

УДК 532.516:013.4

РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНОЙ КОНЦЕНТРАЦИОННОЙ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В БИНАРНЫХ СМЕСЯХ ГАЗОВ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОТНОШЕНИЕМ ПЛОТНОСТЕЙ

НИКУЛИН Д. А., СТРЕЛЕЦ М. Х.

Сформулированная в [1] приближенная система уравнений в отличие от системы в приближении Буссинеска [2] может использоваться для описания концентрационной естественной конвекции при наличии существенных изменений состава в газовых смесях с произвольным отношением молекулярных весов компонентов.

В данной работе возможности, открываемые использованием этой системы уравнений, иллюстрируются на примере численного исследования нестационарной свободной конвекции изотермической бинарной газовой смеси в замкнутой прямоугольной области в широком диапазоне изменения числа Архимеда и отношения молекулярных весов компонентов смеси.

1. Постановка задачи. Рассматривается замкнутая прямоугольная область с шириной L_1 и высотой L_2 , разделенная жесткой вертикальной перегородкой, расположенной на расстоянии L_3 от левой стенки. Слева и справа от перегородки покоятся газы с молекулярными весами M_1 и M_2 соответственно (для определенности $M_2 > M_1$), имеющие температуру T_0 . В начальный момент времени перегородка мгновенно убирается. Требуется определить характеристики возникающего при этом свободно конвективного течения.

Использование для решения сформулированной задачи системы уравнения концентрационной естественной конвекции в приближении Буссинеска [3] является необоснованным, так как лежащее в основе этого приближения допущение о малости изменения концентрации компонентов смеси в пространстве и во времени в рассматриваемом случае явно не выполняется (концентрации компонентов могут изменяться от 0 до 1). Нежелательным является также привлечение для этой цели полной системы уравнений Навье — Стокса, так как ее численное интегрирование при малых значениях параметра гидростатической сжимаемости $\varepsilon = gLM_0 / (RT_0)$, характерных для большинства задач естественной конвекции, сопряжено со значительными трудностями [4, 5].

По-видимому, наиболее естественным при таких условиях является использование приближенной системы уравнений, которая получена в [1] из полной системы уравнений Навье — Стокса в предположении о малости параметра ε :

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial (Mv_j)}{\partial x_j} = 0, \quad M = \frac{(\varepsilon_1 C_0 + 1)}{(\varepsilon_1 C + 1)} \quad (1.1)$$

$$M \frac{\partial v_i}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{(C_0 - C)}{(\varepsilon_1 C + 1)} \delta_{i,2} + \frac{1}{\sqrt{Ar}} \Phi_i \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \frac{1}{Sc \sqrt{Ar}} \frac{\varepsilon_1}{(\varepsilon_1 C_0 + 1)} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(M \frac{\partial C}{\partial x_j} \right) \quad (1.3)$$

$$\Phi_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{i,j} \right] \right\} \quad (1.4)$$

Здесь x_i , v_i — координаты и проекции скорости соответственно, t — время, M — молекулярный вес смеси, p — избыточное (динамическое) давление, C — массовая концентрация легкого газа, $\varepsilon_1 = M_2/M_1 - 1$, $Ar = \rho_0^2 g L_2^3 \varepsilon_1 / \mu_0^2$ — число Архимеда $Sc = \mu_0 / (\rho_0 D_0)$ — число Шмидта, μ — динамический коэффициент вязкости смеси.

Индекс 0 относится к величинам, принятым за масштабы, в качестве которых используются следующие параметры: L_2 — для линейных размеров, $U_0 = \sqrt{g L_2 \varepsilon_1}$ — для скоростей, $t_0 = L_2 / U_0$ — для времени, $M_0 = M_2 / (\varepsilon_1 C_0 + 1)$ — для молекулярного веса смеси (C_0 — значение массовой концентрации легкого газа при условии полного перемешивания исходной смеси), $\rho_0 = p_0 M_0 / (R T_0)$ (p_0 — давление при $x_2 = 1$ в начальный момент времени) — для плотности, $\rho_0 U_0^2$ — для избыточного давления, $\mu_0 = \mu_0(C_0, T_0)$ — для динамической вязкости и $D_0 = D_0(p_0, T_0)$ — для коэффициента бинарной диффузии.

