

УДК 532.529

НЕЛИНЕЙНЫЕ КАПИЛЛЯРНЫЕ ВОЛНЫ В ТОНКИХ ПЛЕНКАХ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И ИХ РАЗРУШЕНИЕ

ВОИНОВ О. В.

Рассматривается динамика тонкой пленки вязкой жидкости с учетом влияния капиллярных сил и дальнедействующих сил Ван-дер-Ваальса. Найдены асимптотические решения задач о динамике пленок, сообщающихся с областью пониженного давления. Получено, что в определенный момент происходит разрушение пленки на ее краях. Найдены критические параметры, определяющие момент разрушения, и указан вид решения на стадии разрушения.

1. Постановка задачи. Если толщина h тонкой пленки вязкой жидкости изменяется на характерном расстоянии $l \gg h$ и малы характерные скорости, так что $h^2 \ll \nu \tau$, $h^2 \nu \ll l \nu$, где τ — характерное время изменения h , то поток жидкости через единичное сечение пленки равен

$$Q = -(h^3 k / 3\mu) \text{grad}(p + p_m), \quad k = 1, \quad 1/4 \quad (1.1)$$

$$p = p_0 - \sigma n \Delta h, \quad p_m = A / (6\pi h^3), \quad n = 1, \quad 1/2$$

Здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения, p_0 — давление в газе, с которым хотя бы с одной стороны граничит пленка, p_m — вклад в эффективное давление дальнедействующих сил Ван-дер-Ваальса, A — постоянная Гамакера [1–3]. Рассматривается случай $A > 0$, что, в частности, всегда имеет место для пенных пленок. Коэффициенты k и n соответствуют пленкам с нулевой касательной скоростью $v_\tau = 0$ на одной или двух поверхностях за счет контакта с твердой поверхностью или за счет достаточно сильного влияния ПАВ. Для пленки на твердой поверхности в отсутствие ПАВ $k = 1$. Величина $k = 1/4$, если на обеих поверхностях пленки $v_\tau = 0$. Для свободной пленки (с обеих сторон газ) $n = 1/2$, для пленки на твердой поверхности $n = 1$.

Оценим для случая влияния ПАВ максимальное изменение коэффициента поверхностного натяжения σ . Касательное напряжение на поверхности определяется $\text{grad} \sigma$, поэтому характерное изменение $\Delta \sigma \sim h p_0$, где p_0 — характерный перепад давления в пленке, h — характерная толщина. Приближение тонкого слоя применимо, если радиус кривизны $R_1 \sim \sigma / p_0$ достаточно велик по сравнению с толщиной пленки $\sigma / p_0 \gg h$. Это условие выполняется практически во всех случаях, представляющих реальный интерес. В силу $h \ll R_1$, величина $|\Delta \sigma| \sim \sigma h / R_1 \ll \sigma$, и поэтому в граничном условии для нормального напряжения на поверхности пленки следует считать $\sigma = \text{const}$.

Уравнение неразрывности для тонкого слоя

$$\text{div} \mathbf{Q} + \partial h / \partial t = 0 \quad (1.2)$$

аналогично [4, 5] дает вместе с (1.1) уравнение для $h(x, t)$, которое в плоском случае имеет вид

$$\kappa \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) + \kappa \frac{A}{2\pi \sigma n} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x} \right) = - \frac{\partial h}{\partial t}, \quad \kappa = \frac{\sigma k n}{3\mu} \quad (1.3)$$

Это уравнение для случая $A=0$ решалось в линейной [4] и в нелинейной [5, 6] постановках. Для $A \neq 0$ длинные волны в пленках исследовались в [7].

Рассмотрим задачу динамики пленки, граничащей с областью пониженного давления $p=p_0-p_\sigma$ [5]. Пленка однородна на большом удалении от мениска

$$h \rightarrow h_\infty, \quad x \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

и переходит с другой стороны в мениск ($p \rightarrow p_0 - p_\sigma$)

$$\sigma n \partial^2 h / \partial x^2 \rightarrow p_\sigma, \quad x \rightarrow -\infty \quad (1.5)$$

Форма мениска задается двумя постоянными. Кроме p_σ имеется несущественная здесь постоянная, связанная с трансляцией вдоль x . В силу большого размера мениска, $R_1 \gg h$, его форма приближенно определяется из уравнений равновесия при условиях $h=0$, $\partial h / \partial x = 0$ на границе с пленкой. Область перехода от мениска к пленке имеет асимптотически малую протяженность $l \sim \sqrt{h R_1} \ll R_1$. Если потребовать, чтобы размер пленки r был много больше размера переходной области $r \gg l$, то приходим к условию [6] возможности выделения пленки размера r от мениска $p_\sigma r^2 \gg h \sigma$.

