

УДК 531.2

## **СТАБИЛИЗАЦИЯ БАРБОТАЖНЫХ ПРОЦЕССОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ**

**НАЛЕТОВА В. А.**

Исследуется устойчивость барботажных и седиментационных процессов при наличии электрического поля. Для описания процессов барботажа и седиментации поляризующихся частиц или пузырей в диэлектрической жидкости при наличии электрического поля использовалась «многоскоростная» модель многофазной смеси, взаимодействующей с электрическим полем, выведенная в работе [1]. В [2] показана возможность существования выхода на режим равномерного всплывания или осаждения частиц в поле плоского конденсатора. В данной работе выводится критерий устойчивости режима равномерного всплывания или седиментации в электрическом поле. Показано, что при достаточно большом электрическом поле (при величине напряженности электрического поля больше некоторой критической величины  $E_{cr}$ ) режим равномерного всплывания или осаждения устойчив. Устойчивость течения связана с тем, что в смеси поляризующихся фаз в присутствии электрического поля из-за разности диэлектрических проницаемостей фаз возникает сила  $F$ , которая действует на диспергированную фазу. В одномерном случае при определенных условиях эта сила пропорциональна градиенту объемной концентрации частиц  $\nabla\Gamma$  и направлена в противоположную сторону ( $F = -\alpha^2 \nabla\Gamma$ ). Таким образом, эта сила как градиент давления в газе стремится сгладить возмущения плотности, скорости и других параметров.

Найдено, что в отсутствие электрического поля или при достаточно малом электрическом поле процессы равномерного всплывания и седиментации неустойчивы относительно малых возмущений. Приводится формула для вычисления толщины слоя жидкости, в котором слабые возмущения не успевают заметно увеличить свою амплитуду (случай, когда параметры течения таковы, что движение неустойчиво относительно малых возмущений). Приведены значения толщины этого слоя для различных смесей.

Показано стабилизирующее влияние магнитного поля на процессы всплывания и осаждения частиц или пузырей в магнитной жидкости или намагничивающихся частиц в обычной жидкости.

**1. Уравнения движения двухфазных поляризующихся сред в электрическом поле. Многоскоростная модель.** Рассмотрим движение смеси, состоящей из несущей жидкости и диспергированных в ней либо твердых частиц, либо капель другой жидкости, либо пузырьков газа. Пусть несущая жидкость и вещество диспергированной фазы поляризуются по разным законам в приложенном электрическом поле, а проводимости обеих фаз пренебрежимо малы.

Будем считать, что диэлектрические проницаемости фаз постоянны, т. е. не зависят от температур фаз и величины электрического поля. При этом диэлектрическая проницаемость смеси  $\epsilon$  зависит только от объемной концентрации диспергированной фазы  $\Gamma$ ,  $\epsilon = \epsilon(\Gamma)$ , и в качестве параметра от формы частиц.

Будем считать также, что температуры фаз одинаковы, массообмен между фазами не происходит, вязкостью и сжимаемостью жидкости и деформациями диспергированных частиц можно пренебречь.

«Многоскоростная» модель такой смеси в приближении электрогидродинамики в более общем случае (с учетом сжимаемости вещества диспергированной фазы и разности температур фаз) построена в работе [1]. Уравнения этой модели имеют вид (здесь сжимаемостью диспергированной

фазы пренебрегается,  $T_1=T_2=T$ ,  $T_\alpha$  — температура  $\alpha$ -й фазы)

$$\partial\Gamma/\partial t - \operatorname{div}(1-\Gamma)\mathbf{v}_1=0 \quad (1.1)$$

