

УДК 532.529.6:536.25

**ДВИЖЕНИЕ КАПЛИ С УЧЕТОМ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ**

**РИВКИНД В. Я., СИГОВЦЕВ Г. С.**

Задача о стационарном движении капли в вязкой жидкости в изотермическом режиме рассматривалась рядом авторов. В работах [1, 2] получено аналитическое решение задачи в предположении, что движение жидкости внутри и вне сферической капли описывается уравнениями Стокса. При малых числах Рейнольдса и Вебера задача решалась методами сращиваемых асимптотических разложений в [3]. При переходных значениях чисел Рейнольдса и при различных значениях чисел Вебера задача рассматривалась численными методами в [4, 5].

В ряде работ изучались явления термокапиллярной конвекции в вязкой жидкости. Движение капель и пузырей под действием градиента поверхностного натяжения, обусловленного неоднородным температурным полем при малых значениях параметров изучались в [6–8]. В работе [9] рассмотрен случай движения сферической капли в неизотермическом режиме при числе Рейнольдса больших единицы. Задача о смешанной термокапиллярной и естественной конвекции в жидкости, содержащей газовый пузырь, при пониженной гравитации изучалась в [10, 11] и др., где получены численные решения в широком диапазоне определяющих параметров.

В данной работе рассматривается задача о движении капли в неоднородной по температуре вязкой среде, когда вследствие зависимости поверхностного натяжения от температуры на поверхности раздела двух сред возникают дополнительные касательные напряжения, вызывающие термокапиллярную конвекцию в жидкостях. Рассматриваются случаи движения сферической капли и деформированной, когда ее поверхность определяется в процессе решения. Рассчитана форма поверхности капли при различных значениях параметров задачи. Получены зависимости для числа Рейнольдса термокапиллярного дрейфа капли в отсутствие массовых сил.

**1. Постановка задачи.** Капля вязкой жидкости движется с постоянной скоростью  $u_\infty$  в другой несмешивающейся вязкой жидкости, в которой для создания неоднородного температурного поля, аналогично [6–8], вдали от капли задается постоянный градиент температуры  $\nabla T_\infty$ , параллельный вектору скорости центра масс капли. Предполагается, что течение и поле температур осесимметричны, все физические свойства жидкостей, кроме поверхностного натяжения  $\alpha'$ , на границе капля – жидкость  $\Gamma$  постоянны, а диссипацией энергии можно пренебречь. Считается, что к начальному моменту времени движение уже установилось и температура  $T'$  отсчитывается от невозмущенной температуры той точки пространства, в которой находится центр масс капли в рассматриваемый момент времени.

Для несжимаемой жидкости в системе координат, связанной с каплей, задача формулируется следующим образом:

$$-\Delta u_i + \text{Re}_l(u_i, \nabla) u_i + \nabla q_l = 0 \tag{1.1}$$

$$\text{div } u_i = 0 \tag{1.2}$$

$$-\Delta T_l + \text{Re}_l \text{Pr}_l(u_l, \nabla) T = 0 \tag{1.3}$$

$$|x| \rightarrow \infty, u_i \rightarrow i_i, \nabla T_l \rightarrow \nabla T_\infty / |\nabla T_\infty| \tag{1.4}$$

$$(u_n)_\Gamma = 0, [u]_\Gamma = 0 \tag{1.5}$$

$$[T]_\Gamma = 0, [\kappa \partial T / \partial n]_\Gamma = 0 \tag{1.6}$$

$$[\tau \sigma]_{\Gamma} = (\partial \alpha / \partial \tau) \quad (1.7)$$

$$[p \sigma]_{\Gamma} = -We^{-1}(R_1^{-1} + R_2^{-1}) \quad (1.8)$$

$$u_i' = |u_{\infty}| u_i, \quad x_i' = a x_i \quad (i=1, 2, 3)$$

$$p_i' = \rho_i a |u_{\infty}|^2 p_i, \quad Re_i = a |u_{\infty}| v_i^{-1}, \quad Pr_i = v_i / \chi_i$$

$$We = \rho_i a |u_{\infty}|^2 \alpha'^{-1}, \quad T_i' = a |\nabla T_{\infty}| T_i$$