Уравнение изменения толщины пленки, следующее из (1.1), (1.2), справедливо не только для движения в слое s хотя бы одной заторможенной поверхностью (коэффициент κ определен в (1.3)). Оно верно также (с другим, большим значением κ) и в случае подвижных поверхностей свободной пленки достаточно малых размеров $r \ll \sqrt{D \tau}$ (D – коэффициент диффузии) при наличии сильного диффузионного переноса ПАВ. В этом случае [6]

$$\kappa = (\sigma / 24 \mu) [1 + 3 \mu D (1 + bc)^2 / (c H^2 R T)]$$

Здесь c – концентрация ПАВ, R – газовая постоянная, T – температура, H и b – параметры уравнения адсорбции [6]. Таким образом, имеется подобие динамики пленок с неподвижной в касательном направлении поверхностью и динамики свободных пленок с подвижной поверхностью в условиях относительно сильной диффузии ПАВ в пленке.

Допустим, что толщина h_∞ достаточно велика и имеется малый параметр

$$\delta = H_w / h_\infty \ll 1, \quad H_w = (A / 6 \pi p_\sigma)^{1/2} \quad (1.6)$$

Величина H_w – толщина, при которой силы Ван-дер-Ваальса дают вклад в эффективное давление в (1.1), равный p_σ . Можно показать, что волна в пленке может образоваться только при $\delta \ll 1$.

Задача состоит в определении асимптотического решения уравнения (1.3) с условиями (1.4) и (1.5) при больших временах t .

2. Асимптотическое решение во внутренней области пленки. Если толщина на краю пленки ($x \sim 0$) существенно меньше h_∞ и поток жидкости Q из пленки в мениск мал, то вдали от края естественно искать решение, поставив два условия

$$h=0, \quad Q=0, \quad x=0$$

Благодаря неравенству (1.6) можно искать приближенно автомодельное решение уравнения (1.3)

$$h = h_\infty y(\zeta), \quad \zeta = x(4 \kappa h_\infty^3 t)^{-1/2} \quad (2.1)$$

Пренебрегая малым членом, содержащим A , получим

$$(y^3 y''')' = \zeta y' \quad (2.2)$$

$$y \rightarrow 1, \quad \zeta \rightarrow \infty; \quad y=0, \quad y^3 y''' = 0, \quad \zeta = 0 \quad (2.3)$$

Переход от задачи (1.3)–(1.5) к уравнению (2.2) с тремя граничными условиями (2.3) в области $\zeta \sim 1$ допустим при

$$\sqrt{\kappa h_\infty t} \ll \pi n l h_\infty^3 / A \quad (2.4)$$

При этом автомодельность не нарушится. Учитывая асимптотику y при $\zeta \rightarrow \infty$, можно показать, что условие (2.4) заведомо выполнено при $\zeta \rightarrow \infty$.

В области $\zeta \rightarrow 0$ автомодельность, на первый взгляд, нарушается. Однако реально существует область значений $\zeta \sim \zeta_0 > 0$, где решение переходит в решение в краевой области. Достаточно поэтому, чтобы при $\zeta \sim \zeta_0$ роль сил Ван-дер-Ваальса была мала. Используя асимптотику при $\zeta \rightarrow 0$ [5] решения задачи (2.2), (2.3)

$$y = b\zeta + \frac{\zeta^2}{4b^2}(\ln \zeta + d) + \frac{\zeta^3}{144b^3} \left(-5 \ln \zeta - 5d + \frac{59}{6} \right) + \dots \quad (2.5)$$

можно показать, что неавтомодельные добавки в уравнении малы, если

$$A \sqrt{\kappa h_\infty t} \ll \pi b n o h_\infty^3 \zeta_0^3 \quad (2.6)$$

Величина $\zeta_0 \ll 1$, поэтому условие (2.6) более сильное, чем (2.4). Проверку условия (2.6) произведем при сращивании решений. Видно, что при достаточно большом времени t автомодельность обязательно нарушается.

