

УДК 532.5.013.4+538.4

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЙ С ПОВЕРХНОСТЯМИ РАЗРЫВА

БАРМИН А. А., ГУСАРОВА О. Л.

В линейной постановке исследуется устойчивость течений с однородным распределением параметров в расширяющихся областях, границами между которыми являются либо поверхности разрыва произвольной природы, либо поверхности с эффективными граничными условиями. Примерами таких течений являются распад произвольного разрыва [1] и течение в трубе с зоной тепловыделения [2].

Устойчивость решения задачи о поршне при наличии ударной волны в газовой динамике впервые рассматривалась в [3]. В работе [1] были получены критерии устойчивости для задачи о распаде произвольного разрыва в газовой динамике в виде неравенств на коэффициенты отражения малых возмущений от ударных волн и контактного разрыва. При этом авторами был предложен метод исследования, основанный на минимизации некоторой функции.

В настоящей работе указанным методом получены критерии устойчивости в виде неравенств на коэффициенты отражения от граничных поверхностей для любых решений в случае, когда существует только два времени хода (т.е. начальное возмущение граничной поверхности возвращается на нее в виде двух волн), и в случае произвольного числа времен хода, когда либо от рассматриваемой границы, либо к ней распространяются волны одного типа. Кроме рассмотренной в [1] задачи о распаде, являющейся частным случаем, полученный результат применим непосредственно к ряду других задач, например к задаче о поршне в магнитной гидродинамике с одной медленной волной или к аналогичной задаче теории нелинейной упругости [4]. Численно исследовалась устойчивость решения задачи о поршне в магнитной гидродинамике при наличии ионизирующих ударных волн. Выявлен ряд интересных особенностей рассматриваемого решения, в том числе и влияние начальных параметров на устойчивость. В областях значений параметров, при которых имеет место неединственность, выявлены неустойчивые решения.

Полученные в п.1 критерии могут быть использованы и при анализе устойчивости слабонеоднородных решений [5]. В этом случае вместо коэффициентов отражения в критерии устойчивости надо подставлять произведение коэффициента отражения на коэффициент усиления при прохождении возмущением расстояния по неоднородному фону между граничными поверхностями. В случае высоких частот их можно считать независимыми от частоты.

1. Исследуется поведение малых возмущений в областях, ограниченных распространяющимися в среде с постоянными скоростями двумя или тремя плоскими поверхностями разрыва, параллельными друг другу, на которых выставляются граничные условия, обеспечивающие эволюционность задачи. Предполагается, что возмущения, зависящие от одной пространственной координаты x , нормальной граничным плоскостям, в каждой из областей описываются гиперболическими системами уравнений, вообще говоря, различными:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + G \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

где \mathbf{u} — вектор возмущений, G — постоянная матрица, зависящая от параметров невозмущенного течения и имеющая n различных действительных характеристических корней, каждому из которых соответствует свой тип простой волны.

Перейдем в (1.1) к переменным $\xi = x/t$, $\tau = \ln t$, в которых граничные

условия задаются на неподвижных плоскостях.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + (G - \xi E) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} = 0 \quad (1.2)$$

Система (1.2) допускает решения вида $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\xi) e^{p\tau}$.

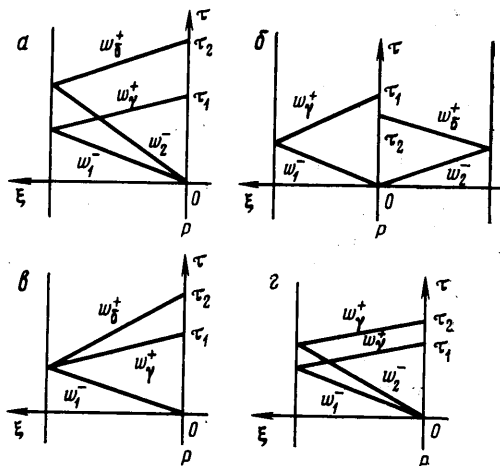
В момент времени $\tau_0 = 0$ на поверхности разрыва P сформировалось возмущение $\mathbf{u} = \mathbf{f}(0)$. Рассмотрим дальнейшую его эволюцию, т. е. $\mathbf{u}(0, \tau)$. Представим \mathbf{u} в виде обратного преобразования Лапласа

$$\mathbf{u}(0, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{A_1 - i\infty}^{A_1 + i\infty} \mathbf{F}(p) e^{p\tau} dp \quad (1.3)$$

$$\mathbf{F}(p) = \int_0^{\infty} \mathbf{u}(0, \tau) e^{-p\tau} d\tau, \quad A_1: |\mathbf{u}(0, \tau)| < c e^{(A_1 - \varepsilon)\tau}, \quad 0 \leq \varepsilon < \infty$$

Если $\text{Re } p > 0$, то течение, очевидно, неустойчиво. Если все $\text{Re } p < 0$ и $\sup(\text{Re } p) < 0$, то $A_1 = \sup(\text{Re } p)/2 < 0$ и функция $\mathbf{u}(0, \tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow +\infty$.