$$q_i = p_i - n g a |u_{\infty}|^{-2} x_i, \quad \alpha' = \alpha \mu_2 |u_{\infty}|$$

$$[w]_{\Gamma} = w_2 - w_1, \quad R_k' = a R_k \quad (k=1, 2)$$

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} \lambda_i p_i + \lambda_i Re_i^{-1} (\partial u_{ij} / \partial x_j + \partial u_{ij} / \partial x_i)$$

$$i, j=1, 2, 3; \quad \lambda_1=1, \quad \lambda_2=\rho_2/\rho_1$$

Здесь  $u_i$ ,  $x_i$ ,  $p_i$ ,  $T_i$  и  $\alpha$  — безразмерные скорость, декартовы координаты, давление, температура и коэффициент поверхностного натяжения,  $Re_i$ ,  $Pr_i$ ,  $We$  — числа Рейнольдса, Прандтля и Вебера,  $v_i$  — кинематическая вязкость жидкости,  $\chi_i$ ,  $\kappa_i$  — коэффициенты теплопроводности и теплопроводности,  $\rho_i$  — плотность жидкости,  $n$  — перегрузка,  $q$  — ускорение свободного падения,  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений  $\sigma$ ,  $R_k$  — безразмерные радиусы главных кривизн,  $i_1$  — орт оси  $x_1$ ,  $\tau$ ,  $\mathbf{n}$  — касательный и нормальный к  $\Gamma$  единичные вектора,  $w_2$  и  $w_1$  — предельные значения функции  $w$  при стремлении к  $\Gamma$  соответственно извне и изнутри капли,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера, значения  $l=1$  и  $l=2$  соответствуют параметрам течения внутри и вне капли.

В общем случае подлежат определению вектор скорости  $\mathbf{u}$ , давление  $p$ , температура  $T$  и поверхность капли  $\Gamma$ .

**2. Алгоритм решения.** Численное решение задачи осуществляется в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$ , начало которой совпадает с центром тяжести капли, а полярная ось направлена по потоку. Так как задача предполагается осесимметричной (уравнения, граничные условия и условия согласования не зависят от координаты  $\varphi$ ), то она может быть переформулирована относительно функции тока  $\psi$ , определяемой соотношениями

$$u_{i,r} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta}, \quad u_{i,\theta} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_i}{\partial r}$$

и вихря  $\omega_i = \text{rot}_{\varphi} u_i$ .

Во внешней области вводятся новые неизвестные функции  $\psi^* = \psi_2 - 1/2r^2 \sin^2 \theta$  и  $T^* = T^2 - r \cos \theta$ , если направление задаваемого в невозмущенном потоке градиента температуры совпадает с направлением потока или  $T^* = T^2 + r \cos \theta$ , если эти направления противоположны, и во внешней области используется преобразование координат  $r = 1/R$ , позволяющее решать внешнюю задачу в конечной области с нулевым граничным условием для  $\psi^*$ ,  $\omega_2$ ,  $T^*$  при  $R=0$ .

Как показывают экспериментальные данные [12], для всех типов жидкостей, зависимость поверхностного натяжения от температуры во всем интервале температур, при которых проводились измерения, близка к линейной

$$\alpha = \alpha_0 (1 - \delta T) \quad (2.1)$$

Для решения полной задачи, включающей определение поверхности капли, используется следующий метод последовательных приближений. Выбирается некоторая достаточно гладкая поверхность капли  $\Gamma_0$  (в частности, в качестве начальной может использоваться сферическое прибли-

жение), для нее путем решения уравнений (1.1)–(1.3) с условиями (1.4)–(1.7) определяются поля течений и температур внутри и вне капли, затем по этим полям из условия (1.8), рассматриваемого как уравнение средней кривизны, определяется поверхность  $\Gamma_1$ , для поверхности  $\Gamma_1$  вновь решается задача (1.1)–(1.7) и т. д. до тех пор, пока относительная погрешность в определении последовательных приближений для искомой поверхности и полей течений не станет меньше заданной величины.