Постоянные b и d в асимптотике (2.5) найдены численно. Численное решение (2.2) производилось с использованием (2.5). Для $b=1$ найдено $d_1 = -4,8572$, при котором $y \rightarrow y_\infty$ при $\zeta \rightarrow \infty$, $y_\infty = 0,156$. Инвариантное преобразование $y = \theta^{1/3} y_1$, $\zeta = \theta \zeta_1$ с соответствующим θ дало $b = 1,592$; $d = -6,25$. График $y(\zeta)$ приведен в [5].

3. Асимптотическое решение в переходной области. Задача в области, где слой переходит в мениск, на котором толщина h изменяется по параболе, ставится в квазистационарном приближении

$$\kappa h^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{\kappa A}{2\pi \sigma n} \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x} = -|Q_0(t)| \quad (3.1)$$

$$n \sigma \partial^2 h / \partial x^2 \rightarrow p_\sigma, \quad (x - x_0) / l \rightarrow -\infty$$

$$\partial h / \partial x \rightarrow c(t), \quad (x - x_0) / l \rightarrow \infty$$

Значение потока Q_0 определяется при решении задачи (3.1), x_0 — точка минимума h , $x_0 \sim 0$.

Замена переменных (l — характерный размер)

$$h = l c y(\xi), \quad x - x_0 = l \xi \quad (3.2)$$

$$l = q_0 c N = |Q_0| / (\kappa c^4), \quad N = n \sigma / p_\sigma \quad (3.3)$$

приводит к следующей краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$y^3 \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{B}{y} \frac{dy}{d\xi} = -1; \quad \frac{dy}{d\xi} \rightarrow 1, \quad \xi \rightarrow +\infty \quad (3.4)$$

$$B(t) = \beta / (l^2 c^4), \quad \beta = A / (2\pi \sigma n) \quad (3.5)$$

Величина q_0 в выражении (3.3) пока неизвестна.

Основными параметрами, определяемыми при решении задачи (3.4), поставленной с точностью до трансляции, будут

$$q_0(B) = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} (d^2 y / d\xi^2), \quad y_{\min}(B) = \min y(\xi)$$

Эти зависимости можно найти численно.

Учитывая, что β и N не зависят от времени, удобно ввести новый параметр

$$\omega(t) = \sqrt{\beta} / (Nc^3(t)) \quad (3.6)$$

Тогда, согласно (3.5) и (3.3), формулы

$$q_0 = q_0(B), \quad \omega = q_0(B) \sqrt{B} \quad (3.7)$$

определяют зависимость $q_0(\omega)$ и, следовательно, зависимость q_0 от $c(t)$. Аналогичным образом можно получить $y_{\min}(\omega)$. Наконец, выражение минимальной толщины h_{\min} найдем при помощи (3.2) и (3.6)

$$h_{\min} = (\beta N)^{1/2} q_0 y_{\min} / \omega^{3/2} \quad (3.8)$$

При $B=0$ в [5] получено $q_0=1,21$; $y_{\min}=1,259$.

Можно показать, что решение задачи (3.4) соответствует только области достаточно больших значений наклона c и существует значение $c_* > 0$, такое, что при $c < c_*$ нет решения исходной задачи (3.1).

Для доказательства этого факта достаточно исследовать асимптотику q_0 и y_{\min} при $B \rightarrow \infty$. Пренебрегая правой частью уравнения (3.4), находим приближенное решение задачи (3.4)

$$y_0 = \sqrt{B/3 + \xi^2} \quad (3.9)$$

Решение пригодно в области $q_0 \xi \ll 1$. Значение q_0 находится из (3.4) и (3.9)

$$q_0 = \frac{d^2 y}{d\xi^2} (-\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{y^3} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(B/3 + \xi^2)^{3/2}} = \frac{6}{B}$$

