

УДК 532.516.5

О ПРИМЕНИМОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ БУССИНЕСКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
НЕСТАЦИОНАРНОЙ КОНЦЕНТРАЦИОННОЙ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ

НИКУЛИН Д. А.

подавляющее большинство работ, посвященных теоретическому исследованию свободноконвективных течений, базируется на использовании системы уравнений в приближении Буссинеска. Однако обоснование этого приближения строится на качественных рассуждениях (см., например, [1]), не позволяющих дать строгую оценку границ его применимости. Прямого же сравнения решений, полученных с использованием приближения Буссинеска и на основе полной системы уравнений Навье – Стокса, в результате которого могла бы быть получена такая оценка, не проводилось. Главной причиной этого является, по-видимому, сложность численного интегрирования полной системы при расчете существенно дозвуковых течений с переменной плотностью [2].

В работах [3, 4] сформулирована система уравнений, практически не уступающая по общности полной системе уравнений переноса для рассматриваемых течений. В то же время при ее численном интегрировании не возникает каких-либо дополнительных трудностей по сравнению с интегрированием системы уравнений в приближении Буссинеска. Тем самым значительно облегчается проведение указанного выше сравнительного анализа. В данной работе такой анализ проводится для задач нестационарной естественной конвекции изотермической газовой смеси в замкнутой области.

Система уравнений, описывающая рассматриваемые течения, имеет вид [3]

$$\frac{\partial M}{\partial t} + v_i \frac{\partial M}{\partial x_i} + M \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$M \frac{\partial v_i}{\partial t} + M v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{C_0 - C}{C_{\epsilon M} + 1} \delta_{i2} + \frac{\Phi_i}{\sqrt{Ag}} \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\epsilon_M}{C_0 \epsilon_M + 1} \frac{1}{\sqrt{Ag} Sc} \frac{\partial}{\partial x_i} M \frac{\partial C}{\partial x_i} \quad (3)$$

$$M = \frac{C_0 \epsilon_M + 1}{C_{\epsilon M} + 1}, \quad \epsilon_M = \frac{M_2}{M_1} - 1$$

$$\Phi_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_\lambda} \delta_{ij} \right] \right\}$$

$$Ag = \frac{gL_0^3 \epsilon_M \rho_0^2}{\mu_0^2}, \quad Sc = \frac{\mu_0}{\rho_0 D_0}$$

Здесь p – избыточное динамическое давление, а M – молекулярный вес смеси. Индекс 0 относится к величинам, принятым за масштабы, а индексы 1 и 2 – к первому (легкому) и второму (тяжелому) газам соответственно. Остальные обозначения общеприняты.

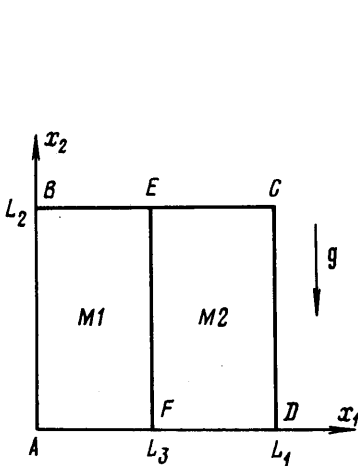
Соответствующая система уравнений в приближении Буссинеска, справедливая для описания течений смеси с близкими значениями молекулярных весов компонен-

тов, т. е. малыми значениями параметра ϵ_M , имеет вид [3]

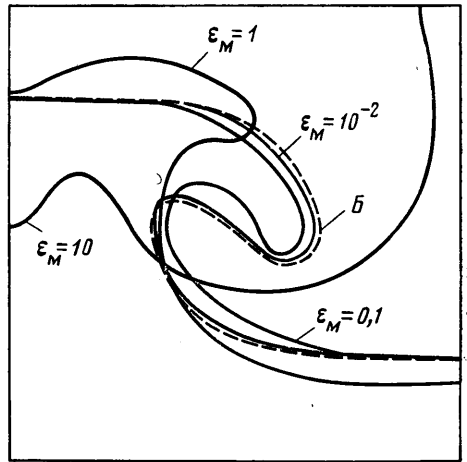
$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} - (C_0 - C) \delta_{i2} + \frac{\Phi_i}{\sqrt{Ar}} \quad (4)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_i \frac{\partial C}{\partial x_i} = \frac{1}{\sqrt{Ar} Sc} \frac{\partial^2 C}{\partial x_i^2} \quad (5)$$

Для определения границ применимости системы уравнений (1)–(3) по параметру ϵ_M было проведено сравнение ее решения с решениями системы уравнений (4)–(5) в широком диапазоне изменения этого параметра.



Фиг. 1



Фиг. 2

Рассматривалась следующая задача. Замкнутая прямоугольная область разделена жесткой вертикальной перегородкой EF , слева и справа от которой при температуре T_0 находятся газы с молекулярными весами M_1 и M_2 соответственно (фиг. 1). В начальный момент времени перегородка мгновенно убирается. Требуется рассчитать развитие во времени полей концентраций и скорости возникающего при этом течения.

В качестве начальных условий задаются параметры, соответствующие условиям равновесия в левой и правой частях области

$$t=0; v_i=0; C=1; 0 < x_1 \leq 0,5; C=0; 0,5 < x_1 < 1 \quad (6)$$

В качестве граничных условий на твердых стенках используются условия прилипания и отсутствия диффузионного потока

$$(v_i)_w = 0, \quad \left(\frac{\partial C}{\partial n} \right)_w = 0 \quad (7)$$

где индекс w относится к параметрам на стенке, а n означает направление нормали к стенке.