Для численного решения уравнений (1.1)–(1.3) с условиями (1.4)–(1.7) применяется метод установления с использованием неявных конечно-разностных схем типа переменных направлений. Решение уравнения средней кривизны строится методом Галеркина с использованием в качестве базисных функций полиномов Лежандра. Подробно аналогичный алгоритм численного решения для случая задачи о движении капли в изотермическом режиме описан в [4].

Задача решается отдельно внутри и вне капли, при этом значения функции тока и температуры на поверхности капли определяются из условий (1.5) и (1.6), а для вычисления значений вихря используется формула

$$\omega_{1|\Gamma}^{(k)} = \omega_{1|\Gamma}^{(k-1)} + \beta [u_{\tau}^{(k-1)}]_{\Gamma} \quad (2.2)$$

где  $0 < \beta < C$  – итерационный параметр,  $C$  – положительная постоянная, определяемая параметрами задачи,  $[u_{\tau}]$  – скачок касательной к границе компоненты вектора скорости. Функция  $\omega_{2|\Gamma}^{(k)}$  определяется далее из условия (1.7), которое с учетом формулы (2.1) записывается в виде ( $Mn$  – число Марангони)

$$\omega_{2|\Gamma}^{(k)} = \mu \omega_{1|\Gamma}^{(k)} + 2(u_{2\tau}^{(k-1)} - \mu u_{1\tau}^{(k-1)})_{|\Gamma} + 2 \frac{Mn}{Re_2} \frac{\partial T}{\partial \tau} \Big|_{\Gamma} \quad (2.3)$$

$$Mn = \alpha_0 \delta a^2 |\nabla T_{\infty}| (\mu_2 \nu_2)^{-1}$$

**3. Анализ результатов численного решения.** Стационарный характер движения капли предполагает, что равнодействующая сил архимедовой, термокапиллярной и сопротивления, действующих на каплю, равна нулю

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0, \quad |\mathbf{F}_1| = \frac{4}{3} \pi a^3 (\rho_2 - \rho_1) n g$$

$$\mathbf{F}_2 = \int_s \text{grad } \alpha \, ds, \quad |\mathbf{F}_3| = \frac{1}{2} C_x S_m \rho_2 |\mathbf{u}_{\infty}|^2$$

Здесь  $|\mathbf{F}_1|$  – величина архимедовой силы,  $|\mathbf{F}_2|$  – величина действующей на каплю термокапиллярной силы,  $|\mathbf{F}_3|$  – величина силы сопротивления, где  $C_x$  – коэффициент сопротивления,  $S_m$  – площадь миделева сечения капли.

Предполагается, что архимедова сила  $\mathbf{F}_1$  направлена параллельно  $\nabla T_{\infty}$ . Сила сопротивления  $\mathbf{F}_3$  направлена противоположно направлению движения капли, а направление термокапиллярной силы  $\mathbf{F}_2$  совпадает с направлением  $\nabla T_{\infty}$ . Таким образом, для случая, когда  $\nabla T_{\infty}$  и  $\mathbf{u}_{\infty}$  противоположно направлены, должно выполняться равенство  $|\mathbf{F}_1| + |\mathbf{F}_2| = |\mathbf{F}_3|$ , а когда направлены векторов  $\nabla T_{\infty}$  и  $\mathbf{u}_{\infty}$  совпадают – равенство  $|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2| + |\mathbf{F}_3|$ . Из этих равенств получаем два соотношения ( $Ag$  – критерий Архимеда)

$$4 Ag + \frac{24}{\pi} Mn \int_s \frac{\partial T}{\partial \tau} \, ds = 3 C_x (Re_2)^2 \quad (3.1)$$

$$4 \text{Ar} = \frac{24}{\pi} \text{Mn} \int_s \frac{\partial T}{\partial \tau} ds + 3C_x (\text{Re}_2)^2 \quad (3.2)$$

$$\text{Ar} = 8a^3 (\rho_2 - \rho_1) n g \rho_2 / \mu_2^2,$$

отвечающие случаям противоположной направленности и совпадения направлений векторов  $\nabla T_\infty$  и  $u_\infty$ . Равенства (3.1), (3.2) при заданных параметрах задачи позволяют определить значение  $\text{Ar}$ , необходимое для стационарного движения капли с заданными параметрами.