$$\partial\Gamma/\partial t + \operatorname{div}\Gamma\mathbf{v}_2=0 \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} & \rho_1^\circ(1-\Gamma)\partial\mathbf{v}_1/\partial t + \rho_1^\circ(1-\Gamma)(\mathbf{v}_1\nabla)\mathbf{v}_1 = \\ & = -(1-\Gamma)\nabla p - L\Gamma(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2) + (1-\Gamma)\rho_1^\circ\mathbf{g}, \quad L=9\mu_1/2a^2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} & \rho_2^\circ\Gamma\partial\mathbf{v}_2/\partial t + \rho_2^\circ\Gamma(\mathbf{v}_2\nabla)\mathbf{v}_2 = -\Gamma\nabla p + L\Gamma(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2) + \\ & + \Gamma\rho_2^\circ\mathbf{g} + \Gamma\nabla(\varepsilon_\Gamma E^2/8\pi), \quad \varepsilon_\Gamma = \partial\varepsilon/\partial\Gamma \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho_1^\circ(1-\Gamma)U_{01} + \rho_2^\circ\Gamma U_{02} + \rho_1^\circ(1-\Gamma)\frac{v_1^2}{2} + \rho_2^\circ\Gamma\frac{v_2^2}{2} + \varepsilon\frac{E^2}{8\pi} \right] = \\ & = -\operatorname{div} \left\{ \rho_1^\circ(1-\Gamma)\mathbf{v}_1 \left( U_{01} + \frac{p}{\rho_1^\circ} + \frac{v_1^2}{2} \right) + \rho_2^\circ\Gamma\mathbf{v}_2 \left( U_{02} + \frac{p}{\rho_2^\circ} + \frac{v_2^2}{2} \right) \right\} - \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$-\Gamma\mathbf{v}_2\varepsilon_\Gamma\frac{E^2}{8\pi} - \kappa\nabla T \left\} + \mathbf{E}(\partial\mathbf{D}/\partial t)/4\pi + \rho_1^\circ(1-\Gamma)\mathbf{v}_1\mathbf{g} + \rho_2^\circ\Gamma\mathbf{v}_2\mathbf{g}$$

$$U_{0\alpha} = c_{v\alpha}T, \quad \alpha=1, 2$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=0, \quad \mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E} \quad (1.6)$$

Здесь  $\rho_\alpha^\circ$ ,  $v_\alpha^\circ$ ,  $U_{0\alpha}$ ,  $c_{v\alpha}$  — истинная плотность, скорость, внутренняя энергия единицы массы вещества в отсутствие поля, теплоемкость при постоянном объеме  $\alpha$ -й фазы,  $\alpha=1, 2$  — несущая жидкость или диспергированная фаза соответственно,  $T$  — температура смеси,  $p$  — давление в несущей среде,  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности смеси,  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения,  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля,  $\mathbf{D}$  — электрическая индукция,  $a$  — радиус дисперсных частиц,  $\mu_1$  — динамическая вязкость несущей жидкости.

В работе [2] с использованием уравнений (1.1)–(1.6) решена задача о стационарном одномерном (все зависит от координаты  $z$ ) изотермическом всплывании недеформируемых пузырей или частиц в слое несжимаемой жидкости в поле плоского конденсатора, представляющего собой две сетки, помещенные на основании и на свободной поверхности слоя жидкости. При решении задачи предполагалось, что диэлектрическая проницаемость смеси линейно зависит от  $\Gamma$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \Gamma\varepsilon_\Gamma$ ,  $\varepsilon_\Gamma = \text{const}$ , здесь  $\varepsilon_1$  — диэлектрическая проницаемость несущей среды.

Показано, что в зависимости от параметров фаз, расхода газа  $G$ ,  $G = \rho_2^\circ\Gamma v_2 = \text{const}$ , и электрических характеристик возможны различные режимы всплывания пузырей. Одним из этих режимов является выход на всплывание с постоянной скоростью  $v^\circ$ :

$$v^\circ = \frac{\rho_1^\circ - \rho_2^\circ}{L} g(1-\Gamma) = \frac{VG(1-\Gamma)}{\rho_2^\circ}, \quad V = \frac{2a^2\rho_2^\circ g}{9\mu_1 G} (\rho_1^\circ - \rho_2^\circ) \quad (1.7)$$

Этот режим реализуется при  $V \geq 4$  и достаточно малом электрическом поле, когда выполнены условия [2]

$$\begin{aligned} & v^{(1)} > v_{cr}, \quad v_0 > \max \{v_{cr}, v^{(1)}\} \\ & v^{(1)} = v^\circ \rho_2^\circ / G, \quad v_{cr} = -\varepsilon_\Gamma^* + \sqrt[3]{D^\circ \rho_1^\circ / \rho_2^\circ} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$D^\circ = D^2 \varepsilon_\Gamma^2 \rho_2^{\circ 2} / 4\pi \rho_1^\circ \varepsilon_1^3 G, \quad v^{(2)} = V(0,5 - \sqrt{0,25 - V^{-1}})$$