Возникшее в момент τ_0 возмущение можно разложить на суперпозицию простых волн, в которых изменение всех величин представляется через амплитуду волны и параметры невозмущенности потока. Обозначим через w_i^- амплитуды уходящих с P малых возмущений (в соответствии с требованием эволюционности $i=1, \dots, n-1$, где n — число граничных условий на P). Пусть, отразившись от других поверхностей, на P вернулось два возмущения. Это возможно в следующих ситуациях.



Фиг. 1

1. Среди уходящих с P возмущений существует два (w_1^- и w_2^-), каждое из которых, отразившись от других границ, порождает только одно возмущение (w_1^+ , w_8^+ соответственно), приходящее обратно на P (фиг. 1, а, б).

2. Существует только одно уходящее возмущение (w_1^-), в результате отражения которого от другой границы возникают два возмущения (w_1^+ , w_8^+), приходящие на P (фиг. 1, в).

3. Существуют два уходящих возмущения (w_1^- , w_2^-), каждое из которых, отразившись, порождает одно возмущение w_1^+ , приходящее на P (фиг. 1, г). (Верхний индекс «плюс» означает, что соответствующее возмущение приходит на P , «минус» — уходит с P).

Время прихода $t_{1,2}$ соответствующего возмущения обратно на P после отражения линейно растёт с ростом времени его возникновения t_0 : $t_{1,2} = \varphi(a_{1,2}, a_{\tau,\delta}, u_P, v_F) \cdot t_0$, где a_i — скорость относительно среды возмущения типа i , u_P, v_P — нормальная скорость среды относительно P перед и за разрывом соответственно. Время хода $\tau_{1,2}$ не зависит от τ_0 , так как $\tau_{1,2} = \ln t_{1,2} - \ln t_0 = \ln \varphi(a_{1,2}, a_{\tau,\delta}, u_P, v_P)$ является константой для данных параметров течения.

Обозначим коэффициенты отражения возмущений, уходящих с P , от других поверхностей через K_{τ_1} , K_{δ_2} , а коэффициенты отражения от P $D_{k\tau}$, $D_{k\delta}$:

$$w_{\tau}^+ = K_{\tau_1} w_1^-, \quad w_{\delta}^+ = K_{\delta_2} w_2^-, \quad w_k^- = D_{k\tau} w_{\tau}^+, \quad w_k^- = D_{k\delta} \cdot w_{\delta}^+, \quad k=1, \dots, n-1.$$

Для случая 2 необходимо ввести коэффициенты K_{τ_1} , K_{δ_1} , случай 3 совпадает со случаем 1 при $\gamma = \delta$.

В силу гиперболичности системы и однородности невозмущенного состояния изменение амплитуд возмущений происходит только на граничных плоскостях. Тогда линеаризованные соотношения на P в момент $\tau = \max(\tau_1, \tau_2)$ для случая 1 имеют вид

$$\|A\| \cdot w^-(0) e^{p\tau} = b K_{\tau_1} w_1^-(0) e^{p(\tau-\tau_1)} + c K_{\delta_2} w_2^-(0) e^{p(\tau-\tau_2)} \quad (1.4)$$

В случае 2 в уравнении (1.4) $K_{\delta_2} = K_{\delta_1}$, $w_2^-(0) = w_1^-(0)$. В случае 3 $K_{\delta_2} = K_{\tau_2}$, $c = b$.

Для того чтобы у системы (1.4) существовало нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю

$$1 = K_{\tau_1} D_{1\tau} e^{-p\tau_1} + K_{\delta_2} D_{2\delta} e^{-p\tau_2} + K_{\tau_1} K_{\delta_2} (D_{2\tau} D_{1\delta} - D_{1\tau} D_{2\delta}) e^{-p(\tau_1+\tau_2)} \quad (1.5)$$

$$p = \nu + i\omega$$

В дисперсионном соотношении для случая 2 нужно заменить в (1.5) $D_{2\tau}$ на $D_{1\tau}$, $D_{2\delta}$ на $D_{1\delta}$, K_{δ_2} на K_{δ_1} ; для случая 3 — K_{δ_2} на K_{τ_2} , $D_{2\delta}$ на $D_{2\tau}$, $D_{1\delta}$ на $D_{1\tau}$.

