

должен быть коэффициент κ в сечении 2 и тем, следовательно, слабее должно быть обратное течение. При некотором достаточно малом значении числа Фруда обратное течение в сечении 2 должно исчезнуть совсем, т. е. в это сечение должна попасть точка разделения B . В этом случае профиль скоростей в сечении 2 струйный, а значения коэффициента κ минимальны. Максимальное из этих минимальных значений, рассчитанное для струйного профиля, занимающего все сечение, составляет $\kappa \approx 1,5$. Для него по уравнению (2.1) построена кривая 2 на фиг. 3. Кривые $Fg=f(a)$ при $\kappa > 1$ имеют минимум. Легко показать, представив передний фронт как динамическую систему первого порядка [9], что состояния на части кривой правее минимума неустойчивы по отношению к медленным бесконечно длинным возмущениям площади сечения жидкого слоя, а левее — устойчивы. Это значит, что только левая (сплошная) часть кривой 2 может описывать границу существования пробок, а правая — не может. Действительно, сравнение с опытными данными показывает, что кривая 2 описывает границу при $a < 0,5$.

Таким образом, граница существования пробок, заполняющих все сечение трубы, состоит из двух частей, соответствующих двум типам структуры переднего фронта пробки: при $a < 0,5$ это кривая 2, соответствующая $\kappa = 1,5$ и структуре с цепочкой вихрей, а при $a > 0,6$ — кривая 1, соответствующая $\kappa = 1$ и структуре без цепочки вихрей. В диапазоне $0,5 < a < 0,6$ находится переходная зона.

Установим теперь границу, разделяющую два типа структуры фронта при $a > 0,6$. При струйном профиле скоростей коэффициент κ тем меньше, чем большую долю площади a' занимает зона постоянных скоростей. Зависимость κ от a' показана на фиг. 1, г. Минимальные значения коэффициента κ_{\min} достигаются при $a' = a'_{\max} = a$. Зависимость $Fg=f(a)$, соответствующая κ_{\min} и построенная по уравнению (2.1), представлена кривой 3 на фиг. 3. Сравнение с опытными данными показывает, что эта кривая действительно описывает границу, разделяющую структуры двух типов.

Автор благодарен В. Я. Шкадову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кордибан. Исследование пробкового течения двухфазной жидкости в горизонтальных трубах. — Тр. амер. об-ва инж.-мех. Техническая механика, 1961, т. 83, № 4, с. 167–173.
2. Dukler A. E., Hubbard M. G. A model for gas-liquid slug flow in horizontal and near horizontal tubes. — Ind. Eng. Chem., Ser. Fundamentals, 1975, v. 14, № 4, p. 337–347.
3. Чугаев Р. Р. Гидравлика. Л.: Энергия, 1970. 552 с.
4. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1970. 568 с.
5. Асанума Т. Современные методы визуализации потока. — Нихон кикай гаккайси, 1969, т. 72, № 609, с. 1370–1377.
6. Илизарова Л. И. Опытное исследование кинематических характеристик донного гидравлического прыжка. — Сообщ. АН СССР, 1960, т. 24, № 3, с. 281–288.
7. Rajaratnam N. The hydraulic jump as a wall jet. — ASCE J. Hydraul. Div., 1965, v. 91, № 5, p. 107–132.
8. Хапаева А. К. Гидравлический прыжок на гладком и шероховатом дне как пристенная струя. — Изв. Всес. НИИ гидротехники им. Б. Е. Веденеева, 1970, т. 92, с. 234–245.
9. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 384 с.

Краснодар

Поступила в редакцию
2.XII.1980

УДК 532.546

О НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ, СВЯЗАННЫХ С ТЕОРИЕЙ НАЛЕДЕЙ

ДЕМЕНТЬЕВА О. В.

При промерзании грунтов в районах с суровым климатом происходит стеснение потока грунтовых вод, фильтрационный поток оказывается зажатым между слоем сезонного промерзания и нижним водоупором, которым может быть многолетняя мерзлота или скальные породы.

