

УДК 532.59

## **НЕЛИНЕЙНАЯ СТАДИЯ СДВИГОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ**

**ОСТРОВСКИЙ Л. А., СТЕПАНИЦ Ю. А.**

Вопрос об устойчивости сдвиговых течений жидкости, особенно с учетом вязкости, достаточно сложен уже в линейной постановке. Что же касается нелинейных эффектов, то относящиеся к ним результаты до сих пор сводятся чаще всего к эмпирическому описанию течений некоторых простейших конфигураций. Еще большие принципиальные сложности представляет исследование неустойчивости стратифицированной жидкости, движение которой характеризуется большим числом параметров; такая неустойчивость сопровождается, вообще говоря, генерацией внутренних волн. Обзор результатов линейной теории для таких процессов можно найти, например, в [1-3].

Нелинейная стадия развития неустойчивости в стратифицированной среде до сих пор исследовалась мало. Вместе с тем, как показано ниже, при определенных условиях учет стратификации может не усложнить, а, напротив, несколько упростить задачу именно благодаря генерации внутренних гравитационных волн, обладающих дисперсией. Наличие таких волновых стадий может отодвинуть, если не предотвратить вообще, турбулизацию течения. В этих случаях задача сводится к исследованию нелинейных внутренних волн, нарастающих за счет поступления энергии от сдвигового потока. Если в течение одного периода волна получает достаточно мало энергии от среднего потока, то связь между ее локальными параметрами (амплитудой, длиной и т. д.) можно найти, решая нелинейную консервативную задачу, а их медленное изменение из-за обмена энергией с потоком описать с помощью того или иного варианта метода возмущений. Несмотря на сложность, такая задача все же остается динамической и не связана с необходимостью описания перехода ламинарного потока в турбулентный.

В данной работе рассматривается нелинейная задача о генерации внутренних волн в двухслойной несжимаемой жидкости конечной глубины с тангенциальным разрывом скорости. Известно, что в такой модели течения (без учета поверхностного натяжения между слоями) в области достаточно больших волновых чисел имеет место неустойчивость Кельвина - Гельмгольца, обычно приводящая к быстрой турбулизации границы раздела. В области меньших волновых чисел неустойчивость отсутствует из-за стабилизирующего действия стратификации. Однако в этой области существуют волны с отрицательной энергией, которые становятся неустойчивыми при учете факторов, отбирающих у них энергию. Такие волны, несмотря на относительно малую (по сравнению со случаем Кельвина - Гельмгольца) скорость нарастания, представляют интерес для описания реальных океанических процессов, поскольку с ними связана длинноволновая неустойчивость течений, не ограниченная конечностью толщины переходной области между слоями. Ниже рассматриваются линейные характеристики и нелинейная стадия неустойчивости волн с отрицательной энергией в жидкости конечной глубины.

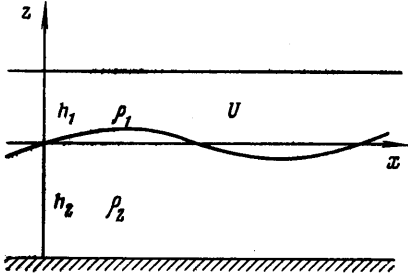
**1. Дисперсионные соотношения. Волны с отрицательной энергией.** Рассмотрим движение жидкости, состоящей из двух однородных слоев конечной толщины с резкой границей раздела, причем верхний слой с плотностью  $\rho_1$  и толщиной  $h_1$  движется относительно нижнего, имеющего плотность  $\rho_2$  и толщину  $h_2$ , с постоянной скоростью  $U$  (фиг. 1). Воспользуемся обычным для подобных задач приближением «твердой крышки», исключая поверхностные волны. Пренебрегая вначале вязкостью, запишем уравнения гидродинамики для двумерного движения в виде

$$\frac{\partial u_{1,2}}{\partial t} + U_{1,2} \frac{\partial u_{1,2}}{\partial x} + \frac{1}{\rho_{1,2}} \frac{\partial P_{1,2}}{\partial x} = -u_{1,2} \frac{\partial u_{1,2}}{\partial x} - v_{1,2} \frac{\partial u_{1,2}}{\partial z}$$