Здесь  $v_0$  — безразмерная начальная скорость движения пузырей (скорость обезразмерена на характерную скорость, равную  $G/\rho_2^\circ$ ),  $\epsilon_r^* = \epsilon_r/\epsilon_1$ ,  $D$  — электрическая индукция в межэлектродном пространстве, являющаяся в силу первого уравнения Максвелла (1.6) в данном одномерном случае постоянной величиной, связанной с приложенной разностью потенциалов и свойствами среды.

Если считать, что выход на равномерное всплывание со скоростью  $v^\circ$  происходит на длине  $\delta$ , много меньшей толщины слоя жидкости  $h$ , то  $D$  можно вычислить приближенно по формуле

$$D = \Delta\varphi(\epsilon_1 + \Gamma^{(1)}\epsilon_r)/h, \quad \Gamma^{(1)} = [v^\circ \rho_2^\circ/G]^{-1} \quad (1.9)$$

Отметим, что режим равномерного всплывания пузырей или частиц в присутствии электрического поля может быть реализован и другими способами.

**2. Устойчивость режима равномерного всплывания пузырей, капель или частиц в электрическом поле.** Исследуем устойчивость режима равномерного всплывания пузырей со скоростью  $v^\circ$  относительно слабых возмущений. Представим параметры смеси и электрического поля в виде

$$v_1 = v_1', \quad v_2 = v^\circ + v_2', \quad p = p^\circ + p' \quad (2.1)$$

$$\Gamma = \Gamma^\circ + \Gamma', \quad E = E^\circ + E'$$

Здесь параметры со штрихом обозначают отклонение от равновесных параметров  $v^\circ$ ,  $p^\circ$ ,  $\Gamma^\circ$ ,  $E^\circ$ , связанных соотношениями

$$\nabla p^\circ = \frac{\Gamma^\circ L v^\circ}{1 - \Gamma^\circ} - \rho_1^\circ g, \quad v_0 = \frac{\rho_1^\circ - \rho_2^\circ}{L} g (1 - \Gamma^\circ) \quad (2.2)$$

$$E^\circ = \text{const}, \quad \Gamma^\circ = \text{const}, \quad v^\circ = \text{const}$$

Положительное направление оси  $z$  выбрано вертикально вверх, т. е. противоположно направлению вектора  $g$ . Вектор  $E^\circ$  направлен под углом  $\beta$  к положительному направлению оси  $z$ .

Считая отклонения от равновесия малыми, линеаризуем систему уравнений (1.1)–(1.4), (1.6), в которых предполагается  $\epsilon_r = \text{const}$ , и с учетом равенств (2.2) получим

$$-\partial \Gamma' / \partial t + (1 - \Gamma^\circ) \text{div } v_1' = 0 \quad (2.3)$$

$$\partial \Gamma' / \partial t + (v^\circ \nabla) \Gamma' + \Gamma^\circ \text{div } v_2' = 0$$

$$\rho_1^\circ (1 - \Gamma^\circ) \frac{\partial v_1'}{\partial t} = -(1 - \Gamma^\circ) \nabla p' - \Gamma^\circ L (v_1' - v_2') + \frac{\Gamma' L v^\circ}{1 - \Gamma^\circ} - \rho_1^\circ g \Gamma,$$

$$\rho_2^\circ \Gamma^\circ \left( \frac{\partial v_2'}{\partial t} + v^\circ \frac{\partial v_2'}{\partial z} \right) = -\Gamma^\circ \nabla p' + \Gamma^\circ L (v_1' - v_2') + \frac{\Gamma^\circ \epsilon_r E^\circ \nabla E'}{4\pi} + \rho_2^\circ g \Gamma'$$

$$E^\circ \epsilon_r \nabla \Gamma' + (\epsilon_1 + \Gamma^\circ \epsilon_r) \text{div } E' = 0, \quad \text{rot } E' = 0$$