Вообще говоря, τ_1 и τ_2 линейно-независимы, т. е. τ_1/τ_2 иррационально. Используем метод работы [1]. Согласно теореме Кронекера [6], располагаясь величиной ω , аргументам первого и второго слагаемого в (1.5) можно с точностью до произвольного ϵ придать любое наперед заданное значение, и замыкание множества действительных частей корней уравнения (1.5) будет совпадать со множеством значений ν , удовлетворяющих уравнению (1.6), где α, β — произвольные действительные числа

$$1 = e^{-\nu\tau_1} |K_{\tau_1} D_{1\tau}| e^{-i\alpha} + e^{-\nu\tau_2} |K_{\delta_2} D_{2\delta}| e^{-i\beta} + e^{-\nu(\tau_1+\tau_2)} \operatorname{sgn}(K_{\tau_1} D_{1\tau} K_{\delta_2} D_{2\delta}) (K_{\tau_1} D_{2\tau} K_{\delta_2} D_{1\delta} - K_{\tau_1} D_{1\tau} K_{\delta_2} D_{2\delta}) e^{-i(\alpha+\beta)} \quad (1.6)$$

Ищем наибольшее ν , удовлетворяющее (1.6). Условие асимптотической устойчивости течения: $\nu_{\max} < 0$. Уравнение (1.6) преобразуется к виду

$$1 = |e^{-i\alpha}|^2 = F(\nu, \mu) \quad (1.7)$$

$$F(\nu, \mu) = \frac{1 - 2b(\nu)\mu + b^2(\nu)}{a^2(\nu) - 2a(\nu)c(\nu)\mu + c^2(\nu)}$$

$$a(\nu) = |K_{\tau_1} D_{1\tau}| e^{-\nu\tau_1}, \quad b(\nu) = |K_{\delta_2} D_{2\delta}| e^{-\nu\tau_2}$$

$$c(\nu) = (K_{\tau_1} D_{1\tau} K_{\delta_2} D_{2\delta} - K_{\tau_1} D_{2\tau} K_{\delta_2} D_{1\delta}) \operatorname{sgn}(K_{\tau_1} D_{1\tau} K_{\delta_2} D_{2\delta}) e^{-\nu(\tau_1+\tau_2)}, \quad \mu = \cos \beta$$

При $\nu \rightarrow +\infty$ $a, b, c \rightarrow 0$, следовательно, $F(\nu, \mu) \rightarrow +\infty$. Таким образом, наибольшее ν должно удовлетворять уравнению

$$\min_{-1 \leq \mu \leq 1} F(\nu, \mu) = 1$$

Так как $F(\nu, \mu)$ — дробно-линейная функция по μ и при $\mu \in [-1, 1]$ положительна, она достигает минимума при $\mu = \pm 1$. Уравнение (1.7) пре-

образуется к виду

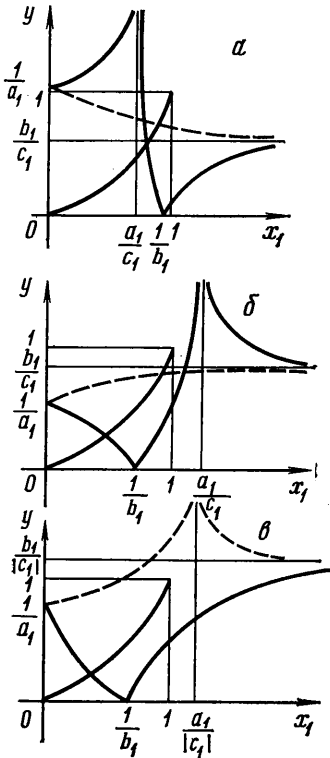
$$y(x_1, \pm 1) = \left| \frac{1 \mp b_1 x_1}{a_1 \mp c_1 x_1} \right| = x_1^m \quad (1.8)$$

$$e^{-\nu \tau_2} = x_1, \quad \tau_1 / \tau_2 = m, \quad a_1 = |K_{\tau_1} D_{1\tau}|, \quad b_1 = |K_{\delta_2} D_{2\delta}|$$

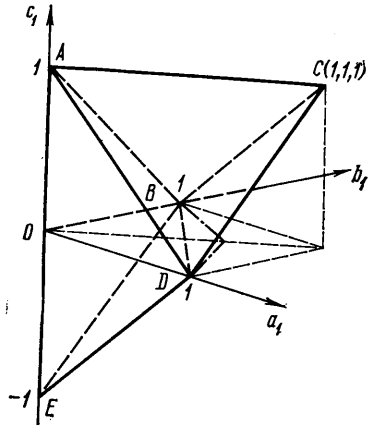
$$c_1 = (K_{\tau_1} D_{1\tau} K_{\delta_2} D_{2\delta} - K_{\tau_1} D_{2\tau} K_{\delta_2} D_{1\delta}) \operatorname{sgn}(K_{\tau_1} D_{1\tau} K_{\delta_2} D_{2\delta})$$

Необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости — отсутствие корней уравнения (1.8) при $x_1 \in (0, 1]$. При $c_1 \geq 0$ (фиг. 2, а, б, случаю $\mu=1$ соответствует сплошная линия, $\mu=-1$ — штриховая) необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости: $1 > b_1 + |a_1 - c_1|$, $1 > a_1 + c_1 - b_1$; при $c_1 < 0$ (фиг. 2, в): $1 > b_1 + a_1 - c_1$. В пространстве a_1, b_1, c_1 область асимптотической устойчивости $ABCDE$ изображена на фиг. 3.

Таким образом, необходимые и



Фиг. 2



Фиг. 3

достаточные условия асимптотической устойчивости можно записать в виде

$$1 > |K_{\delta_2} D_{2\delta}| + | |K_{\tau_1} D_{1\tau}| - \operatorname{sgn}(K_{\tau_1} D_{1\tau} K_{\delta_2} D_{2\delta}) (K_{\tau_1} D_{1\tau} K_{\delta_2} D_{2\delta} - K_{\tau_1} D_{2\tau} K_{\delta_2} D_{1\delta}) |$$

$$1 > |K_{\tau_1} D_{1\tau}| + \operatorname{sgn}(K_{\tau_1} D_{1\tau} K_{\delta_2} D_{2\delta}) (K_{\tau_1} D_{1\tau} K_{\delta_2} D_{2\delta} - K_{\tau_1} D_{2\tau} K_{\delta_2} D_{1\delta}) - |K_{\delta_2} D_{2\delta}|$$

$$\operatorname{sgn}(K_{\tau_1} D_{1\tau} K_{\delta_2} D_{2\delta}) (K_{\tau_1} D_{1\tau} K_{\delta_2} D_{2\delta} - K_{\tau_1} D_{2\tau} K_{\delta_2} D_{1\delta}) \geq 0 \quad (1.9)$$

$$1 > |K_{\delta_2} D_{2\delta}| + |K_{\tau_1} D_{1\tau}| - \operatorname{sgn}(K_{\tau_1} D_{1\tau} K_{\delta_2} D_{2\delta}) (K_{\tau_1} D_{1\tau} K_{\delta_2} D_{2\delta} - K_{\tau_1} D_{2\tau} K_{\delta_2} D_{1\delta})$$

$$\operatorname{sgn}(K_{\tau_1} D_{1\tau} K_{\delta_2} D_{2\delta}) (K_{\tau_1} D_{1\tau} K_{\delta_2} D_{2\delta} - K_{\tau_1} D_{2\tau} K_{\delta_2} D_{1\delta}) < 0$$

Отметим, что шар с центром в 0 и радиусом $1/\sqrt{3}$ касается плоскостей $ADC, ABC, EBDC$ фигуры $ABCDE$, поэтому достаточное условие асимптотической устойчивости можно представить в виде

$$(K_{\tau_1} D_{1\tau})^2 + (K_{\delta_2} D_{2\delta})^2 + (K_{\tau_1} D_{1\tau} K_{\delta_2} D_{2\delta} - K_{\tau_1} D_{2\tau} K_{\delta_2} D_{1\delta})^2 \leq 1/3$$

Случаю 2, 3 соответствует $c_1=0$, следовательно, условиями асимптотической устойчивости соответственно будут

$$1 > |K_{\gamma_1} D_{1\gamma}| + |K_{\delta_1} D_{1\delta}|, \quad 1 > |K_{\gamma_2} D_{2\gamma}| + |K_{\delta_2} D_{2\delta}|$$

В работе [1] исследовалось поведение малых возмущений в области, ограниченной распространяющимися в идеальном совершенном газе с постоянными скоростями в противоположных направлениях плоскими поверхностями разрыва (либо ударными волнами, либо центрированными волнами разрежения), между которыми в общем случае имеется поверхность контактного разрыва. Это соответствует случаю 1 (фиг. 1, б), когда на поверхности P независим только один коэффициент отражения. В пространстве a_1, b_1, c_1 этому случаю соответствует некоторая поверхность, причем часть ее, лежащая внутри области $ABCDE$, отвечает устойчивым решениям. Проекция границы этой области на плоскость a_1, b_1 отмечена на фиг. 3 штрихпунктирной линией.

