

2°. Во втором случае после упрощений имеем

$$k(H_3 - H_4) = \frac{Q_1 - Q_2}{h} (l - d) + \frac{Q_2}{\pi} \ln \left(\frac{2}{R+1} \frac{R + |P|}{1 + |P|} \right) + \frac{Q_1 - Q_2}{\pi} \ln \left(\frac{1 - |P|}{1 + |P|} \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) \quad (2.5)$$

3°. В этом случае для разности напоров получена формула

$$k(H_1 - H_4) = \frac{2Q_1 - Q_2}{h} l + \frac{Q_2}{h} d - \frac{Q_1 - Q_2}{\pi} \ln(\cos^4 \alpha) + \frac{Q_2}{\pi} \ln \left(\frac{1 - R}{1 + R} \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) \quad (2.6)$$

На основании полученных формул произведены вычисления расходов Q_2 в зависимости от напоров по длине потока. При напорах $H_1=2$ м, $H_2=1$ м, $H_4=0,6$ м и коэффициенте фильтрации 150 л/с в задаче без шпунта расход $Q_2=12$ см²/с. При тех же значениях напоров и коэффициенте фильтрации в задаче со шпунтом расход $Q_2=84$ см²/с. Для сравнения ниже приведены данные натуральных наблюдений за ростом объема наледей в долинах горных рек Северо-Востока СССР [3]:

Название реки	Количество дней наблюдений	Прирост объема наледей, м ³	Ширина фильтрационной зоны, м	Удельный наледный расход, см ² /с
Арга-Урях	14	63200	300	16,0
Верина	10	57300	250	24,0
Еченки	10	16800	1000	17,8

Коэффициент фильтрации в этих реках изменяется от 75 до 150 л/сут, а напоры в верхней точке достигают 2–3 м. Видно, что порядок величин расходов, вычисленных по формулам, и натуральных одинаков. Введение шпунта заметно увеличивает расход Q_2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев В. Р., Савко Н. Ф. Теория наледных процессов. М.: Наука, 1975. 204 с.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
3. Калабин А. И. Вечная мерзлота и гидрология Северо-Востока СССР. Магадан, 1960. 471 с.

Воронеж

Поступила в редакцию
15.V.1981

УДК 532.546

МЕДЛЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ПРОНИЦАЕМОЙ СФЕРЫ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

БИРИХ Р. В., РУДАКОВ Р. Н.

В приближении Стокса рассмотрено течение вязкой жидкости около проницаемой сферы. Примером такого течения может служить обтекание перфорированной или решетчатой сферической поверхности. Элементы сферы содержат твердые непроницаемые участки и отверстия, через которые может протекать жидкость. Взаимодействие сферы с потоком описывается двумя коэффициентами сопротивления, которые устанавливают связь между скоростью течения жидкости на сфере и тензором напряжений на ней. Исследована зависимость формы течения, а также силы сопротивления и расхода жидкости от этих коэффициентов. В частных случаях полученное решение описывает обтекание твердого и жидкого шаров.

Рассмотрим медленное движение проницаемой сферы с постоянной скоростью u в вязкой жидкости. В сферической системе координат r, θ , неподвижно связанной со сферой, уравнения и граничные условия для распределения скоростей в стоксо-

вом приближении в безразмерных переменных имеют вид

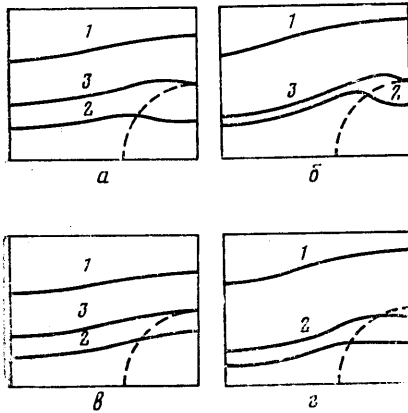
$$\nabla p = \Delta \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = (v_r, v_\theta) \quad (1)$$

$$r \rightarrow \infty, \quad v_r = \cos \theta, \quad v_\theta = -\sin \theta \quad (2)$$

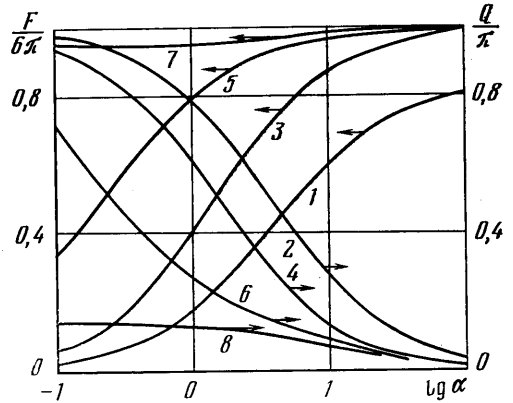
$$r=1, \quad v_r^+ = v_r^-, \quad v_\theta^+ = v_\theta^- \quad (3)$$

$$r=1, \quad \sigma_{rr}^+ - \sigma_{rr}^- = \alpha v_r^+, \quad \sigma_{r\theta}^+ - \sigma_{r\theta}^- = \beta v_\theta^+ \quad (4)$$

Здесь p — давление, v_r, v_θ — компоненты скорости жидкости, α и β — коэффициенты нормального и касательного сопротивления; за характерные масштабы длины, скорости, давления и коэффициентов сопротивления выбраны величины $a, u, \eta u/a$,



Фиг. 1



Фиг. 2

η/a соответственно (a — радиус сферы, η — динамическая вязкость). Индексы плюс и минус соответствуют функциям вне и внутри сферы.