Будем искать решение в виде

$$\Gamma' = \Gamma_0' \exp(-i\omega t + ikr), \quad v_1' = v_{10}' \exp(-i\omega t + ikr) \quad (2.4)$$

$$p' = p_0' \exp(-i\omega t + ikr), \quad E' = E_0' \exp(-i\omega t + ikr)$$

Здесь  $\Gamma_0'$ ,  $v_{10}'$ ,  $p_0'$ ,  $E_0'$  — амплитуды возмущений,  $\omega$  — частота колебаний,  $k = k_x i + k_z j$  — волновой вектор,  $r = xi + zj$ ,  $i$ ,  $j$  — единичные векторы, направленные вдоль оси  $x$  и  $z$ . Ось  $x$  перпендикулярна оси  $z$  и находится в плоскости, образованной осью  $z$  и вектором  $k$ .

Подставляя выражения (2.4) в систему (2.3), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} i\omega\Gamma_0' + i(1-\Gamma^\circ)k v_{10}' &= 0, & -i(\omega - v^\circ k)\Gamma_0' + i\Gamma^\circ k v_{02}' &= 0 & (2.5) \\ -i\rho_1^\circ(1-\Gamma^\circ)\omega v_{10}' &= -(1-\Gamma^\circ)ikp_0' - \Gamma^\circ L(v_{10}' - v_{20}') + Lv^\circ\Gamma_0'/(1-\Gamma^\circ) \\ -i\rho_2^\circ\Gamma^\circ(\omega - v^\circ k)v_{20}' &= -\Gamma^\circ ikp_0' + \Gamma^\circ L(v_{10}' - v_{20}') + i\Gamma^\circ\varepsilon_\Gamma(E^\circ E_0')k/4\pi \\ i(E^\circ k)\varepsilon_\Gamma\Gamma_0' + i(\varepsilon_1 + \Gamma^\circ\varepsilon_\Gamma)E_0' \cdot k &= 0, & E_{0x}'k_x &= E_{0z}'k_z \end{aligned}$$

Дисперсионное уравнение для системы уравнений (2.5) имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_f\omega^2 + \omega [iL/(1-\Gamma^\circ) - 2\rho_2^\circ(1-\Gamma^\circ)v^\circ k_z] + \\ + (1-\Gamma^\circ)\rho_2^\circ v^{\circ 2}k_z^2 - D_0(1-\Gamma^\circ)\Gamma^\circ k_z^2 \cos^2 \alpha / \cos^2 \theta - \\ - iLv^\circ k_z(1-2\Gamma^\circ)/(1-\Gamma^\circ) = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\rho_f = \rho_1^\circ\Gamma^\circ + \rho_2^\circ(1-\Gamma^\circ), \quad D_0 = \varepsilon_\Gamma^2 E^{\circ 2}/4\pi(\varepsilon_1 + \Gamma^\circ\varepsilon_\Gamma), \quad k_z \neq 0$$

Здесь  $\alpha$  — угол между векторами  $E^\circ$  и  $k$ ,  $\theta$  — угол между вектором  $k$  и положительным направлением оси  $z$ . Предполагается, что  $k_z \neq 0$ . Если  $k_z = 0$ , то в уравнении (2.6) и далее везде нужно положить  $k_z = 0$ ,  $\cos^2 \alpha = \sin^2 \beta$ , а отношение  $k_z^2/\cos^2 \theta$  заменить на  $k_x^2$ .

Дисперсионное уравнение (2.6) является уравнением второго порядка относительно  $\omega$ , корни этого уравнения равны

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2\rho_f} \left[ -\frac{iL}{1-\Gamma^\circ} + 2\rho_2^\circ(1-\Gamma^\circ)v^\circ k_z + \sqrt{a+ib} \right] \quad (2.7)$$

$$a = -\frac{L^2}{(1-\Gamma^\circ)^2} + a_f k_z^2, \quad a_f = 4(1-\Gamma^\circ)\Gamma^\circ [D_0\rho_f \cos^2 \alpha / \cos^2 \theta - \rho_1^\circ\rho_2^\circ v^{\circ 2}]$$

$$b = b_f k_z, \quad b_f = 4Lv^\circ(\rho_1^\circ - 2\rho_f)/(1-\Gamma^\circ)$$

Из формулы (2.7) можно получить выражения для мнимых и действительных частей корней дисперсионного уравнения (2.6)

$$\omega_{m1,2} = \frac{1}{2\rho_f} \left[ -\frac{L}{1-\Gamma^\circ} \pm \sqrt{\frac{V a^2 + b^2 - a}{2}} \right] \quad (2.8)$$

$$\omega_{d1,3} = \frac{1}{2\rho_f} \left[ 2\rho_2^\circ(1-\Gamma^\circ)v^\circ k_z \pm \sqrt{\frac{V a^2 + b^2 + a}{2}} \right]$$