Критерии (1.9) также непосредственно применимы к анализу устойчивости решения автомодельной задачи, рассмотренной в [4], когда по нелинейно-упругому полубесконечному телу идет одна комбинированная ударная волна $D_{c\gamma}$, что соответствует случаю 1 (фиг. 1, а). В результате счета было показано, что ударная волна становится неустойчивой, когда перед ней вторая компонента вектора деформации ($\epsilon, \gamma/\sqrt{3}$) велика ($\gamma_1 \sim 10\,000$) и волна достаточно сильная $\gamma_2 \sim 1$, причем основной вклад в растущую собственную функцию вносят медленные волны. При $\gamma_2 \sim 0$ ударная волна устойчива.

В случае, когда в задаче число времен хода больше двух ($k > 2$), возмущения взаимодействуют с двумя граничными поверхностями и одну из них могут догнать возмущения только типа 1, дисперсионное соотношение имеет вид

$$1 = \sum_{i=1}^k K_{i1} D_{i1} e^{-p\tau_i}$$

Ищем минимум по $\mu_i (i=2, \dots, k)$ следующей функции [1]:

$$F(\nu, \mu_2, \dots, \mu_k) = \left(1 - \sum_{i=2}^k a_i \mu_i\right)^2 + \left(\sum_{i=2}^k b_i \sqrt{1 - \mu_i^2}\right)^2 - a_1^2 = 0 \quad (1.10)$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \omega: |\omega\tau_j - \alpha_j| < \epsilon, \quad \cos \alpha_j = \mu_j, \quad a_j = |K_{j1} D_{j1}| e^{-\nu\tau_j}, \quad b_j = x_j a_j, \\ x_j = \pm 1, \quad j=1, \dots, k$$

Функция (1.10) не имеет точек минимума в области $-1 < \mu_j < 1$, $j=2, \dots, k$, так как в них

$$\frac{\partial F}{\partial \mu_j} = \left(1 - \sum_{i=2}^k a_i \mu_i\right) a_j + \left(\sum_{i=2}^k b_i \sqrt{1 - \mu_i^2}\right) \frac{b_j \mu_j}{\sqrt{1 - \mu_j^2}} = 0 \quad (1.11)$$

Следовательно, в точке минимума

$$\frac{a_2}{a_j} = \frac{b_2 \mu_2 \sqrt{1 - \mu_j^2}}{b_j \mu_j \sqrt{1 - \mu_2^2}}, \quad j=3, \dots, k$$

и $\mu_j = x_j x_2 \mu_2$. После подстановки μ_j в (1.11) получаем $F_{\mu_j} = 1$, следовательно, F достигает минимума на границе. В случае трех времен хода минимум находится в одной из граничных точек (μ_2, μ_3) : $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$. В случае четырех времен хода граница области $(\mu_2^1, \mu_3^1, \mu_4^1)$

соответствует области (μ_2, μ_3) и возможными точками минимума являются восемь точек. Для случая k времен хода их число равно 2^{k-1} .

Рассмотрим в одной из них уравнение (1.10)

$$\left(1 - \sum_{i=2}^k a_i \mu_i\right)^2 = a_1^2, \quad \mu_i = \pm 1, \quad i=2, \dots, k.$$

Так как при $\nu \rightarrow +\infty$ $a_i \rightarrow 0$, наибольшее ν удовлетворяет уравнению $1 = a_1 + \dots + a_k$. Следовательно, условие устойчивости — отсутствие на $(0, 1]$ корней уравнения

$$1 = \sum_{i=1}^k |K_{ii} D_{ii}| x_i^{n_i}, \quad e^{-\nu \tau_i} = x_i, \quad \frac{\tau_i}{\tau_1} = n_i, \quad i=1, \dots, k$$

Это дает критерий асимптотической устойчивости в виде

$$\sum_{i=1}^k |K_{ii} D_{ii}| < 1$$

Полученный результат применим, например, к анализу устойчивости течения с быстрой и медленной МГД-ударными волнами.

2. Критерии устойчивости (1.9) непосредственно применимы к задаче о проводящем поршне при наличии магнитного поля, когда по газу распространяется медленная ионизирующая ударная волна. Задача о поршне с ионизирующими волнами была решена в [7]. Пусть идеально проводящий плоский поршень в момент времени $t=0$ начинает двигаться из положения $x=0$ с постоянной скоростью $U_n = u_n e_x + v_n e_y$. В начальный момент времени в области $x>0$ находится покоящийся непроводящий газ с постоянными плотностью и давлением, а электрическое поле $E = E_z e_z$ и магнитное поле $H = H_x e_x + H_y e_y$ однородны. Предполагается, что движение поршня вызывает образование ионизирующей ударной волны, за которой электропроводность газа отлична от нуля.

Граничными условиями на поверхности поршня являются условие непротекания газа и обращение в нуль касательной к поршню составляющей электрического поля в системе координат, связанной с поршнем. При $H_x \neq 0$, когда газ примыкает к поршню, вследствие идеальной проводимости граничные условия сводятся к совпадению векторов скорости газа и поршня.

