МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1982

УДК 533.6.011

# О ПОЛУЧЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИЗ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ

ГОМАН О. Г.

Рассматривается вопрос о получении осесимметричных течений несжимаемой и сжимаемой жидкостей из плоскопараллельных с помощью интегральных преобразований, связывающих гармонические и $p$-гармонические функции [1]. Найдено преобразование, которое переводит плоскопараллельные течения от элементарных особенностей в осесимметричные. Показано, что это преобразование позволяет получить общий вид решения осесимметричных задач обтекания исходя из решения плоскопараллельных задач.

1. Известно, что преобразования вида

$$\Phi(x,y)=\alpha\int_0^y \frac{\varphi(x,r)r\,dr}{\sqrt{y^2-r^2}},\quad \varphi(x,r)=\frac{2}{\pi\alpha}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^r \frac{\Phi(x,y)y\,dy}{\sqrt{r^2-y^2}} \tag{1.1}$$

$$\Phi(x,y)=\alpha\int_y^\infty \frac{\varphi(x,r)r\,dr}{\sqrt{r^2-y^2}},\quad \varphi(x,r)=-\frac{2}{\pi\alpha}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int_r^\infty \frac{\Phi(x,y)y\,dy}{\sqrt{y^2-r^2}} \tag{1.2}$$

где $\alpha$ — произвольный коэффициент, переводят гармоническую функцию на плоскости $\Phi(x, y)$ в пространственную осесимметричную гармоническую функцию $\varphi(x, r)$ [1]. Преобразование (1.2), разумеется, применимо только для таких функций $\Phi$ и $\varphi$, которые достаточно быстро затухают при $y\to\infty$ и $r\to\infty$. Например, для равномерного потока преобразование (1.2) неприменимо.

На указанные преобразования можно смотреть как на установление соответствия между плоскопараллельными и осесимметричными течениями несжимаемой жидкости с потенциалами $\Phi(x, y)$ и $\varphi(x, r)$. При этом, как видно из (1.1) и (1.2), это соответствие не единственно: одному и тому же плоскопараллельному течению можно сопоставить два различных осесимметричных течения и наоборот. Более того, так как любая производная от $\Phi$ является также гармонической функцией, то, например, по формулам

$$\varphi=\frac{2}{\pi\alpha}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^r \frac{\partial^n\Phi}{\partial x^n}\frac{y\,dy}{\sqrt{r^2-y^2}},\quad \varphi=\frac{2}{\pi\alpha}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^r \frac{\partial^n\Phi}{\partial y^n}\frac{y\,dy}{\sqrt{r^2-y^2}}$$

и т. д. данному плоскому течению с потенциалом $\Phi$ можно сопоставить сколько угодно осесимметричных течений. Поэтому прежде всего возникает задача выбора такого единственного преобразования, которое осуществляло бы наиболее естественное соответствие между плоскопараллельным и осесимметричным потоками.

В замечании по поводу работы [2] Полубаринова-Кочина [3] рассмотрела преобразование

$$\varphi(x,r)=\int\limits_0^r \Phi(x,y)\frac{dy}{\sqrt{r^2-y^2}},\quad \Phi(x,y)=\frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^y \frac{\varphi(x,r)r\,dr}{\sqrt{y^2-r^2}} \tag{1.3}$$

дающее также связь между плоской $\Phi(x, y)$ и осесимметричной $\varphi(x, r)$ гармоническими функциями, и установила, что для несжимаемой жидкости плоский источник не переходит в пространственный и наоборот. В связи с этим возможность использования таких преобразований для получения осесимметричных течений из плоскопараллельных подвергалась сомнению. Но уже в [4] было показано, что преобразование (1.2) приводит к общему виду решения стационарной и нестационарной (с периодическими колебаниями) задач обтекания тонкого тела вращения сверхзвуковым потоком исходя из решения аналогичных задач для плоского тела.

Имеется несколько причин, по которым преобразование (1.3) непригодно для получения осесимметричных течений из плоскопараллельных.