Здесь  $\omega_{m1,2}$ ,  $\omega_{d1,2}$  — мнимые и действительные части корней. Условие абсолютной устойчивости равномерного всплывания относительно малых возмущений будет иметь вид

$$\max \{ \omega_{m1}, \omega_{m2} \} \leq 0 \quad (2.9)$$

Из неравенства (2.9) и первого равенства (2.8) следует критерий устойчивости при  $k_z \neq 0$

$$4L^2 a_f \geq b_f^2 (1-\Gamma^\circ) \quad (2.10)$$

При  $k_z = 0$  неравенство (2.9) выполняется всегда. Это означает, что течение устойчиво относительно возмущений, распространяющихся поперек движения смеси. Далее рассматривается случай  $k_z \neq 0$ . Можно показать, что условие (2.10) выполняется и течение будет устойчиво относительно таких возмущений ( $k_z \neq 0$ ,  $\theta \neq \pi/2, 3\pi/2$ ) при достаточно большом электрическом поле

$$E^\circ > E_{cr} |\cos \theta / \cos \alpha| \quad (2.11)$$

$$E_{cr} = v^{\circ} \left\{ \frac{4\pi(\epsilon_1 + \Gamma^{\circ}\epsilon_r)}{\epsilon_r^2 \Gamma^{\circ}(1 - \Gamma^{\circ})\rho_f} [\rho_1^{\circ}\rho_2^{\circ}\Gamma^{\circ}(1 - \Gamma^{\circ}) + (\rho_1^{\circ} - 2\rho_f)^2] \right\}^{1/2}$$

В случае  $\beta \neq 0, \pi$  отношение  $|\cos \theta / \cos \alpha| = |\cos^2 \beta + \operatorname{tg} \theta \sin 2\beta + \sin^2 \beta \cdot \operatorname{tg}^2 \theta|^{-1/2}$  стремится к бесконечности при  $\theta \rightarrow \beta \pm \pi/2, \beta \pm 3\pi/2$  (углы  $\theta$  и  $\beta$  меняются от 0 до  $2\pi$ ), и условие (2.11) может быть выполнено только при бесконечно больших полях. Это означает, что электрическое поле, направленное под углом к направлению движения (к оси  $z$ ), не может стабилизировать движение по отношению к возмущениям, распространяющимся перпендикулярно к вектору электрического поля. Когда  $\beta = 0, \pi$ , отношение  $|\cos \theta / \cos \alpha| = 1$  и при достаточно большом поле,  $E > E_{cr}$ , условие (2.11) выполняется. Это означает, что достаточно большое, но конечное, электрическое поле, направленное вдоль течения, может стабилизировать режим равномерного всплывания частиц.

Для примера рассмотрим устойчивость равномерного всплывания пузырей или частиц, вдуваемых в слой жидкости, на нижней и верхней границе которого помещены обкладки конденсатора ( $\beta = 0, \alpha = \theta$ ).

Условие существования режима равномерного всплывания пузырей или частиц в поле плоского конденсатора — первое неравенство (1.8) — можно записать в виде

$$E^{\circ} < E_f, \quad E_f = v^{\circ} \sqrt{\frac{4\pi\rho_2^{\circ}(\epsilon_1 + \Gamma^{\circ}\epsilon_r)}{\epsilon_r^2 \Gamma^{\circ}}} \quad (2.12)$$

Если параметры течения среды и электрического поля таковы, что для них выполняются условия (2.11) и (2.12), то это означает возможность существования устойчивого режима равномерного всплывания частиц или пузырей в поле плоского конденсатора. Значения критического поля  $E_{cr}$  и поля  $E_f$  для различных смесей и концентраций  $\Gamma$  при  $a = 0,1$  см показаны в табл. 1.