Следовательно, решение (3.9) пригодно при $\xi \ll B$. Чтобы найти более точно асимптотику $q_0(B)$, запишем в этой области вместо (3.4) приближенное уравнение

$$y''' + By'/y^4 = -1/y_0^3$$

где функция y_0 определена (3.9). Правая часть последнего уравнения — малая величина, которая не учитывается при определении y_0 . Отыскивая решение в виде $y = y_0 + y_1$, $|y_1| \ll y_0$, получим после одного интегрирования с учетом $y' \rightarrow 1$ при $\xi \rightarrow \infty$ уравнение для y_1

$$\frac{d^2 y_1}{d\xi^2} + \frac{B}{(B/3 + \xi^2)^2} y_1 = 1 - \frac{3\xi/B}{\sqrt{B/3 + \xi^2}}$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $y_1' \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$, будет

$$y_1 = 1/2 t^2 - 1 + [1 - 1/2 t^2 + (t-1/t) \times (\arctg t - \pi/2) + 3/2 \ln(t + \sqrt{t^2+1}) - \ln(t^2+1)] t / \sqrt{1+t^2}, \\ t = \xi \sqrt{3/B}$$

Здесь опущено трансляционное слагаемое $ct(1+t^2)^{-1/2}$, где c — произвольная постоянная ($c \ll \sqrt{B}$). Используя полученное выражение, находим

$$q_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{y^3} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{y_0^3} - \frac{3y_1}{y_0^4} + \dots \right) d\xi = \frac{6}{B} \left(1 - \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{3}{B}} + \dots \right),$$

$$y_{\min} = \sqrt{\frac{B}{3}} + \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + \dots \quad (3.10)$$

Из формул (3.7) и (3.10) следует, что при $B \rightarrow \infty$

$$\omega = (6/\sqrt{B}) (1 - 1/2 \pi \sqrt{3/B} + \dots) \quad (3.11)$$

$$\psi = h_{\min} / (\beta N)^{1/2} = (\omega^{1/2} / \sqrt{3}) (1 + (\pi/4 - 1/2) \omega / \sqrt{3} + \dots)$$

Используя ограниченность на конечном интервале функции $q_0(B)$, определяемой из решения краевой задачи (3.4), и следующую отсюда ограниченность $\omega = q_0 \sqrt{B}$ на конечном интервале, получим, что функция $\omega(B)$ ограничена всюду, так как, согласно (3.11), $\omega \rightarrow 0$ при $B \rightarrow \infty$. Следовательно, существует значение ω . такое, что при $\omega > \omega$. решений задачи (3.4) нет. Соответственно не будет решений при $c < c_*$.

Задача (3.4) решается численно с использованием асимптотики при $\xi \rightarrow \infty$

$$y(\xi) = \xi - \frac{1}{2} \ln \xi + \frac{1}{4\xi} \left(\ln \xi + \frac{11}{6} \right) + \frac{1}{16\xi^2} \left(\ln^2 \xi + \frac{5}{3} \ln \xi + \frac{5}{36} \right) + \frac{B}{6\xi} + \frac{B}{12\xi^2} \left(\ln \xi + \frac{7}{12} \right) + \dots \quad (3.12)$$

Здесь опущена постоянная, соответствующая трансляции.

Решение $y(\xi)$ имеет вид кривой, плавно переходящей от $y \approx \xi$ при $\xi \rightarrow \infty$ через минимум при $\xi \sim 0$ к параболе $y \approx 1/2 q_0 \xi^2$ при $\xi \rightarrow -\infty$.

График зависимости безразмерной минимальной толщины $\psi = h_{\min} (2\pi p_c / A)^{1/2}$ от параметра ω , представляющий наибольший интерес, приведен на фиг. 1. Пунктиром показаны асимптотики (3.11) и $\psi = 1,523 \omega^{-2/3} (B \rightarrow 0)$. Как видно из графика, действительно существует максимальное значение $\omega = \omega_*$.

Критические значения параметров:

$$B_* = 3,612; \omega_* = 1,0465; q_{0*} = 0,5506; \psi_* = 0,995; (q_0 y_{\min})_* = 1,0256 \quad (3.13)$$

Функция $c(t)$ — монотонно убывающая. Поэтому физический смысл имеет верхняя ветвь (фиг. 1) для $\psi > \psi_*$, соответствующая возрастанию ω со временем. Эта ветвь обрывается при $\omega = \omega_*$ ($c = c_*$). В последующие моменты времени решений в переходной области нет. Следовательно, утрачивается квазистационарность этой области, процесс с момента достижения $c = c_*$ становится существенно нестационарным. Интересно, что само квазистационарное решение дает при $t = t_*$ бесконечный рост скорости убывания h_{\min} , $dh_{\min}/dt \rightarrow -\infty$, как это следует из наличия вертикальной касательной при $\omega = \omega_*$ (фиг. 1). Можно сделать вывод о разрушении пленки в краевой области при $c = c_*$. Силы Ван-дер-Ваальса усиливают процесс утоньшения пленки. Давление $p_m = A/6\pi h^3$ повышено в сечениях, в которых толщина понижена и поэтому стимулируется преимущественное утоньшение именно этих участков пленки. Разрушение происходит из-за быстрого вытекания жидкости из области, где $h \sim h_{\min}$.