Первая причина состоит в следующем. Так как осесимметричному течению естественно ставить в соответствие плоскопараллельное течение, симметричное относительно оси $x$ (именно такое требование и должно выставляться, для того чтобы плоский источник на оси $x$ переходил в пространственный), то функции $\varphi(x, r)$, четной по переменной $r$, должна соответствовать функция $\Phi(x, y)$, четная по $y$. Преобразование (1.3) этому условию не удовлетворяет: четную функцию $\Phi(x,y)$ оно переводит в нечетную $\varphi(x, r)$, поэтому плоскому источнику никакое реальное осесимметричное течение не может соответствовать, на что и указано в [3].

Вторая причина, менее очевидная, заключается в том, что задачи обтекания плоских и осесимметричных тел безграничной жидкостью суть внешние задачи и для них естественным является преобразование (1.2), а не (1.1), так как потенциалы определены вне тела (при этом течение от источника следует также причислять к внешним, поскольку оно эквивалентно движению от расширяющегося цилиндра или шара). Именно по этой причине преобразование (1.1), хотя и удовлетворяющее условию четности, источник в источник не переводит. Преобразование же (1.3) не удовлетворяет и второму требованию.

Итак, преобразование плоскопараллельных течений в осесимметричные должно удовлетворять условию четности и быть «внешним», т. е. иметь вид преобразования (1.2). Чтобы избежать неединственности соответствия, потребуем еще, чтобы при этом плоский источник в несжимаемой жидкости переходил в осесимметричный.

Всем этим требованиям, оказывается, удовлетворяет преобразование (1.2). Покажем, что оно пригодно как для установления соответствия между потенциалами элементарных особенностей плоскопараллельного и осесимметричного течений, так и для получения общих решений осесимметричных задач обтекания исходя из решений задач плоскопараллельных. Преобразование (1.2) в равной мере пригодно и для несжимаемой и для сжимаемой (в линейном приближении) жидкостей.

2. Рассмотрим здесь случай несжимаемой жидкости. Если функция $\Phi(x,y)$ достаточно быстро убывает при $y\to\infty$, то вторую формулу (1.2) можно записать в виде

$$\varphi=-\frac{2}{\pi\alpha}\int\limits_r^\infty \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{\sqrt{y^2-r^2}} \tag{2.1}$$

Из этой формулы легко получить, что плоский источник с комплексным потенциалом

$$w=m(2\pi)^{-1}\ln z \tag{2.2}$$

преобразуется в пространственный с потенциалом

$$\varphi=-\frac{2}{\pi\alpha}\int\limits_r^\infty \frac{m}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\frac{dy}{\sqrt{y^2-r^2}}=-\frac{m}{2\pi\alpha}\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}} \tag{2.3}$$

Выставив теперь требование, чтобы плоский и пространственный источники имели одинаковую интенсивность $m$, получим $\alpha=2$.

Таким образом, окончательный вид используемого преобразования следующий:

$$\Phi(x,y)=2\int\limits_y^\infty \frac{\varphi(x,r)\,r\,dr}{\sqrt{r^2-y^2}},\quad \varphi(x,r)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_r^\infty \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{\sqrt{y^2-r^2}} \tag{2.4}$$

Соответствующая полученному осесимметричному течению функция тока равна

$$\psi(x,r)=\frac{1}{\pi}\int\limits_r^\infty \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-r^2}}$$

Обратим внимание на то, что, хотя в выражения (2.2) и (2.3) входит одна и та же величина $m$, смысл она имеет различный: в первом случае это интенсивность плоского источника, а во втором — пространственного, так что эти величины отличаются даже по размерности. Следовательно, при переходе с помощью преобразований (2.4) от формулы (2.2) к формуле (2.3) интенсивность плоского источника должна быть заменена интенсивностью пространственного источника.