Таблица 1

Смесь	$\Gamma$	$E_f$ , ед. CGSE	$E_{cr}$ , ед. CGSE
Вода с пузырями воздуха	0,01	17,88	$5,3 \cdot 10^3$
	0,05	7,44	$9,6 \cdot 10^2$
	0,1	4,77	$4 \cdot 10^2$
Масло касторовое с пузырями воздуха	0,01	$9,5 \cdot 10^{-2}$	27,4
	0,05	$3,9 \cdot 10^{-2}$	5
	0,1	$2,5 \cdot 10^{-2}$	2,1
Глицерин с пузырями воздуха	0,01	0,22	72,8
	0,05	0,09	13,1
	0,1	0,06	5,5
Глицерин с парафиновыми частицами	0,01	0,1919	0,192
	0,05	$8 \cdot 10^{-2}$	$5,6 \cdot 10^{-2}$
	0,1	$5,18 \cdot 10^{-2}$	$4,08 \cdot 10^{-2}$

Видно, что для смеси глицерина с парафиновыми частицами радиуса  $a = 0,1$  см при объемных концентрациях частиц  $\Gamma^{\circ} = 0,05; 0,1$  возможно существование устойчивого режима равномерного всплывания в поле плоского конденсатора, если поле  $E^{\circ}$  меняется в диапазонах  $5,6 \cdot 10^{-2}$  ед. CGSE  $< E^{\circ} < 8 \cdot 10^{-2}$  ед. CGSE при  $\Gamma^{\circ} = 0,05$  и  $4,08 \cdot 10^{-2}$  ед. CGSE  $< E^{\circ} < 5,15 \cdot 10^{-2}$  ед. CGSE при  $\Gamma^{\circ} = 0,1$ .

Для других смесей (вода с пузырями воздуха, масло касторовое с пузырями воздуха, глицерин с пузырями воздуха) режим равномерного всплывания пузырей с объемной концентрацией  $\Gamma^{\circ} = 0,01; 0,05; 0,1$  в поле плоского конденсатора, обкладки которого помещены у верхней и нижней границ слоя жидкости, неустойчив.

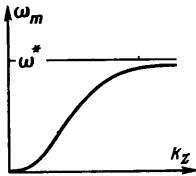
Если параметры течения, среды и электрического поля таковы, что условие устойчивости (2.11) не выполняется, то режим равномерного всплывания при определенной толщине слоя жидкости все же может осуществляться. Это связано с тем, что малые возмущения, возрастающие со временем, могут выноситься потоком, не

успев существенно изменить свою амплитуду. Чтобы оценить толщину слоя, при которой неустойчивость не проявляется, нужно оценить скорость возрастания амплитуды возмущения со временем.

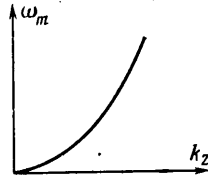
Для этого исследуем зависимость  $\omega_m$  — максимальное из двух значений мнимой части  $\omega$  — от  $k_z$ . Пользуясь первой формулой (2.8), вычислим  $\omega_m$ :

$$\omega_m = \max \{\omega_{m1}, \omega_{m2}\} = \frac{1}{2\rho_f} \left[ -\frac{L}{1-\Gamma^0} + \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right] \quad (2.13)$$

Качественное поведение  $\omega_m$  в зависимости от  $z$ -компоненты волнового вектора  $k$  представлено на фиг. 1, 2. На фиг. 1 представлена зависимость  $\omega_m$  от волнового



Фиг. 1



Фиг. 2

вектора  $k_z$  при  $a_f > 0$  и  $4a_f L^2 / (1-\Gamma^0)^2 < b_f^2$  (последнее неравенство является критерием неустойчивости, т. е.  $\omega_m > 0$ ). Можно показать, что величина  $\omega_m$  монотонно растет с ростом  $k_z$ , всюду положительна и ограничена сверху

$$\omega_m < \omega^*, \quad \omega^* = -L / (1-\Gamma^0) + \sqrt{b_f^2 / 4a_f} \quad (2.14)$$

Поэтому при  $a_f > 0$  скорость возрастания амплитуды малых возмущений ограничена для всех длин волн.