Критическое значение минимальной толщины, при которой разрушается переходная область, на основании (3.8) и (3.13) равна

$$h_{\min*} = 1,435 H_w; H_w = (A/6\pi p_c)^{1/2} \quad (3.14)$$

В момент разрушения максимальное давление, развиваемое из-за сил Ван-дер-Ваальса, $p_m = A/6\pi h^3$ относительно невелико по сравнению с капиллярным $p_m = 0,338 p_c$.

Критическое значение угла наклона c (при $\xi \rightarrow \infty$) вычисляется из (3.6) и (3.13)

$$c_* = 1,183 \sqrt{H_w/N}; N = n\sigma/p_c \quad (3.15)$$

Условие квазистационарности переходной области [5]

$$|Q_0| \gg \left| \int_{x_0}^{\infty} \frac{dh}{dt} dx \right|$$

где x_0 — точка минимума h , выполнено всюду, кроме малой окрестности критической точки $c(t) = c_*$, если

$$2\kappa p_0 c^3 \gg n\sigma |dc/dt| \quad (3.16)$$

Последнее неравенство можно получить с учетом выражения (3.3), $q_0 \sim 1$ и асимптотики $y(\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$.

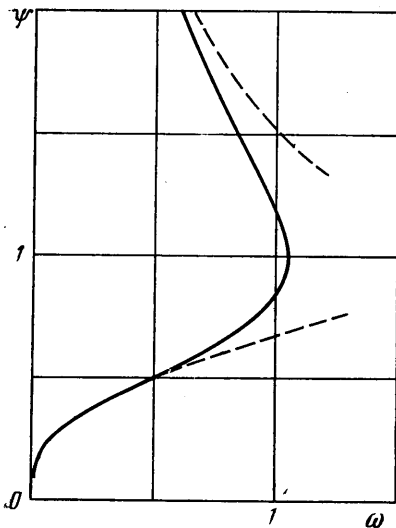
4. **Динамика пленки больших размеров.** Сравнение первых членов асимптотических представлений h по формулам (3.2), (3.12) и (2.1), (2.5) дает величину наклона в промежуточной области

$$c(t) = b(h_\infty/4\kappa t)^{1/4} \quad (4.1)$$

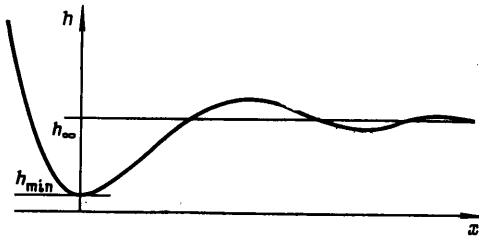
С учетом (4.1) формулы (3.3) дают выражения масштаба решения в переходной области l и потока Q_0 жидкости, отсасываемой из пленки в мениск.

Формула (3.8) с учетом определения ω (3.6) и зависимости $\psi = \psi(\omega)$ (фиг. 1) позволяет найти $h_{\min}(t)$. Как видно из (3.6) и (4.1), параметр $\omega(t)$ монотонно возрастает со временем и решение существует конечное время $t < t_*$.

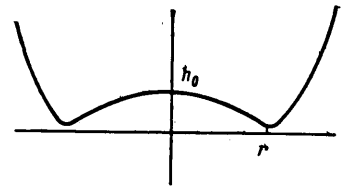
Полученное решение схематически изображено на фиг. 2. Волна проникает в глубь слоя по закону $L \sim t^{1/4}$, ширина переходной области убывает в области действия сил Ван-дер-Ваальса как $q_0 t^{-1/4}$ — несколько быстрее, чем $t^{-1/4}$, из-за убывания q_0 . Толщина h_{\min} в пе-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

редной области убывает как $t^{-1/4}$ в отсутствие сил Ван-дер-Ваальса и несколько быстрее $t^{-1/4}$ в присутствии сил Ван-дер-Ваальса, как это следует из (3.8) и фиг. 1.