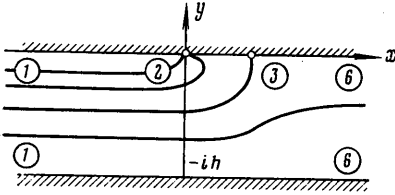
Глубина промерзания всегда бывает неравномерной. На оголенных местах грунт промерзает глубже, а на участках с густой растительностью и толстым снеговым покровом промерзание бывает небольшое. Напорная вода находит наиболее слабое место и происходит ее прорыв. Растекаясь по поверхности тонкими слоями, вода

замерзает и образует наледь. Такие явления широко распространены на Крайнем Севере и в Восточной Сибири [1].

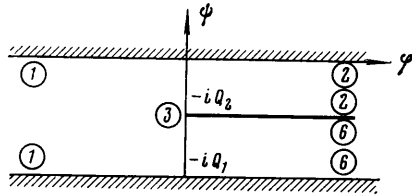
Для решения инженерных задач важно знать расход наледного стока через щель в зависимости от ширины щели и изменения напоров по длине потока.

В настоящей статье рассматриваются некоторые модельные задачи, в которых по замерам напоров вычисляется расход потока через щель.

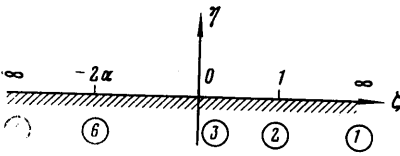
1. Задача о фильтрации между двумя параллельными поверхностями и щелью. Рассматривается плоский фильтрационный поток по наклонной плоскости между двумя параллельными непроницаемыми поверхностями. Расстояние между поверхностями h . В верхней поверхности имеется щель малого радиуса. Расход потока до щели Q_1 . В трех точках известны напоры H_1, H_2 и H_3 . Требуется по этим данным определить расход щели Q_2 .



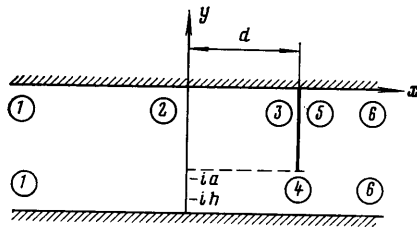
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Введем комплексную плоскость $z=x+iy$ с началом в точке 2 – точке стока. Действительная ось лежит на верхней поверхности (фиг. 1). Точка 3 – критическая. Точка 1 соответствует потоку на бесконечности до щели, точка 6 – потоку на бесконечности после щели. В плоскости комплексного потенциала течению соответствует полоса с разрезом (фиг. 2). Введем вспомогательную комплексную плоскость (фиг. 4)

$$\zeta = \xi + i\eta$$

С помощью формулы Кристоффеля – Шварца находим конформное отображение верхней полуплоскости плоскости ζ на область изменения комплексного потенциала w

$$w = -Q_2 \pi^{-1} [(q-1) \ln [\zeta(q-1)^{-1} + 1] + \ln(1-\zeta)] - iQ_2, \quad q = Q_1 Q_2^{-1} \quad (1.1)$$

Отображение полосы в плоскости z на верхнюю полуплоскость задается формулой

$$\zeta = (1-q) + q \exp(-\pi z h^{-1}) \quad (1.2)$$

Поэтому для комплексного потенциала (1.1) имеем

$$w = -Q_2 \pi^{-1} [(1-q) \ln(1-q^{-1}) + \ln q - (q-1) \pi z h^{-1} + \ln(1 - \exp(-\pi z h^{-1}))] - iQ_2 \quad (1.3)$$

Потенциал течения $\varphi = \text{Re } w$ связан с напором формулой

$$\varphi = -kH + C \quad (1.4)$$

где k – коэффициент фильтрации [2].

Напор измеряется на верхней поверхности. Потенциал на верхней границе имеет следующий вид:

$$\varphi = -Q_2 \pi^{-1} [(1-q) \ln(1-q^{-1}) + \ln q - (q-1) \pi x h^{-1} + \ln |1 - \exp(-\pi x h^{-1})|] \quad (1.5)$$

Пусть напор H_i измеряется в точке x_i ($i=1, 2, 3, 4$).

