda(k,s)=\frac{\beta}{4k}+\frac{k}{\beta}+\frac{\pi^2s^2}{h^2k\beta}$$

$$s=1,2,3\ldots, \qquad k=\frac{n\pi}{l}, \qquad n=1,2,3\ldots$$

т. е. в данном случае для каждого n существует бесконечное число мод внутренних волн. Пусть ширина сосуда l равна 10 см, глубина h равна 10 см, $g=10^3$ см/с^2, $\beta=0{,}01$ см$^{-1}$. Тогда для $n=1$, $s=1$ (первая гармоника) частота ω_{11} равна 2,2 с$^{-1}$. Если амплитуда колебаний сосуда равна 1 см, то $\varepsilon=0{,}05$. Подставляя ω_{11} и ε в (11), получим, что явление параметрического резонанса для первой гармоники будет иметь место при частотах вертикальных колебаний Ω, лежащих в интервале $4{,}325 \leqslant \Omega \leqslant 4{,}475\ c^{-1}$, т. е. рассмотренный эффект должен наблюдаться в реализуемых лабораторно условиях.

В заключение автор благодарит С. В. Нестерова за интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
2. *Нестеров С. В.* Исследование по нелинейной теории гравитационных волн: Дис. на соискание уч. ст. докт. физ.-мат. наук. М., МЭИ, 1972.
3. *Секерж-Зенькович С. Я., Калиниченко В. А.* О возбуждении внутренних волн в двухслойной жидкости вертикальными колебаниями.– Докл. АН СССР, 1979, т. 249, № 4, с. 797–799.
4. *Краусс В.* Внутренние волны. Л.: Гидрометеоиздат, 1968. 272 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.II.1981

УДК 533.6.011:662.6

К ВИХРЕВОЙ ТЕОРИИ НЕСУЩЕГО ВИНТА

АНИКИН В. А.

Расчет аэродинамических характеристик винта связан с определением поля возмущенных скоростей. Для этих целей разработаны вихревые модели винта [1–4, 7]. В рамках линейной модели расчет поля индуктивных скоростей основан на применении формулы Био – Савара к скошенным винтовым полубесконечным вихрям. Интегрирование по полубесконечной области и, кроме того, осциллирующий характер функций требуют для расчета поля скоростей винта значительных затрат времени ЭВМ. В связи с этим в приложениях получила широкое распространение дисковая вихревая теория винта, в которой истинные индуктивные скорости заменяются средними по времени. В результате интегрирование выполняется по конечному отрезку, а трудоемкость расчета резко сокращается. Вносимая в расчет погрешность быстро убывает с ростом числа лопастей.

В настоящее время известны формулы для средних по времени индуктивных скоростей винта для ряда расчетных случаев [4–6], допускающие их эффективную реализацию на ЭВМ.

В данной работе приводятся формулы для всех компонент средней по времени индуктивной скорости в произвольной точке пространства.

Полученные результаты могут найти применение при исследовании аэродинамических характеристик комбинации несущих винтов, взаимовлияния винта и крыла в линейной постановке, а также при расчете истинных индуктивных скоростей от удаленного вихревого следа в линейной и нелинейной постановках [4, 7].

1. Будем рассматривать k-лопастный винт правого вращения, помещенный в однородный невозмущенный поток. Оси правой системы координат поместим в центр винта так, что ось Y будет перпендикулярна плоскости диска, в которой движутся лопасти винта, вращающегося с угловой скоростью ω, а ось X лежит в плоскости диска и направлена навстречу потоку.

Опишем вихревую модель винта. Лопасти винта схематизируются радиальными отрезками вихрей с переменной по радиусу ρ и постоянной по азимуту θ циркуляцией Γ. Непрерывный вихревой слой, стекающий с лопастей со скоростью V, образует в пространстве скошенную винтовую поверхность S постоянного шага, простирающуюся до бесконечности. Ось вихревой колонны образует с осью X угол α. Причем $\alpha<0$, если колонна отходит от винта вниз.

Координаты точки (x_*, y_*, z_*), в которой вычисляется индуктивная скорость, выразим через полярный радиус r и азимут ψ, отсчитываемый от отрицательной полуоси X в направлении вращения винта

$$x_*=-r\cos\psi, \qquad y_*=y, \qquad z_*=r\sin\psi \tag{1.1}$$

Будем пользоваться далее относительными величинами, при этом линейные размеры будем относить к радиусу винта R, скорости – к ωR, циркуляции – к ωR^2.