Граничные условия (3) и (4) моделируют течение вязкой жидкости около проницаемой сферы. В этой модели не рассматривается структура течения вблизи элементов сферы и граничные условия записываются для усредненного движения жидкости. Условия (3) следуют из непрерывности проекций скорости мелкомасштабного движения как на твердых участках сферы, так и на отверстиях. Предположение о линейной связи (4) между усредненными величинами проекций скорости течения и проекциями суммы сил, действующими на элементы жидкости с разных сторон проницаемой поверхности, оправдывается малостью скоростей обтекания.

Уравнения (1) допускают решения, ограниченные в нуле и удовлетворяющие (2) [1]

$$v_r^\pm = f^\pm(r) \cos \theta, \quad v_\theta^\pm = -g^\pm(r) \sin \theta, \quad p^\pm = h^\pm(r) \cos \theta$$

$$f^- = c_1 + c_2 r^2, \quad g^- = c_1 + 2c_2 r^2, \quad h^- = 10c_2 r$$

$$f^+ = \frac{c_3}{r^3} + \frac{c_4}{r} + 1, \quad g^+ = -\frac{c_3}{2r^3} + \frac{c_4}{2r} + 1, \quad h^+ = \frac{c_4}{r^2}$$

Коэффициенты c_i находятся из граничных условий (3), (4) и определяются формулами

$$c_1 = (45 - 3\alpha + 6\beta)/A, \quad c_2 = (3\alpha - 3\beta)/A$$

$$c_3 = (3\alpha + 12\beta + \alpha\beta)/A, \quad c_4 = -(15\alpha + 30\beta + 3\alpha\beta)/A$$

$$A = 45 + 12\alpha + 21\beta + 2\alpha\beta$$

Обсудим форму течения жидкости вблизи сферы при различных значениях коэффициентов сопротивления α и β . Для абсолютно проницаемой сферы ($\alpha=0, \beta=0$) течение жидкости остается однородным. Случаи $\alpha \rightarrow \infty, \beta \rightarrow \infty$ и $\alpha \rightarrow \infty, \beta=0$ соответствуют известным задачам обтекания твердого и жидкого шаров. Структура течения для некоторых конечных значений α и β показана на фиг. 1. В силу симметрии течения линии тока приведены только в одной четверти. Функция тока на этих фигурах

введена соотношениями

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Линии 1 и 2 соответствуют значениям функции тока $\psi=0,5$ и $0,05$. На фиг. 1, а и б представлены течения вблизи сферы с нулевым нормальным сопротивлением ($\alpha=0$) и значениями $\beta=10$ и $\beta \rightarrow \infty$ соответственно. Значение функции тока на линии 3, определяющее расход жидкости через сферу, с ростом касательного сопротивления уменьшается от 0,15 (фиг. 1, а) до 0,07 (фиг. 1, б).

На фиг. 1, в приведен пример течения с нулевым касательным сопротивлением ($\beta=0$) и значением $\alpha=10$. Функция тока на линии 3 имеет значение 0,14.

Случай равных коэффициентов сопротивления ($\alpha=\beta=10$) представлен на фиг. 1, г. Особенностью этого течения является однородность потока внутри сферы.

Полная сила сопротивления сферы потоку F и расход жидкости Q через сферу определяются формулами

$$F = 12\pi \frac{5\alpha + 10\beta + \alpha\beta}{45 + 12\alpha + 21\beta + 2\alpha\beta}, \quad Q = \pi \frac{45 + 3\beta}{45 + 12\alpha + 21\beta + 2\alpha\beta}$$

На фиг. 2 приведена зависимость F и Q от коэффициента нормального сопротивления α при различных значениях коэффициента касательного сопротивления β : $\beta=0$ (кривые 1, 2), $\beta=\alpha$ (кривые 3, 4), $\beta=10\alpha$ (кривые 5, 6) и $\beta \rightarrow \infty$ (кривые 7, 8). Как видно из фиг. 2, при $\alpha=100$ и любом значении коэффициента касательного сопротивления сфера практически непроницаема для потока ($Q \rightarrow 0$), а сила сопротивления мало отличается от сопротивления твердого шара ($F \rightarrow 6\pi$) при $\beta \approx \alpha$ или «жидкой капли» ($F \rightarrow 5\pi$) при $\beta=0$. Интересно отметить, что значение $\alpha=100$ для движения сферы с радиусом $a \sim 0,01$ м в воде ($\eta=1$ мПа·с) соответствует сеткам с малым гидравлическим сопротивлением. Перепад давления в 1 Па на такой сетке вызывает протекание жидкости со скоростью порядка 0,1 м/с.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. II. М.: Физматгиз, 1963.

Пермь

Поступила в редакцию
16.11.1981

УДК 532.592

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В НЕПРЕРЫВНО-СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

НЕСТЕРОВ А. В.

Рассмотрено параметрическое возбуждение внутренних волн в непрерывно-стратифицированной жидкости в сосуде, совершающем колебания в вертикальном направлении. Показано, что при вертикальных колебаниях сосуда будут возбуждаться моды колебаний с собственными частотами, равными половине частоты колебаний сосуда.

Параметрическому возбуждению поверхностных и внутренних волн на границе раздела двух жидкостей посвящен ряд работ [1-3]. В данной заметке рассматривается параметрическое возбуждение внутренних волн в прямоугольном сосуде шириной l и глубиной h , заполненном непрерывно-стратифицированной жидкостью и совершающем колебания в вертикальном направлении по закону $z=a \cos \Omega t$. Верхняя граница жидкости может быть свободной либо закрытой твердой крышкой.

В линейном приближении уравнение, описывающее функцию тока в непрерывно-стратифицированной жидкости, в неподвижной системе координат имеет вид [4]

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta \psi - \beta \psi_z) = g \beta \psi_{xx}, \quad \beta = -\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \rho(z)}{\partial z} \quad (1)$$

где β — параметр страфикации, g — ускорение силы тяжести.