Плоский диполь с осью, направленной по оси $x$, для которого $w=-M(2\pi z)^{-1}$ ($M$ — действительное), преобразованием (2.4) переводится в осесимметричный диполь с потенциалом

$$\varphi=-\frac{M}{4\pi}\frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}} \tag{2.5}$$

т. е. момент диполя $M$ сохраняется (разумеется, что при переходе от плоского случая к пространственному эта велична меняет смысл, как об этом уже было сказано по поводу интенсивности источников). Сразу же заметим, что плоский диполь с осью, перпендикулярной оси $x$, не удовлетворяет условию четности и никакого осесимметричного течения ему соответствовать не может.

Рассмотренная связь между осесимметричным и плоским диполями дает возможность найти решение задачи о движении шара радиуса $a$ исходя из решения задачи о движении круга того же радиуса. Действительно, для круга, движущегося вдоль оси $x$ со скоростью $U$ в покоящейся на бесконечности жидкости, потенциал симметричного течения есть потенциал диполя

$$w=-Ua^2z^{-1}=-M(2\pi z)^{-1},\quad M=2\pi Ua^2$$

По формуле (2.4) ему соответствует осесимметричное течение от осесимметричного диполя с потенциалом вида (2.5) или в сферической системе ($R$, $\theta$, $\lambda$)

$$\varphi=-M(4\pi R^2)^{-1}\cos\theta \tag{2.6}$$

Учитывая различие в смысле величин $M$ в плоском и осесимметричном потоках, замена в формуле (2.6) числа $M$ значением $2\pi Ua^2$ неправомерна. Необходимо момент осесимметричного диполя выразить через кинематические и геометрические характеристики осесимметричного течения, что можно сделать, потребовав, например, выполнения условия непроницаемости в передней точке шара $\partial\varphi/\partial R=U$ при $R=a$, $\theta=0$. Это дает $M=2\pi Ua^3$ и

$$\varphi=-{}^1/_2Ua^3R^{-2}\cos\theta$$

в полном соответствии с известным результатом.

При вычислении потенциалов осесимметричных течений в несжимаемой жидкости удобно вместо $y$ ввести переменную интегрирования $\zeta=x+iy$, тогда формулу (2.4) можно записать в следующих эквивалентных видах:

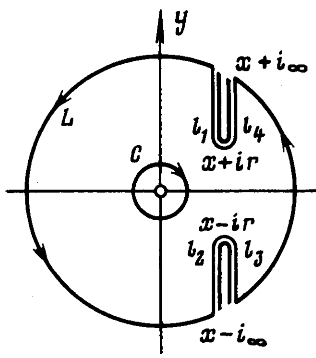
$$\varphi=-\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left(i\int\limits_r^\infty\frac{dw}{dz}\frac{dy}{\sqrt{y^2-r^2}}\right)=-\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left(i\int\limits_{x+ir}^{x+i\infty}\frac{dw}{dz}\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta-z)(\zeta-\bar z)}}\right)\tag{2.7}$$

Здесь $z=x+ir$, $\bar z=x-ir$, знак Re означает действительную часть.

Для соответствующей функции тока получим формулу

$$\psi=\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\int\limits_r^\infty\frac{dw}{dz}\frac{y\,dy}{\sqrt{y^2-r^2}}=-\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left(i\int\limits_{x+ir}^{x+i\infty}\frac{dw}{dz}\frac{(\zeta-x)\,d\zeta}{\sqrt{(\zeta-z)(\zeta-\bar z)}}\right)\tag{2.8}$$

При использовании последних выражений контур интегрирования можно деформировать в силу аналитичности подынтегральных функций. Это дает возможность применять теорему о вычетах.