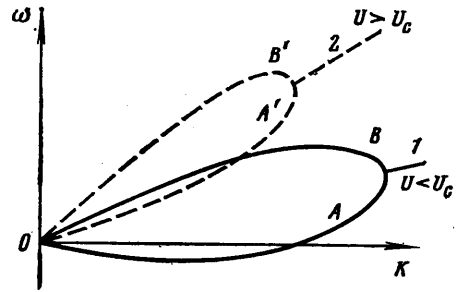
$$\frac{\partial v_{1,2}}{\partial t} + U_{1,2} \frac{\partial v_{1,2}}{\partial x} + \frac{1}{\rho_{1,2}} \frac{\partial P_{1,2}}{\partial z} + g = -u_{1,2} \frac{\partial v_{1,2}}{\partial x} - v_{1,2} \frac{\partial v_{1,2}}{\partial z} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u_{1,2}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1,2}}{\partial z} = 0$$

где индекс 1 относится к верхней жидкости, а индекс 2 — к нижней, при этом  $U_1=U$ ;  $U_2=0$ ;  $g$  — ускорение силы тяжести,  $P$  — давление,  $u$  — го-



Фиг. 1



Фиг. 2

ризонтальная,  $v$  — вертикальная компоненты скорости. Граничные условия имеют вид

$$v_1|_{z=h_1}=0; \quad v_2|_{z=-h_2}=0 \quad (1.2)$$

$$P_1=P_2; \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + U_{1,2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = v_{1,z} - u_{1,2} \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad z=\eta$$

где  $\eta(x, t)$  — смещение границы раздела.

Пренебрегая нелинейными членами, можно представить решение системы (1.1) в виде

$$u_{1,2} = A_{1,2} \operatorname{ch} k(z \mp h_{1,2}) e^{i(kx - \omega t)}$$

$$v_{1,2} = -i A_{1,2} \operatorname{sh} k(z \mp h_{1,2}) e^{i(kx - \omega t)} \quad (1.3)$$

$$P_{1,2} = \frac{\rho_{1,2}(\omega - kU_{1,2})}{k} u_{1,2} - \rho_{1,2}gz, \quad \eta = \eta_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

Подставляя (1.3) в (1.1), после несложных преобразований получим дисперсионное уравнение (ср. [4])

$$\omega_{1,2} = \frac{k\rho_1 U \operatorname{th} kh_2 \pm \{[(\rho_2 - \rho_1)gk(\rho_1 \operatorname{th} kh_2 + \rho_2 \operatorname{th} kh_1) - \rho_1 \rho_2 U^2 k^2] \operatorname{th} kh_1 \operatorname{th} kh_2\}^{1/2}}{\rho_1 \operatorname{th} kh_2 + \rho_2 \operatorname{th} kh_1} \quad (1.4)$$

При устремлении  $h_1$  и  $h_2$  к бесконечности из (1.4) следует дисперсионное уравнение, описывающее неустойчивость Кельвина — Гельмгольца в безграничной двухслойной жидкости [5]. Уже отсюда видно, что, как и для безграничной жидкости, при любой скорости течения  $U$  достаточно короткие волны (в пренебрежении поверхностным натяжением на границе раздела слоев) становятся неустойчивыми. Если же  $U$  превышает критическое значение

$$U_* = \sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 \rho_2} g(\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1)}$$