Как было показано в [7], при небольших скоростях поршня (u_n, v_n) перед ним распространяется одна медленная сверхзвуковая ионизирующая ударная волна (I^-). Перейдем к системе координат, связанной с волной так, что ось x нормальна волне, оси y и z лежат в плоскости разрыва и величины v_y, v_z, H_z перед разрывом равны нулю. Используя закон Ома и непрерывность касательной составляющей электрического поля, законы сохранения массы, импульса и энергии на I^- можно привести к виду [7]

$$\begin{aligned} \{\rho u\} &= 0 \\ \left\{ \left(p + \frac{H_z^2}{8\pi} \right) n + \rho u v - \frac{H_z H_\tau}{4\pi} \right\} &= 0 \\ \left(\rho u' + \frac{v^2}{2} + p u \right)' &= \frac{1}{4\pi} (H_x v_z - u_z H_x) (H_x - H_x) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь индекс 1 соответствует величинам перед волной, 2 — за волной, $\{A\} = A_2 - A_1$, $v = (u, v, w)$. Для простоты волну будем считать плоскополяризованной: $H_{z_2} = 0$, $w_2 = 0$.

Возникшее в момент τ_0 на I^- возмущение можно представить в виде суперпозиции возмущений типа энтропийной, альфвеновской, быстрой и медленной магнитозвуковых волн с амплитудами соответственно $\delta\rho_{e1}$, δH_{z_1} , $\delta\rho_{+1}$, $\delta\rho_{-1}$. В область 1 звуковые возмущения не идут, так как волна сверхзвуковая, и изменением магнитного поля в электромагнитных волнах можно пренебречь по сравнению с δH_{z_1} ($\delta E_{y1} \sim u\delta H_{z_1}/c$, $\delta E_{z1} \sim u\delta H_{y1}/c$, $|v|/c \ll 1$ и в электромагнитных волнах $\delta H_{z, v} \sim \delta E_{v, z}$).

После линеаризации (2.1) для альфвеновских возмущений получаем отдельное уравнение (линеаризованная проекция закона сохранения импульса на ось z)

$$\left(\frac{\rho_2 u_2}{\sqrt{4\pi\rho_2}} + \frac{H_x}{4\pi} \right) \delta H_{z_1}^- = - \left(\frac{H_x}{4\pi} - \frac{\rho_2 u_2}{\sqrt{4\pi\rho_2}} \right) \delta H_{z_1}^+$$

и модуль коэффициента отражения альфвеновского возмущения от I^- меньше единицы. При отражении магнитозвуковых волн от I^- альфвеновские возмущения не возникают, и можно считать возмущение, возникшее в момент τ_0 на I^- , суперпозицией только энтропийной, быстрой и медленной магнитозвуковых волн. Так как $u_2 < a_{-2}$, то после отражения от поршня на I^- вернуться магнитозвуковые возмущения. Коэффициенты отражения от поршня возмущений с волновым вектором, перпендикулярным поршню, $K_{\gamma_1} = K_{\alpha_2} = 1$. Все величины в области 2 выражаются через P_1 , h_1 , ΔP , Δh [7]:

$$h_2 = h_1 + \Delta h, \quad P_2 = P_1 + \Delta P - (0,5\Delta h^2 + h_1\Delta h) \quad (2.2)$$

$$U_2^2 = \frac{(\Delta P)^2 + (\Delta h)^2 + 2\Delta P P_1 \gamma_1 / (\gamma_1 - 1)}{2(\gamma_2 P_2 / (\gamma_2 - 1) - \Delta P - P_1 \gamma_1 / (\gamma_1 - 1) + h_2 \Delta h)}$$

$$U_1^2 = U_2^2 + \Delta P, \quad \eta = \frac{U_2^2}{U_1^2}, \quad V_2 = \frac{\Delta h}{U_2}, \quad h_i = \frac{H_{v_i}}{H_x}, \quad \eta = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

$$P_i = \frac{4\pi p_i}{H_x^2}, \quad U_i = \frac{u_i}{a_{A_i}} = \frac{u_i \sqrt{4\pi\rho_i}}{H_x}, \quad V_2 = \frac{v_2}{a_{A_2}}, \quad i=1, 2$$

Коэффициенты матриц A , b , c в безразмерных переменных (2.2) имеют вид

$$A_{i1} = d_i(a_+), \quad A_{i2} = d_i(a_-), \quad b_i = -d_i(-a_+), \quad c_i = -d_i(-a_-), \quad i=1, 2, 3$$