Фиг. 1

В случае диполя, например

$$\varphi=-\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{M}{2\pi}iA\right),\qquad A=\int\limits_{x+ir}^{x+i\infty}\frac{1}{\zeta^2}\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta-z)(\zeta-\bar z)}}\tag{2.9}$$

В соответствии со структурой подынтегральной функции сделаем разрезы параллельно мнимой оси от точки $z$ до $x+i\infty$ и от $\bar z$ до $x-i\infty$. Выбрав контур интегрирования, как указано на фиг. 1, и фиксируя на $l_1$ значения аргументов $\arg(\zeta-z)=\pi/2$, $\arg(\zeta-\bar z)=\pi/2$, получим

$$\int\limits_{l_1+l_2+l_3+l_4+L+c}f(\zeta)\,d\zeta=0,\qquad f(\zeta)=\frac{1}{\zeta^2\sqrt{(\zeta-z)(\zeta-\bar z)}}\tag{2.10}$$

Интеграл по бесконечному контуру $L$ здесь исчезает. Интегралы по участкам $l_2$, $l_3$ и $l_4$ легко выражаются через интеграл $l_1$, который в свою очередь на основании (2.10) выражается через интеграл по окружности $c$. Последний интеграл сводится к определению вычета функции $f(\zeta)$ в точке $\zeta=0$. Вычисления приводят к формуле (2.5). Как интересный факт отметим, что теорема о вычетах дает значение только мнимой части интеграла $A$, т. е. как раз той, через которую выражается функция $\varphi(x, r)$.

3. Рассмотрим теперь случай сжимаемой жидкости. Преобразование (2.4) переводит также друг в друга решения волновых уравнений

$$a^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\tag{3.1}$$

$$a^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$

поскольку его действие заключается в том, что оператору $\partial^2/\partial y^2$ ставится в соответствие оператор $\partial^2/\partial r^2+r^{-1}\partial/\partial r$. Покажем, что при этом пространственный источник переменной интенсивности $q(t)$ переходит в плоский с той же интенсивностью и наоборот. Возьмем в качестве исходного потенциал пространственного источника (запаздывающий потенциал) как более наглядный

$$\varphi(x, r, t)=-(4\pi R)^{-1}q(t-R/a), \quad R=\sqrt{x^2+r^2}$$

Согласно (2.4), ему соответствует плоскопараллельное течение с потенциалом

$$\Phi(x, y, t)=2\int_y^\infty \frac{\varphi r\, dr}{\sqrt{r^2-y^2}}=-\frac{a}{2\pi}\int_{-\infty}^{t-a^{-1}\sqrt{x^2+r^2}} \frac{q(\tau)\, d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-x^2-y^2}} \tag{3.2}$$

который и представляет собой запаздывающий потенциал плоского источника.

Для периодических колебаний (с сохранением симметрии) $\Phi=\Phi_1\exp(i\omega t)$, $\varphi=\varphi_1\exp(i\omega t)$ и вместо (3.1) имеем уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2}+\frac{\omega^2}{a^2}\Phi_1=0$$

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}+\frac{\omega^2}{a^2}\varphi_1=0$$

Используя функцию влияния пространственного пульсирующего источника с расходящимися сферическими волнами [5]

$$\varphi_1=-q(4\pi R)^{-1}\exp(-i\omega a^{-1}R)$$

из формулы (2.4) получим функцию влияния плоского источника с расходящимися цилиндрическими волнами:

$$\Phi_1=2\int_y^\infty \frac{\varphi_1 r\, dr}{\sqrt{r^2-y^2}}=-\frac{q}{2\pi}\int_0^\infty \exp\left(-i\frac{\omega}{a}\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{ch} t\right)dt=$$

$$=\frac{iq}{4}H_0^{(2)}\left(\frac{\omega}{a}\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

Здесь $H_\nu^{(2)}$ — функция Ханкеля второго рода.

Покажем еще, что преобразование (2.4) годится также для стационарного и пульсирующего источников в сверхзвуковом потоке.

Для стационарного сверхзвукового течения имеем уравнения

$$-k^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0, \qquad -k^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0 \tag{3.3}$$

где $k=\sqrt{M^2-1}$, $M$ — число Маха. Потенциал плоского источника имеет вид [6]

$$\Phi=-\frac{q}{2k}\theta(x-k|y|), \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y}=-\frac{q}{2k}(\delta(x+ky)-\delta(x-ky)) \tag{3.4}$$

где $\theta(z)$ — единичная функция Хевисайда, $\delta(z)$ — дельта-функция, $q$ — интенсивность источника.