В случае малых значений параметра  $\text{We}_0 = \rho_1 a |u_\infty|^2 \alpha_0^{-1}$ , а, следовательно, малых значений величины  $\text{We} = \text{We}_0 / (1 - \delta T)$  отклонения формы капли от сферической незначительны и ими можно пренебречь. Некоторые результаты при малых числах  $\text{We}$  ( $\text{We} \ll 1$ ) в приближении сферической капли для случая, когда направление градиента температуры вдали от капли совпадает с направлением невозмущенного потока, приведены в [9]. Там описано возникновение вторичного течения вокруг и внутри капли и его развитие по мере увеличения значений числа Марангони. Коэффициент сопротивления в этом случае увеличивается с ростом числа  $\text{Mn}$  при фиксированных значениях остальных параметров. Увеличение  $\text{Mn}$  при фиксированном  $\text{Re}_1$  влечет также вследствие равенства (3.2) рост величины  $\text{Ar}$ . В табл. 1 приведены значения  $C_x$  при различных значениях чисел  $\text{Re}_1 = \text{Re}_2 = \text{Re}$  и при  $\text{Pr}_1 = \text{Pr}_2 = 1$ ,  $\mu = \nu = 1$ .

Таблица 1

Re	Mn=0	5	10	15	20
5	3,34	4,00	4,86	5,38	5,95
10	2,05	2,48	2,67	3,22	3,81
25	1,13	1,17	1,20	1,25	1,28

Если направление градиента температуры противоположно направлению невозмущенного потока, то картина течения качественно близка к той, которая имеет место при движении капли в изотермическом режиме [5]. При этом с увеличением числа Марангони при постоянных значениях остальных параметров скорость жидкости на поверхности капли возрастает, что влечет рост интенсивности течения внутри капли и в прилегающем к ней слое. Коэффициент сопротивления и величина  $\text{Ar}$  при этом уменьшаются. Градиент поверхностного натяжения также уменьшается с ростом  $\text{Mn}$ , что обуславливается более однородным распределением температуры по поверхности капли с ростом скорости жидкости в ее окрестности. Это же явление наблюдается с увеличением при прочих рав-

Таблица 2

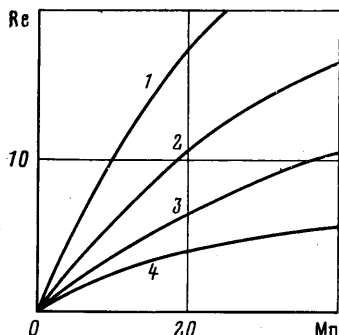
		Pr=0,1			Pr=1			Pr=10		
Mn	0	5	10	15	5	10	15	5	10	15
$v$	0,40	0,63	0,72	0,82	0,65	0,74	0,86	0,51	0,58	0,74
$ \psi_1 _{\max}$	0,052	0,073	0,091	0,107	0,077	0,094	0,110	0,066	0,076	0,087
$C_x$	3,34	3,03	2,49	2,08	2,72	2,30	1,89	3,00	2,80	2,60
Ar	240	131	5,2	-119	68	-83	-213	128	116	-22

ных условиях параметра  $Pr$ , вследствие роста влияния скорости жидкости на распределение температуры.

В табл. 2 приведены значения скорости  $v$  на поверхности капли в точке  $\theta = \pi/2$ , максимума абсолютной величины функции тока  $|\psi_1|_{\max}$  внутри капли, коэффициента сопротивления  $C_x$  и критерия Архимеда  $Ag$  при

$\mu = \kappa = 1$ ,  $Re_1 = Re_2 = 5$  и различных значениях чисел Марангони и Прандтля  $Pr_1 = Pr_2 = Pr$ .