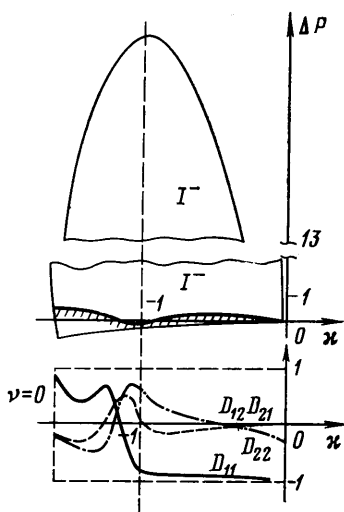
$$d_1(a) = (a + U_2)^2, \quad d_2(a) = (a + U_2) \left(\frac{\eta V_2}{\eta - 1} - \frac{a}{h_2} + \frac{\gamma_2 P_2}{ah_2} \right)$$

$$\begin{aligned} d_3(a) = & \frac{\gamma_2^2 U_2 P_2}{\gamma_2 - 1} - \frac{\eta a + U_2}{1 - \eta} \left(\frac{\gamma_2 P_2}{\gamma_2 - 1} + 1,5 U_2^2 + h_2^2 - h_2 h_1 \right) + \\ & + \frac{(a + U_2)}{1 - \eta} \left(\frac{\gamma_1 P_1}{\gamma_1 - 1} + 1,5 U_1^2 \right) + (U_2^2 + V_2^2) \frac{U_2}{2} - \frac{(a\eta + U_2) V_2^2}{2(1 - \eta)} + \\ & + (2U_2 h_2 - h_1 U_2 - V_2) \frac{(a^2 - \gamma_2 P_2)}{h} \end{aligned} \quad (2.3)$$

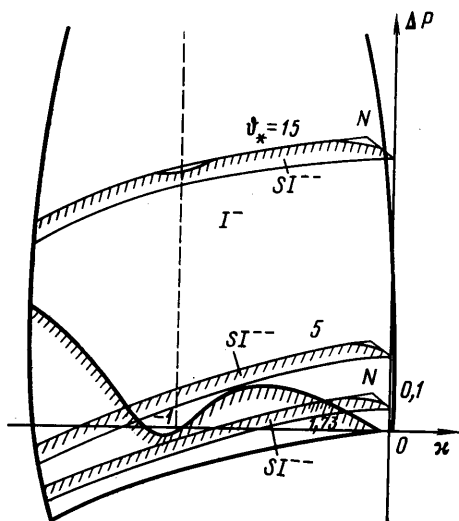
$$A_{13}=U_2^2, \quad A_{23}=\frac{U_2\eta V_2}{\eta-1}, \quad A_{33}=\frac{U_2}{1-\eta}\left(\frac{\gamma_1 P_1}{\gamma_1-1}-\frac{\gamma_2 P_2}{\gamma_2-1}+\right. \\ \left.+1,5(U_1^2-U_2^2)+h_2 h_1-h_2^2-\frac{V_2^2}{2}\right)+\frac{(U_2^2+V_2^2)U_2}{2}$$

Коэффициенты отражения от I^-D_{h1} , D_{h0} находятся из систем $\|A\| \cdot (D_{17}, D_{27}, D_{37})=\mathbf{b}$, $\|A\| \cdot (D_{10}, D_{20}, D_{30})=\mathbf{c}$.

Численно для различных начальных P_1 , h_1 при $\gamma_1=1,4$; $\gamma_2=1,2$ в области $L(\Delta P, \Delta h)$ существования решения с одной медленной сверхзвуковой ионизирующей ударной волной ($U_2 < a_{-}$, $U_1 > \sqrt{\gamma_1 P_1}$) построена граница устой-



Фиг. 4



Фиг. 5

чивости, определенная соотношениями (1.9) (фиг. 4, $h_1=5$, $P_1=0,001$). Эта граница делит область L на две части, при этом подобласть, в которой ΔP меньше, соответствует неустойчивым решениям. Неустойчивость может иметь место только если начальное магнитное поле велико (а именно начальное газодинамическое давление должно быть меньше в 0,7 раза магнитного). При значениях поперечной составляющей магнитного поля за ионизирующей волной, близких к нулю, течение является устойчивым при меньших интенсивностях волн, т. е. уменьшение касательной к фронту составляющей магнитного поля за волной приводит к стабилизации решения.

Анализ коэффициентов отражения показывает, что для решений с $h_2 > 0$ основной вклад в растущую собственную функцию вносят быстрые волны. Для решений с $h_2 < 0$ растущая собственная функция образуется всеми волнами, сдвинутыми по фазе, причем при подходе к линии Жуге ($U_2=a_{-2}$) роль быстрых волн возрастает.