Для соответствующего осесимметричного течения получим выражение

$$\varphi=-\frac{1}{2k\pi}\int_r^\infty \frac{q}{\sqrt{y^2-r^2}}\delta(x-ky)\,dy=-\frac{q}{2\pi}\frac{\theta(x-kr)}{\sqrt{x^2-k^2r^2}} \tag{3.5}$$

Формула (3.5) представляет собой потенциал пространственного источника в начале координат в сверхзвуковом потоке. Отметим, что развитый формализм дает автоматически коэффициент $1/2\pi$ в выражении для потенциала пространственного источника в сверхзвуковом потоке (3.5), в отличие от коэффициента $1/4\pi$ в случае несжимаемой жидкости,— обстоятельство, которое обычно объясняется без должной строгости.

Рассмотрим, наконец, пульсирующий источник в сверхзвуковом потоке (пульсирующий источник, движущийся со сверхзвуковой скоростью $U$ в противоположном направлении оси $x$). В этом случае (в системе координат, связанной с источником), вводя замену

$$\Phi=\Phi_1\exp\left[i\omega\left(t-\frac{Mx}{ak^2}\right)\right],\qquad \varphi=\varphi_1\exp\left[i\omega\left(t-\frac{Mx}{ak^2}\right)\right]$$

вместо (3.1) получим уравнения

$$-k^2\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2}-c^2\Phi_1=0,\qquad c=\frac{\omega}{ak} \tag{3.6}$$

$$-k^2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}-c^2\varphi_1=0 \tag{3.7}$$

Функция влияния точечного источника для уравнения (3.6) известна. Для источника в точке $x=y=0$ она имеет вид [6] ($J_0$ – функция Бесселя)

$$\Phi_1=J_0(ck^{-1}\sqrt{x^2-k^2y^2})\,\theta(x-k|y|)$$

Из (1.2) теперь следует, что функция влияния пульсирующего пространственного источника равна

$$\varphi_1=-\frac{1}{\pi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int_r^\infty \frac{y}{\sqrt{y^2-r^2}}J_0\left(\frac{c}{k}\sqrt{x^2-k^2y^2}\right)\theta(x-k|y|)\,dy$$

Учитывая, что

$$\int_0^1\frac{J_0(mt)\,t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\sin m}{m}$$

для $\varphi_1$ получим выражение

$$\varphi_1=-k\pi^{-1}\cos(\omega k^{-1}(x^2-k^2r^2)^{1/2}(x^2-k^2r^2)^{-1/2}\theta(x-kr)$$

соответствующее пространственному пульсирующему источнику [7].

4. Рассмотрим возможность применения преобразования (2.4) для получения решений осесимметричных задач обтекания тел вращения из решения плоскопараллельных задач. Пусть $\Phi(x,\ y)$ – решение задачи обтекания плоского контура с уравнением $y=\pm f(x)$, $-a<x<a$, а $\varphi(x,\ r)$ – решение осесимметричной задачи для тела вращения с уравнением образующей $r=f(x)$. Такие задачи будем называть родственными или аналогичными.

Выясним, дает ли преобразование (2.4), примененное к функции $\Phi$, решение родственной осесимметричной задачи. Сначала рассмотрим несжимаемую жидкость. Решение задачи об обтекании симметричного плоского контура можно представить с помощью источников, распределенных внутри тела по оси $x$, в виде [8]

$$\frac{dw}{dz}=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{q(\xi)}{z-\xi}d\xi \tag{4.1}$$

где $q(\xi)$ — неизвестная заранее плотность источников, подлежащая определению из граничного условия $\partial\Phi/\partial n=\mathbf{Un}$, которое приводит к интегральному уравнению для $q$. Применение к функции (4.1) преобразования (2.4) дает выражение

$$\varphi=-\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left(i\int_r^\infty\frac{dy}{\sqrt{y^2-r^2}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{q(\xi)d\xi}{z-\xi}\right)\right)=-\frac{1}{4\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{q(\xi)d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+r^2}} \tag{4.2}$$

где теперь $q(\xi)$ уже имеет смысл интенсивности пространственных источников. Как и для плоской задачи, функция $q$ должна быть определена из интегрального уравнения, к которому сводится граничное условие.