Время t_* до момента разрушения пленки в краевой области определяется из формул (4.1), (3.15)

$$t_* = \frac{b^4 h_\infty}{c_*^4 4\kappa} = 0,820 \frac{h_\infty}{\kappa} \left(\frac{n\sigma}{H_w p_0} \right)^2 = \frac{0,820}{\kappa h_\infty} \left(\frac{n\sigma}{p_0} \right)^2 \frac{1}{\delta^2} \quad (4.2)$$

Расстояние L_* , на которое успевает пройти волна до своего разрушения, равно

$$L_* = (4\kappa h_\infty^3 t_*)^{1/4} = 1,346 h_\infty (n\sigma/H_w p_0)^{1/4} = 1,346 \sqrt[n\sigma h_\infty/p_0 \delta} \quad (4.3)$$

Таким образом, время жизни пленки до разрушения имеет порядок $t_* \sim \delta^{-2}$, а максимальный масштаб волны — порядок $\delta^{-1/2}$ относительно малого параметра δ .

Метод получения решения сращиванием оправдан, если промежуточный масштаб $x \sim \lambda$, на котором поток из пленки Q_0 и интеграл от нестационарного члена в (1.3) имеют одинаковый порядок, много меньше, чем масштаб волны L , но много больше масштаба переходной области l

$$\lambda^2 |dc/dt| = 2q_0 \kappa c^5 N, \lambda = \xi_0 L, l \ll \lambda \ll L \quad (4.4)$$

Учитывая (4.1) и значение $q_0 \sim 1$, получаем условие применимости решения

$$2(\kappa h_\infty t)^{1/4} \gg \sqrt{n\sigma/p_\sigma} = \lambda / (b^2 \sqrt{2h_\infty}) \quad (4.5)$$

При условии (4.5) выполнено также условие (3.16). Условие (4.5) имеет ясный физический смысл. Волна должна уйти от края на расстояние L , много большее характерного размера l_0 области перехода от мениска к пленке толщины h_∞ , чтобы имели место асимптотические закономерности. Интересно, что промежуточный масштаб λ не зависит от времени и соответствует именно $l_0 \sim \sqrt{h_\infty \sigma / p_\sigma}$.

Важно проверить выполнение условия приближенной автомодельности решения во внутренней области пленки (2.6). С учетом выражения для ξ_0 , следующего из (4.4) и (4.1), неравенство (2.6) можно записать в простом виде

$$L^5 \ll 2L_*^5 / \sqrt{\delta}, \quad t^{3/4} \ll 2t_*^{3/4} / \sqrt{\delta}, \quad L = (4\kappa h_\infty^3 t)^{1/4} \quad (4.6)$$

где L_* — критический параметр L при разрушении, $\delta = H_W / h_\infty$ — малый параметр. Таким образом, как видно из (4.6), в силу $\delta \ll 1$ пленка разрушается раньше, чем теряется автомодельность решения п. 2. Малые искажения автомодельного решения во внутренней области (точнее, вблизи масштаба λ) пленки имеют максимальное значение порядка $\sqrt{\delta} L^5 / L_*^5 \ll 1$ вдали от момента разрушения, а в момент разрушения — порядка $\sqrt{\delta} \ll 1$.

5. Динамика пленки малых размеров. Рассмотрим пленку, граничащую по окружности радиуса r с мениском и имеющую в начальный момент $t=0$ толщину h_∞ . Пока длина волны, распространяющейся от края пленки, удовлетворяет неравенству $L \ll r$, применимо решение плоской задачи. При $L \sim r$, $t \sim r^4 / (4\kappa h_\infty^3)$ волна достигает центра пленки и начинается угоншение центральной области при условии, что $r < L_*$ и пленка не разрушается раньше, чем волна достигнет ее центра. Минимальную толщину пленки в краевой области при $L \sim r$ можно оценить по формуле

$$h_{\min} = q_0 y_{\min} b^2 (n\sigma/p_\sigma) h_\infty^2 / L^2, \quad L = (4\kappa h_\infty^3 t)^{1/4} \quad (5.1)$$

Здесь величина $q_0 y_{\min} b^2$ монотонно изменяется от 3,86 при $h_{\min} \gg H_W$ до наименьшего значения 2,60 в момент разрушения краевой области, когда $h_{\min} = h_{\min*}$.