Рассмотрим три случая. Во всех случаях предполагается, что имеет место неравенство $lh^{-1} \gg 1$.

1°. $x_1 = -l, x_2 = -\rho, (l, \rho > 0)$

Подставляя последовательно значения x_1 и x_2 в формулу (1.5) и вычитая второе из первого, получим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{Q_1}{h} (l - \rho) - \frac{Q_2}{\pi} \ln \frac{1 - \exp(-\pi l h^{-1})}{1 - \exp(-\pi \rho h^{-1})} \quad (1.6)$$

Учитывая неравенство $lh^{-1} \gg 1$, находим

$$k(H_1 - H_2) = Q_1 h^{-1} (l - \rho) - Q_2 \pi^{-1} \ln(1 - e^{-\mu}), \quad \mu = \pi \rho h^{-1} \quad (1.7)$$

2°. $x_3 = \rho, x_4 = l, (\rho > 0)$

Подставим значения x_3 и x_4 в (1.5) и вычтем второе выражение из первого. В результате приходим к равенству

$$\varphi_3 - \varphi_4 = -\frac{Q_1 - Q_2}{h} (l - \rho) - \frac{Q_2}{\pi} \ln \frac{1 - \exp(-\pi \rho h^{-1})}{1 - \exp(-\pi l h^{-1})} \quad (1.8)$$

Пренебрегая величиной $\exp(-\pi l h^{-1})$, получим

$$k(H_3 - H_4) = (Q_1 - Q_2) h^{-1} (l - \rho) + Q_2 \pi^{-1} \ln(1 - e^{-\mu}) \quad (1.9)$$

3°. $x_1 = -l, x_4 = l (l > 0)$

С учетом неравенства $lh^{-1} \gg 1$ в этом случае получаем

$$k(H_1 - H_4) = 2(Q_1 - Q_2) l h^{-1} \quad (1.10)$$

Таким образом, расход Q_2 можно найти по формулам (1.7) и (1.10) или (1.9) и (1.10), измеряя напоры в трех точках, причем если два замера делаются выше щели, то один обязательно ниже и наоборот.

2. Задача о фильтрации между двумя параллельными поверхностями со щелью и шпунтом. В условиях предыдущей задачи на расстоянии d от щели ниже по течению расположен шпунт глубиной $a < h$, моделирующий сужение потока (фиг. 4). Значения точек 1, 2, 3, 6 такие же, как и в первой задаче. Точка 4 совпадает с верхней щелью шпунта, точки 3 и 5 с основанием шпунта.

В плоскости комплексного потенциала этому течению, как и в предыдущей задаче, соответствует полосу с разрезом (фиг. 2), поэтому формула (1.1) не изменится.

Отображение области течения на верхнюю полуплоскость плоскости ζ (фиг. 3) задается формулой

$$\begin{aligned} \zeta &= 1 - 2q(P+R) \frac{(1+P)^{-1}(1+R)^{-1}}{1+P}, \quad R=P(0) \\ P(z) &= \cos \alpha \sqrt{\text{th}^2(\sigma - \delta) + \text{th}^2 \alpha}, \quad 2\alpha = \pi a h^{-1} \\ 2\sigma &= \pi z h^{-1}, \quad 2\delta = \pi d h^{-1} \end{aligned} \quad (2.1)$$

причем должно выполняться равенство

$$(q-1) \ln \left(\frac{q}{q-1} \frac{1-R}{1+R} \frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha} \right) + \ln [2q(R-\sin \alpha)(1+R)^{-1}(1-\sin \alpha)^{-1}] = 0 \quad (2.2)$$

Заметим, что при $a=0$ формула (2.1) переходит в (1.2).

Наибольший интерес представляет значение потенциала на границе потока, т. е. при $y=0$ и $2\sigma = \pi x h^{-1}$.