Таким образом, если на выражения (4.1) и (4.2) смотреть как на общие решения, содержащие неизвестные функции $q$, то можно утверждать, что преобразование (2.4) дает общий вид решения осесимметричных задач исходя из общего вида решения плоских задач и только. Что же касается вопроса о получении с помощью преобразования (2.4) решения конкретной осесимметричной задачи обтекания из решения родственной плоской задачи, то ответ на него отрицательный, так как, даже если функция $q$ для плоской задачи уже определена, ее нельзя подставить в формулу (4.2) из-за указанного различия в смыслах функций $q$ в этой формуле и формуле (4.1). Общей же связи между плотностями пространственных и плоских источников родственных задач установить не удается. Точно так же, если, например, решение плоской задачи задано в аналитическом или численном виде, применение преобразования (2.4) не приводит к решению родственной осесимметричной задачи. Разумеется, преобразование (2.4) при этом дает некоторое осесимметричное течение, но в этом течении на поверхности $r=f(x)$ не обязательно будет выполняться условие непроницаемости. В этом смысле рассмотренная в п. 2 задача о движении круга и шара является исключением.

Обратимся теперь к теории тонких тел. Здесь возможности использования преобразования (2.4) немного шире. Для тонкого симметричного профиля в несжимаемой жидкости интенсивность распределенных источников, как известно [8], равна $q=2Uf'(x)$ (см. также фиг. 2). Понятно, что подстановка в формулу (4.2) вместо $q$ значения $2Uf'$ неправомерна — здесь должна стоять погонная интенсивность пространственных источников, расположенных на оси $x$, которая, как видно из фиг. 2, для тонкого тела равна $q=2\pi ff'U$. Заметим, что обычно это значение для $q$ получают из асимптотической формулы

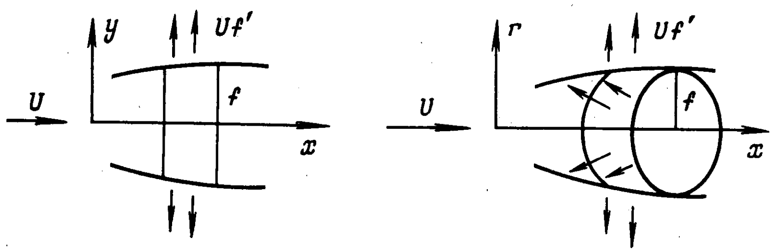
$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r\to 0}=\frac{1}{2\pi}\frac{q(x)}{r}$$

обоснование которой потребует определенных выкладок.

Итак, можно утверждать, что преобразование (2.4) дает возможность получить решение осесимметричной задачи, родственной с плоской, если одновременно с применением преобразования происходит замена значения функции $q=2Uf'$ на $q=2\pi Uff'$. Аналогичный вывод справедлив и для тонких тел в сжимаемой жидкости. Рассмотрим сначала задачу о стационарном обтекании профиля и тела вращения потоком со сверхзвуковой скоростью $U$, направленной вдоль оси $x$. Общее решение для верхней части профиля (решение Даламбера с учетом условия $\Phi=0$ на головной волне Маха) имеет вид

$$\Phi(x, y)=(F(x-ky)-F(0))\theta(x-ky) \tag{4.3}$$

где $F$ — неизвестная функция.