Для больших времен $t \gg r^4 / (4\kappa h_\infty^3)$ естественно ожидать малой роли нестационарного члена $\partial h / \partial t$ в уравнении (1.2) в области, где $h \sim h_0$.

Уравнение динамики осесимметричной пленки, следующее из (1.1) и (1.2), можно преобразовать к виду

$$\kappa h^3 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial h}{\partial z} \right) + \frac{\kappa A}{2\pi \sigma n} \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial z} = - \frac{1}{z} \int_0^z \frac{\partial h}{\partial t} dz \quad (5.2)$$

Здесь z — расстояние от центра пленки.

При $t \rightarrow \infty$ или $\kappa \rightarrow \infty$ правая часть (5.2) мала в той области z , где $h \sim h_0$ (h_0 — толщина в центре). Поэтому во внутренней области пленки уравнение (5.2) можно упростить, опустив правую часть и проинтегрировав по z

$$\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial h_{(0)}}{\partial z} - \frac{A}{6\pi h_{(0)}^3 \sigma n} = \text{const} \quad (5.3)$$

На краю пленки $z \approx r$ уравнение (5.2) упрощается

$$\kappa h^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{\kappa A}{2\pi\sigma n} \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{r} \int_0^r z \frac{\partial h_{(0)}}{\partial t} dz, \quad x=r-z \quad (5.4)$$

Решение уравнения (5.3) при $z \rightarrow r$ должно срачиваться с решением (5.4) при $x/l \rightarrow +\infty$, где $l \sim \sqrt{h_{\min}\sigma/p_\sigma}$ — масштаб краевой области.

Пусть влияние сил Ван-дер-Ваальса мало во внутренней области пленки радиуса r

$$A/(6\pi h_0^3) \ll 4\sigma n h_0/r^2 \quad (5.5)$$

тогда приближенное решение (5.3) будет

$$h_{(0)} = h_0(t) (1 - z^2/r^2) \quad (5.6)$$

В краевой области задача для уравнения (5.4) совпадает с решенной в п. 3, если принять в соответствии со срачиванием

$$-|Q_0| = \frac{1}{r} \int_0^r z \frac{\partial h_{(0)}}{\partial t} dz, \quad c = \frac{2h_0}{r}$$

Из формул п. 3 тогда следует

$$h_0(t) = \left(\frac{p_\sigma r^6}{2^3 n \sigma \kappa t q_0(t)} \right)^{1/4}, \quad h_{\min} = \frac{q_0(t) y_{\min}(t) n \sigma}{p_\sigma} \left(\frac{2h_0}{r} \right)^2 \quad (5.7)$$

Решение имеет характерный вид, представленный на фиг. 3. Величина q_0 изменяется от 1,21 до 0,5506; $q_0 y_{\min}$ — от 1,523 до 1,0256. Функции $q_0(t)$ и $y_{\min}(t)$ зависят от $c(t) = 2h_0/r$ в соответствии с п. 3. Поэтому первая формула (5.7) представляет трансцендентное уравнение относительно h_0 . Для $h_{\min} \gg h_{\min*}$ значения $q_0 = 1,21$; $y_{\min} = 1,259$ совпадают с найденными в работе [5] и для $p_\sigma = 2\sigma/R$, $n=1$, $k=1$ близки к приближенным результатам [8].

При $h_{\min} = h_{\min*}$ происходит разрушение пленки в краевой области. Критические параметры, соответствующие моменту разрушения

$$h_{0*} = 0,591r\sqrt{H_w p_\sigma / n\sigma}, \quad h_{\min*} = 1,435H_w \quad (5.8)$$

$$t_* = 0,0291r^2 n\sigma / (H_w^2 p_\sigma \kappa)$$

Вывод верен, если время t_* существенно больше времени выхода на рассматриваемое асимптотическое решение $t_* \gg r^4 / (4\kappa h_\infty^3)$. Это условие с учетом (5.8) эквивалентно

$$0,12(h_\infty/H_w)^2 \gg r^2 p_\sigma / (h_\infty \sigma n) \quad (5.9)$$

Отсюда следует, что только пленки достаточно малых размеров r могут разрушаться после того, как волна достигает центра пленки и пленка далее приближается по форме к выпуклой линзе (5.6), утоньшающейся за счет отсасывания жидкости в мениск. Для достаточно протяженной пленки условие (5.9) не выполнено и разрушение происходит в условиях решения п. 3, когда волна не успевает уйти далеко от края пленки. Например, для $h_\infty \sim 10^{-4}$ см, $\sigma n/p_\sigma \sim 0,1$ см условие (5.9) перестает выполняться уже для $r \sim 10^{-2}$ см.