В зависимости от отношения $\vartheta_* = T_*/T_1$ решение в виде I^- реализуется лишь в части L , тем большей, чем меньше ϑ_* (T_* — температура включения, т. е. $\sigma=0$ при $T \leq T_*$, $\sigma=\infty$ при $T > T_*$, где σ — проводимость).

При $\vartheta_* > 1$ возможно решение в виде двух волн: газодинамической (S), температура за которой равна критической T_* , и медленной дозвуковой ионизирующей (I^-), дополнительное соотношение на которой $T_1=T_*$. В этом случае, в отличие от предыдущего, возможно еще одно уходящее

с I^- возмущение — акустическое. Обозначим через $K_{\omega 3}$, $K_{\omega 2}$ коэффициенты отражения от S акустического возмущения в виде акустической и энтропийной волны соответственно; соответствующие времена хода обозначим τ_3 , τ_4 . Линеаризованное дополнительное соотношение $\delta T_1 = 0$ при произвольном уравнении состояния с учетом следующих термодинамических соотношений приводится к виду

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s &= \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p, & \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p &= -\frac{T(\partial p/\partial V)_T}{c_p - c_v}, \\ \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s &= \frac{c_p}{c_v} \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T, \\ 1 + K_{\omega 3} e^{-p\tau_3} - \frac{K_{\omega 2} e^{-p\tau_4}}{(c_p/c_v)_1 - 1} &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

Дисперсионное соотношение для этого случая имеет вид:

$$\begin{aligned} (1 - K_{\tau 1} D_{1\tau} e^{-p\tau_1} - K_{\delta 2} D_{2\delta} e^{-p\tau_2} - K_{\tau 1} K_{\delta 2} (D_{2\tau} D_{1\delta} - D_{1\tau} D_{2\delta})) \times \\ \times e^{-p(\tau_1 + \tau_2)} \left(1 + K_{\omega 3} e^{-p\tau_3} - \frac{K_{\omega 2} e^{-p\tau_4}}{\gamma_1 - 1} \right) = 0 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что необходимые и достаточные условия устойчивости (1.9) являются для решения в виде SI^- достаточными. Соотношение (2.4) по виду совпадает с соотношением п. 1 для случая 2. Следовательно, необходимыми и достаточными условиями устойчивости являются условия (1.9) и условие

$$|K_{\omega 3}| + |K_{\omega 2}| / (\gamma_1 - 1) < 1 \quad (2.5)$$

Величины $K_{\omega 3}$, $K_{\omega 2}$ зависят от интенсивности S , т. е. от Φ_* . В результате счета с $\gamma_0 = 1,4$, $\gamma_1 = 1,35$ было показано, что условие (2.5) не выполняется при $\Phi_* > 1,73$. При $1 < \Phi_* < 1,73$, решение SI^- неустойчиво во всей области существования, кроме окрестности точки N , за счет развития магнитогидродинамической неустойчивости (фиг. 5, $h_1 = 3$, $P_1 = 0,001$). При $\Phi_* > 1,73$ развиваются обе неустойчивости, при $\Phi_* > 13$ в окрестности $\kappa = \Delta h/h_1 = -1$ выполняются условия устойчивости (1.9), но решение SI^- остается неустойчивым за счет «газодинамической» неустойчивости.

Авторы благодарят А. Г. Куликовского за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Г. Я., Куликовский А. Г. Об устойчивости течений, возникающих при распадении произвольного разрыва. — ПММ, 1975, т. 39, вып. 1, с. 95–102.
2. Раушенбах Б. В. Вибрационное горение. М.: Физматгиз, 1961. 500 с.
3. Иорданский С. В. Об устойчивости плоской стационарной ударной волны. — ПММ, 1957, т. 21, вып. 4, с. 465–472.
4. Ленский Э. В. Исследование нестационарных процессов распространения и взаимодействия линейных и нелинейных возмущений в сжимаемых средах. Автомодельные задачи нелинейной упругости. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980, с. 40 (Ин-т мех. МГУ. Отчет № 2313).
5. Гринь В. Т., Крайко А. Н., Тилляева Н. И. Об устойчивости течения идеального газа в канале с замыкающим скачком уплотнения при одновременном отражении от сечения выхода акустических и энтропийных волн. — ПММ, 1976, т. 40, вып. 3, с. 469–478.
6. Левитан Б. М. Почти периодические функции. М.: Гостехиздат, 1953, с. 104–109.
7. Бармин А. А., Куликовский А. Г. Изменения скорости газа в ионизирующих ударных волнах. Задача о проводящем поршне. — ПММ, 1968, т. 32, вып. 3, с. 495–499.
8. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962, с. 82–105.

Москва

Поступила в редакцию
17.XI.1981