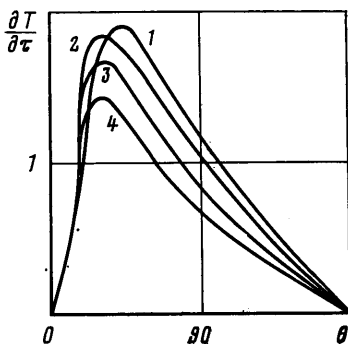
Кроме случая движения капли под действием архимедовой и термокапиллярной сил, когда параметры  $Re_i$  и  $Mn$  задаются независимо друг от друга, самостоятельный интерес представляет задача о стационарном термокапиллярном дрейфе, при котором движение капли осуществляется только за счет термокапиллярных сил. При этом в равенстве (3.1)  $Ag = 0$  и само равенство должно рассматриваться как уравнение относительно



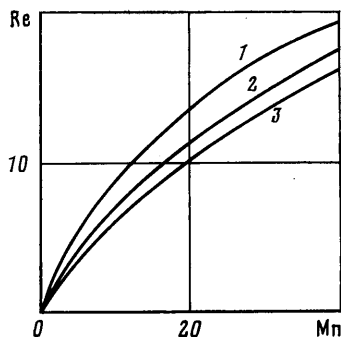
Фиг. 1

$$3C_x(Re)^2 = \frac{24}{\pi} Mn \int_s \frac{\partial T}{\partial \tau} ds \quad (3.3)$$

Решение этого уравнения может быть



Фиг. 2



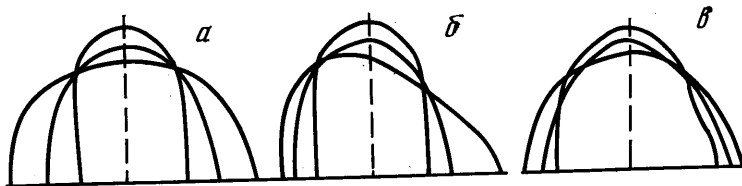
Фиг. 3

найден методом последовательных приближений, на каждом шагу которого вычисляется очередное приближение для числа Рейнольдса  $Re^n$ , после чего определяется величина  $C_x^n(Re^n)$  в результате решения полной задачи для системы уравнений Навье — Стокса и энергии. Затем определяется соответствующая этим значениям  $Re^n$ ,  $C_x^n$  величина невязки в уравнении (3.3). По полученной невязке вычисляется очередное приближение для числа Рейнольдса  $Re^{n+1}$  и т. д. до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность в определении  $Re$ .

Таким образом, были получены зависимости  $Re = Re(Mn)$  для ситуации термокапиллярного дрейфа капли при различных значениях определяющих параметров задачи. На фиг. 1 представлены зависимости  $Re = Re(Mn)$  термокапиллярного дрейфа при  $\mu = \kappa = 1$  для  $Pr = 0,5; 1; 2; 5$  (кривые 1—4 соответственно).

При уменьшении числа Прандтля при фиксированном значении числа Марангони и остальных параметров задачи, как следует из графиков на фиг. 1, скорость дрейфа капли возрастает. Это связано с относительным ростом величины термокапиллярной силы при уменьшении  $Pr$  (до вели-

чины порядка 0,2, при дальнейшем уменьшении  $Pg$  сила  $|F_2|$  также уменьшается) вследствие возрастания при этом средней по поверхности капли величины градиента температуры и, следовательно, градиента поверхностного натяжения. Распределение градиента температуры по поверхности капли при  $Mn=20$ ,  $\mu=\kappa=1$  представлено на фиг. 2, где кривые 1-4 соответствуют тем же значениям числа  $Pg$ , что и на фиг. 1.



Фиг. 4

На фиг. 3 показаны зависимости  $Re=Re(Mn)$  для  $Pg=1$ ,  $\kappa=1$  при различных величинах отношения коэффициентов динамической вязкости  $\mu=\mu_1/\mu_2=0,1; 1; 10$  (кривые 1-3 соответственно). Уменьшение  $\mu$  в 10 раз от 1,0 до 0,1 влечет возрастание  $Re$  на 16-20% в зависимости от значений других параметров, а увеличение  $\mu$  от 1 до 10 влечет уменьшение  $Re$  на 3-4%.

Для малых значений  $\mu$  полученные результаты находятся в хорошем соответствии с результатами эксперимента [13] (для  $\mu \ll 1$ ) и результатами работ [6-8].