Фиг. 2

Применение преобразования (2.4) к выражению (4.3) дает общее решение осесимметричной задачи

$$\varphi(x,r)=\frac{k}{\pi}\int\limits_r^{x/k}\frac{F'(x-ky)\,dy}{\sqrt{y^2-r^2}}=\frac{k}{\pi}\int\limits_0^{x-kr}\frac{F'(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-k^2r^2}} \tag{4.4}$$

содержащее произвольную функцию. Для плоского случая условие непроницаемости на контуре профиля $y=f(x)$, $0<x<l$, дает $F'=-k^{-1}Uf'$, но это значение не может быть использовано в выражении (4.4). Соответствие осесимметричной и плоской задач требует при переходе от формулы (4.3) к формуле (4.4) замены интенсивности плоских источников интенсивностью пространственных источников. Поэтому установим, как функция $F$ связана с плотностью источников $q$ и как плотность источников в сверхзвуковом потоке выражается через геометрические характеристики тела.

Если решение плоской задачи представить с помощью распределенных источников, то из (3.4) получим

$$\Phi(x,y)=-\frac{1}{2k}\int\limits_0 q(\xi)\theta(x-\xi-ky)\,d\xi=-\frac{1}{2k}\int\limits_0^{x-ky}q(\xi)\,d\xi \tag{4.5}$$

Сравнение (4.3) и (4.5) дает связь функции $F$ с плотностью источников $F'=-(2k)^{-1}q$, поэтому выражению (4.4) можно придать вид

$$\varphi(x,r)=-\frac{1}{2k}\int\limits_0^{x-kr}\frac{q(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-k^2r^2}} \tag{4.6}$$

который следует и непосредственно из (3.5). Граничное условие для профиля дает $q=2Uf'$, т. е. в сверхзвуковом потоке плотность плоских источников выражается через локальные геометрические параметры профиля точно так же, как и в несжимаемой жидкости. Отсюда ясно, что аналогичное заключение будет справедливо и для тела вращения, т. е. и в сверхзвуковом потоке $q=2\pi Uff'$. Подставив это значение $q$ в формулу (4.6), получим решение осесимметричной задачи, соответствующей плоской задаче с уравнением профиля $y=\pm f(x)$.

В заключение рассмотрим случай произвольного нестационарного движения тонкого тела и профиля на примере задачи вертикального проникания в сжимаемую жидкость. Используя наложение запаздывающих источников, выражение для потенциала осесимметричного движения можно представить в виде [9]

$$\varphi(x,r)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} q(\xi,t')\,\theta(H(t')-\xi)\,\theta(H(t')+\xi)\,\frac{1}{R}\,d\xi$$

$$R=\sqrt{(x-\xi)^2+r^2},\quad t'=t-R/a$$

Здесь $x=H(t)$ – глубина погружения. Используя преобразование (2.4), легко получим известную формулу для потенциала проникания симметричного профиля [10]

$$\Phi(x,y)=-\frac{a}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi\int\limits_{-\infty}^{t-R/a}\frac{q(\xi,\tau)\,\theta(H(\tau)-\xi)\,\theta(H(\tau)+\xi)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-y^2}}\,d\tau$$

где на самом деле границы интегрирования определяются условиями $H(\tau)-\xi=0$ и $H(\tau)+\xi=0$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Положий Г. Н.* Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Киев: Изд-во Киевск. ун-та, 1965. 442 с.
2. *Усенко В. С.* Вопросы теории фильтрационных расчетов дренажных и водозаборных скважин. М.: Колос, 1968. 301 с.
3. *Полубаринова-Кочина П. Я.* К вопросу о получении осесимметричных течений из плоскопараллельных.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 3, с. 133–136.
4. *Гоман О. Г.* Замечание к вопросу о получении осесимметричных течений из плоскопараллельных.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 6, с. 157–158.
5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Гостехиздат, 1953. 680 с.
6. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
7. *Краснов Н. Ф., Кошевой В. Н., Данилов А. Н., Захарченко В. Ф.* Аэродинамика ракет. М.: Высшая школа, 1968. 772 с.
8. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.
9. *Григорян С. С.* Некоторые задачи гидродинамики тонких тел: Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1956.
10. *Сагомонян А. Я.* Проникание. М.: Изд-во МГУ, 1974. 299 с.


Днепропетровск

Поступила в редакцию 2.IV.1981