то, согласно (1.4), неустойчивыми становятся волны любых масштабов (фиг. 2). В дальнейшем будем рассматривать скорости  $U$ , меньшие критической, так что неустойчивость Кельвина — Гельмгольца проявляется лишь в области достаточно высоких значений  $k > k_*$ , где  $k_*$  определяется при заданном значении  $U$  из уравнения

$$\frac{\rho_1 \operatorname{th} k_* h_2 + \rho_2 \operatorname{th} k_* h_1}{k_*} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_2 - \rho_1} \frac{U^2}{g} \quad (1.5)$$

Типичные дисперсионные зависимости для двух значений  $U < U_*$  показаны на фиг. 2. Из анализа уравнения (1.4) видно, что одна из ветвей дисперсионной кривой может проходить через нуль при некотором значении  $k$  (кривая  $A$  на фиг. 2). Смена знака частоты означает существование в рассматриваемой системе волн с отрицательной энергией [6, 7], которые становятся неустойчивыми при наличии стока энергии, связанного, например, с учетом вязкости. Для слоев бесконечной глубины с близкими значениями плотности волны с отрицательной энергией лежат в области  $k_c < k < k_*$ , где  $k_c \simeq k_*/2$  [7]. Если же один (верхний) или оба слоя имеют конечную толщину, то нижняя дисперсионная ветвь может полностью перейти в область положительных  $\omega$ , причем ей соответствуют волны с отрицательной энергией (кривая  $A'$  на фиг. 2). Это происходит в случае, когда  $U$  превышает значение  $U_c = U_* (1 + \rho_1 h_2 / \rho_2 h_1)^{-1/2}$ . Наиболее интересными и трудными для анализа оказываются длинноволновые возмущения, поскольку для них мала дисперсия и волна может претерпевать сильные нелинейные искажения. Для анализа таких возмущений разложим дисперсионное уравнение (1.4) в ряд по степеням  $k$  и ограничимся двумя первыми членами разложения:

$$\omega_{1,2} = \frac{U_c k}{a+b} \left\{ ac \pm \sqrt{a[a-b(c^2-1)]} - \frac{ab}{a+b} \frac{k^2 h_2^2}{6} [2c(1-b^2)] \pm \frac{(a+b)^2 + c^2(1-b^2)(a-b)}{\sqrt{a[a-b(c^2-1)]}} \right\}, \quad a = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad b = \frac{h_1}{h_2}, \quad c = \frac{U}{U_c} \quad (1.6)$$

предполагается, что  $c < (1+a/b)^{1/2}$  (т. е.  $U < U_*$ ). Из формулы (1.6) видно, что при  $c > 1$  обе ветви дисперсионной кривой при  $k \rightarrow 0$  становятся положительными. Как будет показано ниже, при учете малой вязкости это приводит к появлению неустойчивости для волн всех масштабов, начиная с  $k=0$ .

**2. Влияние вязкости на устойчивость волн с отрицательной энергией в линейном приближении.** Учет теперь малую вязкость в каждом из слоев (в верхнем  $v_1$ , в нижнем  $v_2$ ). Пусть вначале  $v_1=0$ ,  $v_2 \neq 0$ . Уравнения движения для нижнего слоя жидкости в линейном приближении принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P_2}{\partial x} &= v_2 \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P_2}{\partial z} + g &= v_2 \left( \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Кинематические граничные условия при  $z=0$  в (1.2) остаются без изменений, а динамические следуют из равенства тангенциальных и нормальных напряжений [5]

$$P_1 = P_2 - 2v_2 \rho_2 \frac{\partial v_2}{\partial z}; \quad \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial v_2}{\partial z} = 0. \quad (2.2)$$