На фиг. 2 представлена зависимость  $\omega_m$  от  $k_z$  при  $a_f \leq 0$ , т. е. при малом электрическом поле или при его отсутствии; при этом критерий неустойчивости выполняется автоматически. Значение  $\omega_m$  при  $a_f \leq 0$  всегда положительно, монотонно возрастает с ростом  $k_z$  и неограничено сверху. Это означает, что скорость возрастания амплитуд слабых возмущений может быть сколько угодно велика в зависимости от  $k_z$ .

Однако следует помнить, что возмущения распространяются по двухфазной среде, описываемой в предложенной модели как сплошная среда, т. е. в предположении, что в физически малом объеме смеси находится достаточно большое число частиц дисперсной фазы. Поэтому, чтобы предложенная модель могла быть использована для исследования волновых процессов, длина волны должна быть много больше расстояния между частицами. Это ограничивает значения  $k_z$  и соответственно  $\omega_m$  сверху. Обозначим минимальную длину волны  $\lambda_{min}$ , тогда можно ввести  $\tau_{min}$  — характерное время возрастания амплитуды высокочастотных возмущений

$$\tau_{min} = 1 / \omega_m(k_{z \max}), \quad k_{z \max} = 1 / \lambda_{min} \quad (2.15)$$

Характерная толщина слоя жидкости  $H_{max}$ , на которой амплитуды возмущений с длиной волны большей  $\lambda_{min}$  возрастут меньше чем в  $e$  раз, может быть вычислена по формуле

$$H_{max} = \tau_{min} \min_{0 < k_z < k_{z \max}} \{ |c_1|, |c_2| \} \quad (2.16)$$

$$c_\alpha = \omega_{d\alpha} / k_z; \quad \alpha = 1, 2$$

Здесь  $\omega_{d\alpha}$  — действительные части корней дисперсного уравнения  $\omega_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Значения  $\tau_{min}$ ,  $\min_{0 < k_z < k_{z \max}} \{ |c_1|, |c_2| \}$ ,  $H_{max}$  для различных смесей при  $E^0 = 0$  и

$\Gamma^0 = 0,1$  приведены в табл. 2.

Таким образом, можно сделать следующие выводы. Во-первых, в отсутствие электрического поля режим равномерного всплывания пузырей или частиц неустойчив; малые возмущения будут увеличивать свою амплитуду со временем, особенно «опасны» в этом смысле высокочастотные (коротковолновые) колебания. Физическое ограничение длины волны снизу, связан-

Таблица 2

Смесь	$a$ , см	$\tau_{\min}$ , с	$\min\{ c_1 ,  c_2 \}$ , см/с	$H_{\max}$ , см
Вода с пузырями воздуха	$10^{-2}$	0,03	0,51	$13 \cdot 10^{-3}$
	$10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-3}$	38	0,12
	1	$2 \cdot 10^{-3}$	76,4	0,15
Масло касторовое с пузырями воздуха	$10^{-2}$	$10^{19}$	0	0
	$10^{-1}$	2700	0,52	1354
	1	0,28	516	144,5
Глицерин с пузырями воздуха	$10^{-2}$	$4 \cdot 10^4$	$45 \cdot 10^{-4}$	180
	$10^{-1}$	4	4,58	18,32
	1	0,013	1240	16,2
Глицерин с парафиновыми частицами	$10^{-2}$	$10^{19}$	$10^{-4}$	$10^{15}$
	$10^{-1}$	$8 \cdot 10^5$	$10^{-2}$	$8,4 \cdot 10^3$
	1	80	1,1	84,2

ное с возможностью использования модели многофазных сред, накладывает ограничение на скорость возрастания амплитуды слабых возмущений, поэтому для развития описываемой этой моделью неустойчивости в ряде случаев необходима достаточно большая длина барботажной колонны. На возможную неустойчивость движения пузырьков газа в несжимаемой жидкости в отсутствие электрического поля указано в работе [3].