В качестве начальных и граничных условий к системе уравнений (1.1)–(1.4) задаются параметры, соответствующие условиям равновесия в левой и правой частях области и условиям прилипания и отсутствия диффузионного потока на твердых стенках

$$t=0, \quad v_i=0, \quad C=1 \quad (L_3' > x_1 > 0), \quad C=0 \quad (L_1' > x_2 \geq L_3') \quad (1.5)$$

$$(v_i)_w = 0, \quad \left(\frac{\partial c}{\partial n} \right)_w = 0$$

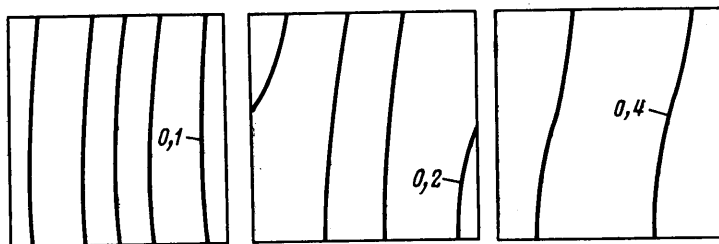
Здесь индекс w относится к параметрам на стенках, n — направление нормали к стенке.

2. Метод расчета. Наличие в системе (1)–(4) уравнения (3), сходного по своей форме с условием несжимаемости ($\partial v_j / \partial x_j$), позволяет применить для ее решения весьма эффективный метод маркеров и ячеек и его различные модификации, предложенные для решения уравнений Стокса [4]. В частности, в данной работе для численного интегрирования системы (1.1)–(1.4) с начальными и граничными условиями (1.5) используется методика [6], в рамках которой распределение давления и скорости на новом временном слое определяется путем совместного итерационного решения уравнений (1.2), (1.3). Первое из уравнений (1.1) используется затем для определения M , а концентрация C находится из второго уравнения (1.1).

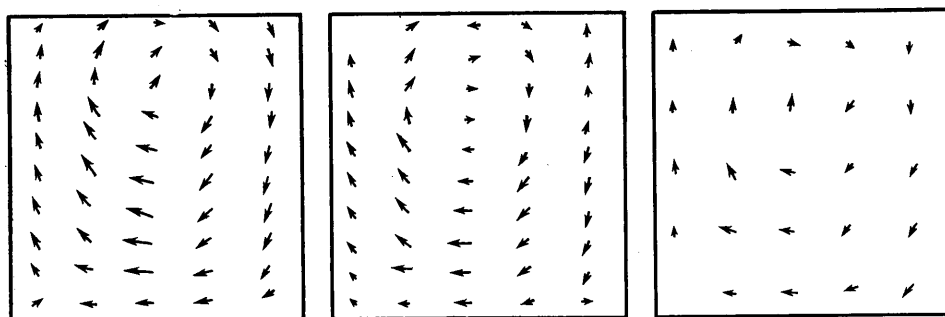
Расчеты проводились для чисел Архимеда в диапазоне от 1 до 10^6 и значений параметра ε от 1 до 10. Остальные безразмерные комплексы не варьировались и полагались равными: $Sc=1$, $L_2/L_1=1$, $L_3/L_1=0,5$. Основная часть расчетов была выполнена на конечно-разностной сетке с числом узлов 22×22 . Контрольные расчеты, проведенные на сетках 22×12 и 22×42 , показали, что при этом обеспечивается вполне приемлемая точность полученного численного решения.

3. Результаты расчетов. Результаты расчетов свидетельствуют о том, что в рассматриваемом диапазоне изменения числа Архимеда и параметра ε_1 возможны три различных режима течения.

Первый из них можно условно назвать «диффузионным». Он имеет место при малых значениях числа Архимеда (порядка 1 и менее), т. е. при условиях, когда существенную роль играет вязкий перенос импульса смеси и диффузионный перенос массы ее компонентов. В этом случае после изъятия перегородки в объеме возникает течение, направленное в сторону газа с меньшим молекулярным весом и близкое по структуре к течениям, наблюдаемым в аналогичных условиях на эксперименте [7]. Оно вызывает лишь незначительное искривление изолиний концентрации в центральной части области и с течением времени быстро затухает. При этом состав смеси асимптотически приближается к однородному.