Кроме того, теперь необходимо потребовать выполнения условия  $v_2=0$  при  $z=-h_2$ . Представляя решение для компонент скорости в нижней жидкости в форме (остальные переменные отыскиваются в прежнем виде (1.3))

$$u_2 = [A_2' \operatorname{ch} k(z+h_2) + A_2'' \operatorname{ch} m_2(z+h_2)] e^{i(kx-\omega t)}$$

$$v_2 = \left[ -iA_2' \operatorname{sh} k(z+h_2) - i \frac{k}{m_2} A_2' \operatorname{sh} m_2(z+h_2) \right] e^{i(kx-\omega t)}$$

$$m_2^2 = k^2 - i \frac{\omega}{\nu_2}$$

получим дисперсионное уравнение с поправкой, обусловленной вязкостью

$$a(\omega - kU)^2 \operatorname{th} kh_2 + \omega^2 \operatorname{th} kh_1 - (1-a)gk \operatorname{th} kh_1 \operatorname{th} kh_2 = -4i\nu_2 k^2 \omega \operatorname{th} m_2 h_2 \quad (2.3)$$

Действуя аналогичным образом, можно найти поправку к дисперсионному уравнению и в том случае, когда верхний слой вязкий ( $\nu_1 \neq 0$ ), а нижний — идеальный ( $\nu_2 = 0$ ). При этом в правой части (2.3) появляется слагаемое

$$-4i\nu_1 a k^2 (\omega - kU) \operatorname{th} m_1 h_1, \quad m_1^2 = k^2 - i \frac{\omega - kU}{\nu_1}$$

Если же оба слоя имеют малую, но не нулевую вязкость, то строгое решение задачи даже в линейном приближении приводит к исследованию собственных значений уравнения четвертого порядка (Орра — Зоммерфельда). При наличии вязкости, строго говоря, не могут существовать разрывные профили течений. Однако на начальном этапе развития сдвигового течения, когда пограничный слой по обе стороны от границы раздела жидкостей различной плотности еще не слишком велик, для длинноволновых возмущений с характерным масштабом, много большим не только толщины пограничного слоя, но и полной глубины жидкости, профиль скорости можно аппроксимировать разрывным. Аналогичное приближение нередко используется в теории неустойчивостей однородной жидкости [1]. Чтобы получить приближенное дисперсионное уравнение с учетом малых вязкостей в обоих слоях, представим его в следующем функциональном виде:  $D(\omega, k) = iF(\nu_1, \nu_2, \omega, k)$ , где  $D(\omega, k) = 0$  представляет собой дисперсионное уравнение (2.3) для идеальной жидкости. Разложим функцию  $F$  в ряд по  $\nu_1, \nu_2$  и ограничимся первыми членами разложения

$$D(\omega, k) \simeq i[F_{\nu_1}'(\omega, k)\nu_1 + F_{\nu_2}'(\omega, k)\nu_2] \quad (2.4)$$

Вид коэффициентов разложения был, по существу, найден уже из решения «полувязких» задач для каждого из слоев (см. (2.3)). Считая мнимую поправку к частоте  $\delta$  малой по сравнению с действительной частью  $\omega$  (именно в этом смысле вязкости слоев считались малыми), легко найти ее вид из уравнений (2.3) и (2.4):

$$\delta_{1,2} = -4k^2 \frac{\nu_1 a (\omega_{1,2} - kU) \operatorname{th} m_1 h_1 + \nu_2 \omega_{1,2} \operatorname{th} m_2 h_2}{(\omega_{1,2} - \omega_{2,1}) (\operatorname{th} kh_1 + a \operatorname{th} kh_2)} \quad (2.5)$$

(отрицательный знак  $\delta$  соответствует затуханию волн, положительный — нарастанию). При  $kh_{1,2}$  получим

$$\delta_{1,2} = \frac{2k \{ac(\nu_1 b - \nu_2) - (\nu_1 a + \nu_2) a^{1/2} [a - b(c^2 - 1)]^{1/2}\}}{h_2(a+b) a^{1/2} [a - b(c^2 - 1)]^{1/2}} \quad (2.6)$$

Из анализа (2.6) следует, что при  $v_1=0$  длинноволновые колебания на верхней ветви дисперсионной кривой (см. фиг. 2) затухают при любых скоростях потока, меньших  $U_*$ . На нижней же ветви затухание сменяется нарастанием при  $c > 1$ . Если же  $v_2=0$ ,  $v_1 \neq 0$ , то длинноволновые колебания на верхней ветви нарастают при  $c > \sqrt{a/b}$ , тогда как на нижней ветви они затухают при любых скоростях, меньших  $U_*$ .