Во-вторых, электрическое поле, направленное вдоль движения пузырей, способствует стабилизации барботажных процессов. При увеличении электрического поля сначала возникает ситуация ( $a_j > 0$ ), при которой малые возмущения по-прежнему (как и в отсутствие поля) увеличивают свою амплитуду со временем, но скорость возрастания этой амплитуды ограничена для возмущения с любой длиной волны. При дальнейшем увеличении величины электрического поля ( $E^0 > E_{cr}$ ) режим равномерного всплывания, если он может бы быть создан, становится устойчивым относительно малых возмущений. В электрическом поле, направленном под углом к вертикали, режим равномерного всплывания частиц или пузырей неустойчив.

Аналогичные выводы могут быть получены при исследовании устойчивости процессов седиментации диэлектрических частиц в слое несжимаемой диэлектрической жидкости, при этом под  $v^0$  надо помещать равномерную скорость седиментации частиц в слое неподвижной жидкости, под действием силы трения, выталкивающей силы Архимеда и силы тяжести.

**3. Устойчивость барботажных процессов и процессов седиментации в намагничивающихся средах в присутствии магнитного поля.** Рассмотрим всплывание или седиментацию недеформируемых пузырей или частиц в несущей несжимаемой жидкости. Несущая жидкость и вещество диспергированных частиц намагничиваются по разным законам. Будем считать, что магнитная проницаемость смеси  $\mu$  зависит только от объемной концентрации  $\Gamma$  и эта зависимость линейна  $\mu = \mu_i + \Gamma \mu_\Gamma$ ,  $\mu_\Gamma = \partial \mu / \partial \Gamma = \text{const}$  ( $\mu_i$  — магнитная проницаемость несущей среды), температуры фаз одинаковы, вязкостью смеси можно пренебречь, химических реакций нет. Уравнения, описывающие такую смесь в присутствии магнитного поля в приближении феррогидродинамики, получаются из уравнений (1.1) — (1.6), если в них заменить  $\mathbf{E}$  на  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$  на  $\mathbf{B}$ ,  $\epsilon$  на  $\mu$ ,  $\epsilon_i$  на  $\mu_i$ ,  $\epsilon_\Gamma$  на  $\mu_\Gamma$  [4].

Здесь  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля,  $\mathbf{B}$  — магнитная индукция,  $\mu$  — магнитная проницаемость смеси,  $\mu_i$  — магнитная проницаемость  $i$ -й фазы.

В связи с этим все результаты п. 1, 2 можно перенести на случай намагничивающихся смесей в магнитном поле, сделать аналогичный вывод

о стабилизирующем влиянии магнитного поля на процесс равномерного всплывания или осаждения частиц и выписать критерий устойчивости этих процессов в магнитном поле.

Влияние магнитного поля на устойчивость взвешенного слоя рассматривалось в [5], где обсуждалась устойчивость слоя в магнитном поле, направленном по вертикали или по горизонтали. Устойчивость слоя в магнитном поле, направленном под любым ненулевым углом к вертикали, не рассматривалась и поэтому вывод о том, что магнитным полем, направленным под углом к вертикали, нельзя сделать слой устойчивым, отсутствует в этой работе. Критерий устойчивости взвешенного слоя в магнитном поле [5] отличается от предложенного выше, так как в формуле для силы, действующей на намагничивающиеся частицы в магнитном поле, используемой в [5], не учтено влияние формы частиц. В [5] так же не учтено и не описано хаотическое движение частиц, связанное с их столкновениями и существенно влияющее на устойчивость псевдооживленного слоя.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гогосов В. В., Налетова В. А., Шапошникова Г. А. Диффузионная и многоскоростная модели двухфазных сред в электрическом поле.— ПММ, 1980, № 2, с. 290.
2. Гогосов В. В., Налетова В. А., Шапошникова Г. А. Новые эффекты при течении двухфазных сред в электрическом поле.— Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 2, с. 315.
3. Иорданский С. В., Куликовский А. Г. О движении жидкости, содержащей мелкие частицы.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 4, с. 12.
4. Гогосов В. В., Налетова В. А., Шапошникова Г. А. Гидродинамика дисперсных систем, взаимодействующих с электромагнитным полем.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 3, с. 59.
5. Rosenzweig R. E. Magnetic stabilization of the state of the uniform fluidization.— Ind. and Eng. Chem. Fundam., 1979, v. 18, № 3, p. 260.

Москва

Поступила в редакцию  
22.X.1980