Для расчета движения несферической капли вводим среднее по поверхности капли значение числа Вебера  $We_*$  (в предположении, что параметр  $\delta$  мал). Вообще говоря,  $We_*$  меняется со временем, но для изучения в начальном приближении влияния неоднородного температурного поля и обусловленного им дополнительного касательного напряжения на форму капли, характеристики и структуру течения по сравнению с изотермическим случаем считаем величину  $We_*$  постоянной.

На фиг. 4 представлены формы поверхности капли для разных случаев движения и различных значений параметров задачи. При  $Re_1=Re_2=5$ ,  $Pg_1=Pg_2=1$ ,  $\mu=\kappa=1$ ,  $We_*=3$  в случае, когда направления векторов  $\nabla T_\infty$  и  $u_\infty$  совпадают, формы капли приведены на фиг. 4, а (кривые 1-3 соответствуют значениям  $Mn=5; 20; 40$ ), а для случая противоположной направленности векторов  $\nabla T_\infty$  и  $u_\infty$  на фиг. 4, б (кривые 1-3 соответствуют значениям  $Mn=2; 5; 10$ ). Полученные формы поверхности заметно отличаются от тех, которые имеет капля при движении в изотермическом режиме [4]. На фиг. 4, в показаны формы капли для случая термокапиллярного дрейфа при  $Pg=\mu=\kappa=1$ ,  $Mn=15$ ,  $We_*=0,5; 1,5; 3,0$  (кривые 1-3). На фиг. 4 приведена только часть поверхности капли, для точек которой координата  $\theta$  меняется в промежутке от 0 до  $\pi$ . Часть поверхности капли, соответствующая изменению  $\theta$  от  $\pi$  до  $2\pi$ , симметрична приведенной на фиг. 4 в силу условия осесимметричности задачи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Hadamard J. Mouvement permanent lent d'une sphere liquide et visqueuse dans une liquide visqueuse.- Compt. Rend. Acad. Sci., 1911, v. 152, № 25, p. 3-8.
2. Rybczynski W. Uber die fortschreitende Bewegung einer Hüssigen Kugel in einem Lahn Medium. Bull. Acad. Sci. Cracovia Cl. sci. Math. et natur. Ser. A, 1911, p. 40-46.
3. Taylor T. D., Acrivos A. On the deformation and drag of a falling viscous drop at low Reynolds number.- J. Fluid Mech., 1964, v. 18, № 3, p. 466-476.

4. Ривкин В. Я. Стационарное движение вязкой капли с учетом ее деформации.— Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР, 1979, т. 84, с. 220–242.
5. Ривкин В. Я., Рыскин Г. М. Структура течения при движении сферической капли в жидкой среде в области переходных чисел Рейнольдса.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 1, с. 8–15.
6. Братухин Ю. К. Термокапиллярный дрейф капельки вязкой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 5, с. 156–161.
7. Братухин Ю. К. Обтекание газового пузыря потоком неравномерно нагретой жидкости при малых числах Марангони.— Инж. физ. ж., 1977, т. 32, № 2, с. 251–256.
8. Яламов Ю. И., Санасарян А. С. Движение капель в неоднородной по температуре вязкой среде.— Инж.-физ. ж., 1975, т. 28, № 6, с. 1061–1064.
9. Ривкин В. Я., Сизовцев Г. С. Движение капли в неизотермическом режиме.— В сб.: Матем. модели течений жидкости. Новосибирск, 1978, с. 237–245.
10. Кускова Т. В., Полежаев В. И. Численное исследование движения неизотермической вязкой жидкости, содержащей пузырь, в условиях пониженной гравитации.— В сб.: Вычисл. методы и программирование. Вып. 23. М.: Изд-во МГУ, 1974, с. 54–75.
11. Никитин С. А., Полежаев В. И. Конвекция и перенос тепла в сферическом сосуде, частично заполненном жидкостью, в условиях пониженной гравитации.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 2, с. 154–159.
12. Справочник химика. Т. 1, Л.: Химия, 1971. 1071 с.
13. Братухин Ю. К., Евдокимова О. А., Пшеничников А. Ф. Движение газовых пузырей в неоднородно нагретой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 5, с. 55–57.

Ленинград

Поступила в редакцию  
13.X.1980