В рассматриваемой системе отсчета, в которой нижний слой жидкости неподвижен, волны на верхней ветви дисперсионной кривой имеют положительную энергию. В этом случае вязкость верхнего слоя приводит к отрицательной диссипации для этих волн. Знак энергии и диссипации, однако, может меняться при переходе из одной системы отсчета в другую, но факт наличия неустойчивости, ее инкремент и занимаемая область длин волн при этом не меняются [8]. Переходя в систему координат, в которой верхний слой неподвижен, а нижний движется, получим, что отрицательной энергией обладают волны на верхней ветви дисперсионной кривой, а вязкость верхнего слоя приводит к положительной диссипации для них.

**3. Нелинейная стадия. Взрывной рост длинных волн с отрицательной энергией.** Уравнения, описывающие распространение слабонелинейных волн с малой дисперсией, могут быть строго выведены на основе известного асимптотического метода (см., например, [9, 10]). Не останавливаясь на формальной стороне вывода, запишем, исходя из известных феноменологических соображений, приближенное уравнение для смещения границы раздела слоев жидкости. В качестве пояснения укажем лишь, что все линейные члены этого уравнения могут быть получены из дисперсионного уравнения обратным преобразованием Фурье по  $x$  и  $t$ , что эквивалентно замене  $\omega \rightarrow i\partial/\partial t$ ;  $k \rightarrow -i\partial/\partial x$ , а нелинейное слагаемое получается отдельно в пренебрежении дисперсией и вязкостью. В результате получим уравнение, описывающее распространение слабонелинейных волн с учетом вязкости (для упрощения положим далее  $a \approx 1$ ;  $v_1=v_2=v$ ):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + V \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} - \frac{\Gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \eta(x', t)}{\partial x'} \frac{\partial x'}{x-x'} = 0 \quad (3.1)$$

$$V = \frac{U_c}{1+b} [c + \sqrt{1-b(c^2-1)}]$$

$$\alpha = -\frac{3}{2} \frac{V}{h_2} \frac{1-b^{-2}(U/V-1)^2}{2-U/V}$$

$$\beta = \frac{U_c b}{1+b} \frac{h_2^2}{6} \left[ 2c(1-b) + \frac{1+b+c^2(1-b)^2}{[1-b(c^2-1)]^{1/2}} \right]$$

$$\Gamma = \frac{2\nu(\pm c(b-1) - 2\sqrt{1-b(c^2-1)})}{h_2(1+b)\sqrt{1-b(c^2-1)}}$$

В (3.1) интеграл берется в смысле главного значения. Это уравнение без последнего члена совпадает по виду с уравнением Кортевега — де Вриза для длинных внутренних волн в неподвижной жидкости [10, 12], однако коэффициент нелинейности  $\alpha$  здесь зависит от скорости течения. Решения (3.1) в пренебрежении вязкостью хорошо известны [12]; среди них особую роль играют стационарные периодические (кноидальные) волны и уединенные волны-солитоны. При учете последнего слагаемого, которое аналогично по структуре члену, описывающему в простейшем приближении затухание Ландау в плазме [12, 13], точных решений уравнения

(3.1) найти не удастся. Однако если это слагаемое мало по сравнению с остальными членами, то решения уравнения (3.1) будут локально близки к соответствующим точным решениям уравнения Кортевега — де Вриза, параметры которых (амплитуда, длина и т. д.) медленно меняются во времени. Возьмем за нулевое приближение кноидальную волну в виде [13]

$$\eta(x, t) = \frac{12\beta k^2}{\alpha\pi} K(\gamma) \frac{d}{d\theta} Zn \left[ \frac{K(\gamma)\theta}{\pi}, \gamma \right] \quad (3.2)$$

$$\theta = \omega t - k(x - Vt); \quad \omega = \frac{4\beta k^3}{\pi^2} K^2(\gamma) \left[ 2 - \gamma - 3 \frac{E(\gamma)}{K(\gamma)} \right]$$