В этом случае, как видно из формулы (2.1), $\text{Im} \zeta = 0$ и

$$\varphi = -Q_2 \pi^{-1} [(q-1) \ln |\xi (q-1)^{-1} + 1| + \ln |1 - \xi|] \quad (2.3)$$

$$\xi = 1 - 2q[R + |P| \text{sign}(x-d)] [1 + |P| \text{sign}(x-d)]^{-1} (1+R)^{-1}$$

Как и в предыдущей задаче, рассмотрим те же самые три случая измерения напоров (значения величин x_i приведены в п. 1 и везде считается, что $lh^{-1} \gg 1$).

1°. В первом случае после некоторых упрощений получим формулу для разности напоров

$$\begin{aligned} k(H_1 - H_2) &= \frac{Q_1}{h} (l+d) + \frac{Q_1 - Q_2}{\pi} \ln \left(\frac{1 - |P|}{1 + |P|} \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) + \\ &+ \frac{Q_2}{\pi} \ln \left(\frac{1 - |P|}{|P| - R} \frac{1 - R}{2 \cos^2 \alpha} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

2°. Во втором случае после упрощений имеем

$$k(H_3 - H_4) = \frac{Q_1 - Q_2}{h} (l - d) + \frac{Q_2}{\pi} \ln \left(\frac{2}{R+1} \frac{R + |P|}{1 + |P|} \right) + \frac{Q_1 - Q_2}{\pi} \ln \left(\frac{1 - |P|}{1 + |P|} \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) \quad (2.5)$$

3°. В этом случае для разности напоров получена формула

$$k(H_1 - H_4) = \frac{2Q_1 - Q_2}{h} l + \frac{Q_2}{h} d - \frac{Q_1 - Q_2}{\pi} \ln(\cos^4 \alpha) + \frac{Q_2}{\pi} \ln \left(\frac{1 - R}{1 + R} \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) \quad (2.6)$$

На основании полученных формул произведены вычисления расходов Q_2 в зависимости от напоров по длине потока. При напорах $H_1=2$ м, $H_2=1$ м, $H_4=0,6$ м и коэффициенте фильтрации 150 л/с в задаче без шпунта расход $Q_2=12$ см²/с. При тех же значениях напоров и коэффициенте фильтрации в задаче со шпунтом расход $Q_2=84$ см²/с. Для сравнения ниже приведены данные натуральных наблюдений за ростом объема наледей в долинах горных рек Северо-Востока СССР [3]:

Название реки	Количество дней наблюдений	Прирост объема наледей, м ³	Ширина фильтрационной зоны, м	Удельный наледный расход, см ² /с
Арга-Урях	14	63200	300	16,0
Верина	10	57300	250	24,0
Еченки	10	16800	1000	17,8

Коэффициент фильтрации в этих реках изменяется от 75 до 150 л/сут, а напоры в верхней точке достигают 2–3 м. Видно, что порядок величин расходов, вычисленных по формулам, и натуральных одинаков. Введение шпунта заметно увеличивает расход Q_2 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев В. Р., Савко Н. Ф. Теория наледных процессов. М.: Наука, 1975. 204 с.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
3. Калабин А. И. Вечная мерзлота и гидрология Северо-Востока СССР. Магадан, 1960. 471 с.

Воронеж

Поступила в редакцию
15.V.1981

УДК 532.546

МЕДЛЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ПРОНИЦАЕМОЙ СФЕРЫ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

БИРИХ Р. В., РУДАКОВ Р. Н.

В приближении Стокса рассмотрено течение вязкой жидкости около проницаемой сферы. Примером такого течения может служить обтекание перфорированной или решетчатой сферической поверхности. Элементы сферы содержат твердые непроницаемые участки и отверстия, через которые может протекать жидкость. Взаимодействие сферы с потоком описывается двумя коэффициентами сопротивления, которые устанавливают связь между скоростью течения жидкости на сфере и тензором напряжений на ней. Исследована зависимость формы течения, а также силы сопротивления и расхода жидкости от этих коэффициентов. В частных случаях полученное решение описывает обтекание твердого и жидкого шаров.

Рассмотрим медленное движение проницаемой сферы с постоянной скоростью u в вязкой жидкости. В сферической системе координат r, θ , неподвижно связанной со сферой, уравнения и граничные условия для распределения скоростей в стоксо-