Наличие в системе уравнений (1)–(3) уравнения (3), сходного по форме с условием несжимаемости (4), позволяет использовать для численного интегрирования обеих систем уравнений единую методику. В частности, в данной работе использовался численный метод, предложенный в [5].

Основная часть расчетов была выполнена на конечно-разностной сетке с числом узлов 22×22 . Контрольные расчеты, проведенные на сетках 22×12 и 22×42 , показали, что при этом обеспечивается вполне приемлемая точность полученного численного решения.

Типичные результаты расчетов представлены на фиг. 2, на которой изображено положение изолиний объемных концентраций $X=0,5$ в области $ABCD$ для $Ar=4,9 \cdot 10^5$, $Sc=1$, $\mu_2/\mu_1=1$, $L_2/L_1=1$, $L_3/L_1=0,5$ в момент времени $t=6$, полученное при решении системы уравнений (1)–(3) для различных значений параметра ϵ_M (сплошные линии), а также результат решения уравнений (4)–(5) (штриховая ли-

ния), который не зависит от ϵ_M . Расчеты показали, что погрешность в определении состава смеси, обусловленная использованием системы (4)–(5), не превышает 5% лишь при $\epsilon_M \leq 0,1$.

Кроме того, система уравнений (4)–(5) обладает одной характерной особенностью, которая проявляется при решении задач с начальными условиями, соответствующими состоянию равновесия. Для иллюстрации рассмотрим течение, которое возникает в области $ABCD$ (фиг. 1) в том случае, когда в начальный момент времени она разделена не вертикальной, а горизонтальной перегородкой, снизу и сверху от которой покоятся различные газы, легкий – снизу. В этом случае начальные условия, соответствующие состоянию равновесия, имеют вид

$$t=0, v_i=0, C=1, 0 < x_2 \leq 0,5, C=0, 0,5 < x_2 < 1 \quad (8)$$

При таких начальных и граничных условиях системе уравнений (4)–(5) удовлетворяет решение, описывающее так называемое нестационарное равновесие. Действительно, $v_i=0$ удовлетворяет уравнению (4); при этом уравнения (4) и (5) становятся независимыми, причем (5) переходит в обычное уравнение диффузии, решение которого имеет вид $C=C(x_i, t)$. Тогда из уравнения нетрудно получить $p=p(C(x_i, t))$. В то же время очевидно, что такое решение не удовлетворяет системе уравнений (1)–(3) даже при близких значениях молекулярных весов газов. Проведенные численные эксперименты подтвердили этот вывод. Например, решение системы уравнений (4)–(5) в приближении Буссинеска при следующих значениях определяющих параметров задачи $Ag=4,9 \cdot 10^5$, $Sc=1$, $\mu_1/\mu_2=1$, $L_2/L_1=1$ до момента времени $t=8$ соответствовало состоянию нестационарного равновесия. Далее, из-за погрешностей в расчете давления и скорости возникло течение, которое привело к образованию градиентов концентрации по оси x_1 и возникновению выталкивающей силы. Однако это течение ни качественно, ни количественно не совпадает с течением, полученным в результате решения системы (1)–(3).

Для того, чтобы подтвердить, что возникающее течение является следствием погрешностей в расчете давления и скорости, был проведен расчет, в котором итерационная процедура решения уравнений (4) проводилась с большей на несколько порядков точностью, чем в описанном выше случае. Это привело к тому, что даже при $t=12$ решение уравнений в приближении Буссинеска отвечало состоянию нестационарного равновесия.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что приближение Буссинеска (4)–(5) может использоваться только для описания течений смесей, в которых отношение молекулярных весов газов $M_2/M_1 \leq 1,1$ в задачах с неравновесными начальными условиями.

Автор приносит глубокую благодарность М. Х. Стрельцу за руководство и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуковичкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
3. Никулин Д. А., Потехин Г. С., Стрелец М. Х. Приближенная система уравнений для описания нестационарной концентрационной естественной конвекции в бинарных газовых смесях. – Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 5, с. 57–61.
4. Никулин Д. А., Стрелец М. Х. Математическая модель и результаты расчетов нестационарного теплообмена при естественной конвекции бинарных смесей с произвольным отношением плотностей. – В кн.: Теплообмен-VI. Т. 1, Ч. 3. Минск, 1980, с. 114–118.
5. Ramshaw J. D., Trapp J. A. A numerical technique for low-speed homogeneous two-phase flow with sharp interfaces. – J. Comput. Phys., 1976, v. 21, № 4, p. 438–453.

Ленинград

Поступила в редакцию
26.XII.1980

УДК 532.5.526

ХАРАКТЕРИСТИКИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ВОГНУТОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОВОРОТА НА 90 ГРАДУСОВ

БОБОШКО В. А., РЫНДЯ Н. В., ШМЕДРО Ю. А.

Поведение турбулентного пограничного слоя сильно зависит от кривизны линий тока [1]. Наличие вихревой неустойчивости типа Гертлера (дополнительные поперечные деформации в потоке на вогнутой поверхности [2]) вносит свои эффекты помимо «чистых» эффектов кривизны [3], на характеристики потока и пограничного