Здесь  $Zn$  — дзета-функция Якоби с периодом  $2\pi$  по  $\theta$  и нулевым средним значением,  $E(\gamma)$  и  $K(\gamma)$  — полные эллиптические интегралы с модулем  $\gamma^{1/2}$ . Определим зависимость параметров этого решения от времени. Асимптотический подход, позволяющий описать эволюцию параметров волны, уже неоднократно применялся для волн различной природы (см., например, [10]), в данном случае он сводится к использованию уравнения баланса энергии, получаемого путем умножения (3.1) на  $\eta$  и последующего интегрирования по пространственному периоду волны

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle \eta^2 \rangle = \frac{\Gamma}{\pi} \left\langle \eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \eta(x', t)}{\partial x'} \frac{dx'}{x - x'} \right\rangle \quad (3.3)$$

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \dots dx$$

Подставляя (3.2) в (3.3), получим уравнение, описывающее изменение со временем параметра несинусоидальности волны  $\gamma$  (при  $\gamma \rightarrow 0$  форма волны близка к синусоиде, а при  $\gamma \rightarrow 1$  волна представляет собой последовательность импульсов, близких по форме к солитонам)

$$\frac{dY_1(\gamma)}{dt} = 2k \frac{\Gamma}{\pi} Y_3(\gamma)$$

$$Y_1(\gamma) = \frac{K^4(\gamma)}{\pi} \left[ \frac{4-2\gamma}{3} \frac{E(\gamma)}{K(\gamma)} - \frac{1-\gamma}{3} - \frac{E^2(\gamma)}{K^2(\gamma)} \right] \quad (3.4)$$

$$Y_3(\gamma) = K^2(\gamma) \left\langle \frac{dZn}{d\theta} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2 Zn}{d\theta'^2} \frac{d\theta'}{\theta - \theta'} \right\rangle$$

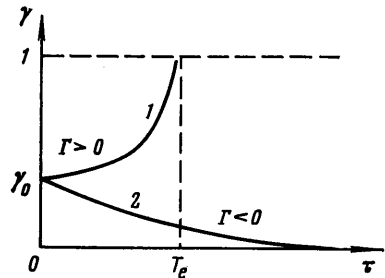
Решить это уравнение аналитически не удастся, однако в предельных случаях ( $\gamma \rightarrow 0$  или  $\gamma \rightarrow 1$ ) выражения для  $Y_1$ ,  $Y_3$  упрощаются [13]. В случае  $\gamma \rightarrow 0$  получаем экспоненциально растущие (если  $\Gamma > 0$ ) квазисинусоидальные волны с инкрементом (2.6). В случае же  $\gamma \rightarrow 1$  получаем

$$Y_1 \approx \frac{2}{3\pi^2} K^3(\gamma); \quad Y_3 \approx \frac{1,46}{\pi^2} K^4(\gamma); \quad K(\gamma) \approx \frac{1}{2} \ln \frac{16}{1-\gamma}$$

Тогда из (3.4) найдем

$$K(\gamma) = \frac{K(\gamma_0)}{1 - (1/\pi) 1,46 \Gamma k K(\gamma_0) t} \quad (3.5)$$