Условие относительной малости правой части (5.2) во внутренней области можно с учетом (5.6) привести к виду условия $p_\sigma r^2 \gg h_0 \sigma$, совпадающему с условием возможности выделения пленки толщины h_0 от мениска [6]. Наконец, условие возможности пренебрежения влиянием сил Ван-дер-Ваальса во внутренней области (5.5) выполнено вплоть до мо-

мента разрушения пленки, если $p\sigma^2 \gg H_w\sigma$, что заведомо выполняется, так как $p\sigma^2 \gg h_\infty\sigma$.

6. Процесс разрушения пленки. Для оценки времени разрушения краевой области пленки можно привлечь точное решение уравнений (1.1), (1.2) для $\sigma \sim 0$ в плоском случае [6]

$$h = (h_0 - \alpha t) / \cos^2(x\sqrt{2\alpha/G}), \quad G = A\kappa / (2\pi sn), \quad h_0 \sim h_{\min*} \quad (6.1)$$

Сопоставляя область локализации решения (6.1) $x\sqrt{2\alpha/G} \sim \pi/2$ и масштаб $l_* \sim x$ решения в переходной области в момент t_* потери квазистационарных решений, оценим величину α в (6.1) и найдем характерное время, за которое толщина h обратится в нуль в случае пленки больших размеров

$$\tau = h_{\min*} / \alpha \sim 0,2t_*\delta \quad (6.2)$$

Здесь учтены формулы (3.3), (3.15), (3.14) и (4.2). Оценка (6.2) показывает, что характерное время разрушения намного меньше, чем время t_* существования пленки до разрушения, так как $\delta \ll 1$ в силу п. 1. К такому же выводу приводит оценка характерного времени разрушения круглой пленки малых размеров

$$\tau \sim 5,6t_*\delta_1, \quad \delta_1 = H_w n \sigma / (p\sigma^2) \ll 1$$

Отметим, что процесс разрушения, видимо, будет идти быстрее, чем по уравнению (6.1), так как приближенно плоская геометрия краевой области может не сохраняться из-за заметно большей скорости уменьшения толщины (при той же области локализации решения) в осесимметричном случае [6]. Поэтому, видимо, разрушение произойдет сначала в отдельных участках краевой области.

Таким образом, пленки с заторможенной поверхностью или с поверхностью, достаточно подвижной в условиях сильной диффузии, под действием капиллярных сил утоньшаются всегда с сильной неоднородностью, преимущественно в краевой области. В краевой области происходит разрушение пленки, причем очень рано, когда в центральной области толщина пленки далека от области действия сил Ван-дер-Ваальса. Время, за которое разрушается пленка, значительно меньше времени, на котором справедливы асимптотические решения, описывающие динамику пленок больших или малых размеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Архипов Р. Г. Неустойчивость течения сверхтекучей пленки. — ЖЭТФ, 1957, т. 33, в. 1, с. 116–123.
2. Воинов О. В. К гидродинамическому описанию пленки простой жидкости. — Ж. физ. химии, 1972, т. 46, № 2, с. 485–487.
3. Зонга Г., Штрэнге К. Коагуляция и устойчивость дисперсных систем. Л.: Химия, 1973. 151 с.
4. Воинов О. В. Релаксация жидкого слоя под действием капиллярных сил. — ПМТФ, 1970, № 1, с. 73–77.
5. Воинов О. В. Нестационарная нелинейная капиллярная волна в слое вязкой жидкости. — ПММ, 1977, т. 41, № 3, с. 473–479.
6. Воинов О. В. К теории утоньшения свободных пленок вязкой жидкости. — ПМТФ, 1974, № 3, с. 67–78.
7. Воинов О. В. Волновые движения в слое вязкой жидкости в присутствии поверхностно-активных веществ. — ПМТФ, 1971, № 3, с. 81–89.
8. Frankel S. P., Mysels K. J. On the «dimpling» during the approach of two interfaces. — J. Phys. Chem., 1962, v. 66, № 1, p. 190–191.