где  $\gamma_0$  — значение параметра  $\gamma$  при  $t=0$ . Отсюда следует, что если  $\Gamma > 0$ , то за конечное время  $t_e = \pi/1,46\Gamma k K(\gamma_0)$  параметр  $\gamma$  становится равным единице; при этом амплитуда волны (разность между максимальным и минимальным значениями  $\eta$ )  $A = 12\beta k^2 \gamma K(\gamma) / \alpha \pi^2$  обращается в бесконечность (см. фиг. 3 кривая 1). Такую неустойчивость, как известно, называют взрывной. Если же  $\Gamma < 0$ , то кноидальная волна затухает по закону, соответствующему затуханию Ландау в плазме [13] (см. фиг. 3 кривая 2). Знак параметра  $\Gamma$  при сделанных предположениях зависит от скорости относительного движения слоев. Если  $c > 2(1+b)^{-1/2}$ , то для одной из ветвей дисперсионной кривой  $\Gamma > 0$ , а для другой  $\Gamma < 0$ . При  $b > 1$  (верхний слой толще нижнего) неустойчивы волны на верхней ветви, а при  $b < 1$  — на нижней.



Фиг. 3

Как было сказано выше, при  $\gamma \rightarrow 1$  кноидальная волна представляет собой периодическую последовательность солитонов вида

$$\eta = A_s \operatorname{sch}^2 \frac{x - V_s t}{\Delta}, \quad \Delta = \sqrt{\frac{12\beta}{\alpha A}}; \quad V_s = V \left( 1 + \frac{\alpha A_s}{3} \right)$$

Сравнивая выражения для кноидальной волны и солитона, легко видеть, что последнее следует из первого при  $k \rightarrow 0$ ,  $\Delta = \pi/k\sqrt{\gamma K(\gamma)}$ . Тогда из (3.5) сразу получим зависимость амплитуды солитона от времени

$$A_s = \frac{A_0}{(1-t/T_e)^2}, \quad T_e = \frac{\pi \Delta_0}{1,46\Gamma} \tag{3.6}$$

Отсюда видно, что амплитуда солитона также растет взрывным образом и за конечное время  $T_e$  обращается в бесконечность.

**4. Заключение.** Итак, в стратифицированной жидкости конечной глубины со сдвиговым потоком, скорость которого меньше пороговой для проявления неустойчивости Кельвина — Гельмгольца на всех масштабах, наличие вязкости может приводить к возбуждению длинных (по сравнению с толщиной слоев) внутренних волн. При этом слабые волны, близкие к гармоническим, нарастают экспоненциально; по мере роста они приближаются по форме к солитонам, амплитуда которых растет взрывным образом, обращаясь в бесконечность за конечное время  $T_e$ , равное по порядку величины времени роста в  $e$  раз той же волны на экспоненциальной стадии. Разумеется, вблизи  $t = T_e$  развитая выше теория теряет применимость в связи с неизбежным обрушением волны большой амплитуды. Ограничения теории могут быть связаны также с учетом конечности толщины слоя сдвига, приводящим к ограничению инкремента и обращению его в нуль на масштабах порядка толщины переходной области между слоями, вследствие чего солитоны будут нарастать лишь до конечных амплитуд.

Возможность генерации и последующего «взрывного обрушения» внутренних волн на временах (расстояниях), относительно слабо зависящих от начальной амплитуды ( $T_e \sim A_0^{-1/2}$ ), представляет интерес для океанологии в связи с изучением источников энергии внутренних волн и механизмов образования турбулентных «пятен». Приведем простейшую оценку. Положим  $h_1 = 5$  м,  $h_2 = 20$  м,  $(\rho_2 - \rho_1) / \rho = 5 \cdot 10^{-4}$ , тогда  $U_* = 0,35$  м/с,  $U_c = 0,15$  м/с, а значение  $U_b$ , при котором из-за вязкости неустойчивыми становятся волны любых масштабов на нижней ветви дисперсионной кри-

вой, равно 0,27 м/с. При этом для волн с длиной  $\lambda=200$  м при  $s=2$  получаем, что  $T_e \approx 10^3/\nu$  с, где  $\nu$  выражается в м<sup>2</sup>/с (соответствующее расстояние  $L_e \approx 0,3/\nu$  км). В ламинарном потоке ( $\nu=10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с) такая неустойчивость оказывается чрезвычайно слабой ( $T_e \approx 10^9$  с), однако при наличии турбулентности в верхнем движущемся слое инкремент определяется уже турбулентной вязкостью, которая достигает величин порядка  $10^{-2}$  м<sup>2</sup>/с [14], что приводит к уменьшению времени «взрыва» до значений порядка суток.

Такие волны способны возбуждаться в мелководных областях (их амплитуды могут достигать в данном примере 1–5 м в рамках применимости теории), а также на неглубоко залегающих термоклинах. Правда, в последнем случае данную теорию необходимо модифицировать, поскольку в глубоком океане характер дисперсии несколько иной (в дисперсионном уравнении (1.4)  $h_2 \rightarrow \infty$ ), что приводит к возможности существования «алгебраических» солитонов, имеющих степенную асимптотику. Интересной новой особенностью здесь является возможность «излучательной» неустойчивости, связанной не с вязкостью, а с потерями на излучение внутренних волн в толщу океана с конечной частотой Вайсяля. Линейная стадия такой неустойчивости рассматривалась в работе [15], нелинейные же эффекты в этом случае заслуживают специального рассмотрения.

Еще одно замечание теоретического характера. Аналогичный подход может быть развит и для случая  $U > U_*$ , когда на всех длинах волн проявляется более сильная неустойчивость Кельвина – Гельмгольца; при этом длинные волны снова обладают слабой дисперсией. Здесь также может быть получено упрощенное модельное уравнение типа (3.1), однако в нем член, ответственный за неустойчивость, оказывается одного порядка с остальными и простое квазистационарное описание нелинейной стадии уже невозможно.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Drazin P. G., Howard L. N. Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid.— In: Advances Appl. Mech. V. 9. N. Y.: Acad. Press, 1966, p. 1–89.
2. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. 431 с.
3. Госсард Э. Э., Хук У. Х. Волны в атмосфере. М.: Мир, 1978. 532 с.
4. Милл-Гомсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. с. 384.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953. 788 с.
6. Cairns R. A. The role of negative energy waves in some instabilities of parallel flows.— J. Fluid Mech., 1979, v. 92, № 1, p. 1–14.
7. Benjamin T. B. The threefold classification of unstable disturbances in flexible surfaces bounding inviscid flows.— J. Fluid Mech., 1963, v. 16, № 1, p. 436–450.
8. Езерский А. Б., Островский Л. А., Степанянц Ю. А. Индуцированные течения и их вклад в энергию волновых движений жидкости.— Изв. АН СССР. ФАО, 1981, т. 17, № 11, с. 1201–1208.
9. Левиков С. П. О неустановившихся слабонелинейных внутренних волнах в глубоком океане.— Океанология, 1976, т. 16, в. 6, с. 968–974.
10. Островский Л. А. Приближенные методы в теории нелинейных волн.— Изв. вузов. Радиофизика, 1974, т. 17, № 4, с. 454–476.
11. Lee Ch.-Y., Beardsley R. C. The generation of long nonlinear internal waves in a weakly stratified shear flow.— J. Geophys. Res., 1974, v. 79, № 3, p. 453–457.
12. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
13. Пелиновский Е. Н. Нелинейные ионно-звуковые волны в неоднородной слабопоглощающей плазме.— Изв. вузов. Радиофизика, 1971, т. 14, в. 8, с. 1281–1283.
14. Поллард Р. Т. Наблюдения и модели структуры верхнего слоя океана.— В кн.: Моделирование и прогноз верхних слоев океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1979, с. 124–145.
15. Островский Л. А., Цимринг Л. Ш. Излучение внутренних волн отрицательной энергии сдвиговым течением.— Изв. АН СССР. ФАО, 1981, т. 17, № 7, с. 766–768.

Горький

Поступила в редакцию  
24.XI.1980