Фиг. 1

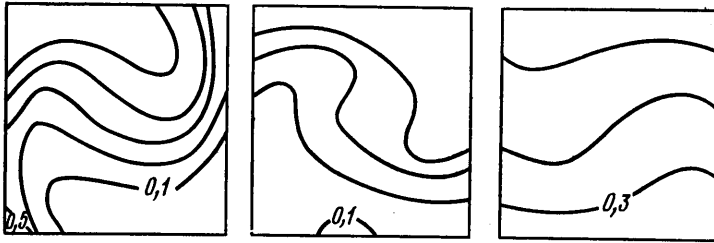


Фиг. 2

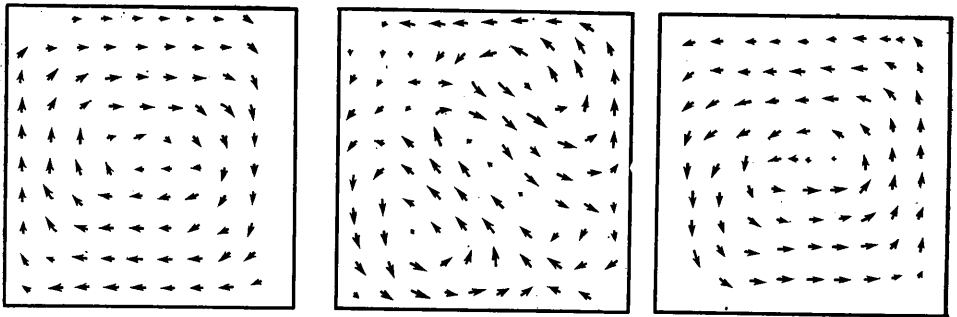
Второй режим, реализующийся при значениях числа Архимеда порядка 10^2 , характеризуется возникновением циркуляционного течения, направленного по часовой стрелке. Газ, имеющий больший молекулярный вес, как бы сползает вниз, выталкивая вверх более легкий газ. Затухание этого течения и выравнивание состава смеси в объеме происходит несколько медленнее, чем при течении первого типа, однако изолинии концентрации, как и в первом случае, мало отличаются от вертикальных прямых, что свидетельствует о сравнительно низкой интенсивности конвекции.

Развитие во времени описанного режима течения показано на фиг. 1, 2, на которых изображены изолинии объемной концентрации легкого газа, построенные с шагом 0,2 (фиг. 1), и векторные поля скорости (фиг. 2), имеющие место в моменты времени $t=0,75; 1,5$ и 3 соответственно при $Ar=400, \epsilon_1=1$.

При дальнейшем увеличении числа Архимеда и фиксированном значении параметра ϵ_1 наблюдается третий режим течения, при котором определяющим становится конвективный перенос массы и импульса. Так же как и в предыдущем случае, при этом вначале возникает циркуляционное течение, направленное по часовой стрелке, однако оно оказывается более интенсивным. В результате изолинии концентрации сильно деформируются и распределение плотности в горизонтальных плоскостях становится немонотонным. Это приводит к возникновению двух дополнительных вихрей в левом нижнем и правом верхнем углах области. В дальнейшем эти вихри разрастаются и сливаются между собой, образуя единое циркуляционное течение, направленное против часовой стрелки. Далее описанный процесс повторяется в обратном направлении, сопровождаясь сравнительно медленным выравниванием состава смеси в объеме, и постепенно затухает во времени. При этом количество таких колебаний растет с увеличением значения числа Архимеда.



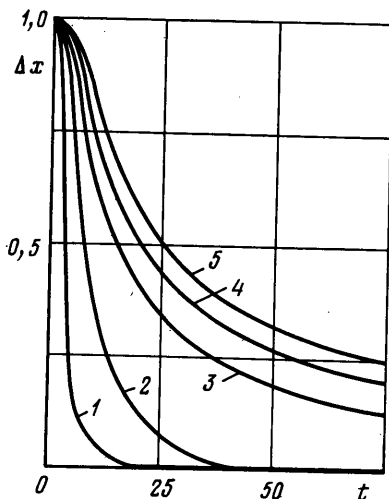
Фиг. 3



Фиг. 4

Три характерные фазы течения такого типа, имеющего место при $Ar = 1,6 \cdot 10^5$ и $\epsilon_1 = 1$, представлены на фиг. 3, 4 для моментов времени $t = 3$; 9 и 12 соответственно.

Зависимость скорости перемешивания газов в объеме от числа Архимеда иллюстрирует фиг. 5, на которой представлены результаты расчета изменения во времени величины Δx (разница между максимальным и минимальным значениями мольной концентрации легкого газа в объеме) при различных значениях числа Архимеда (1 — $Ar = 400$; 2 — 10^4 ; 3 — $1,6 \cdot 10^5$; 4 — $4,9 \cdot 10^5$; 5 — 10^6) и $\epsilon_1 = 1$.



Фиг. 5

Увеличение значения параметра ϵ_1 при фиксированном значении числа Архимеда приводит к уменьшению выталкивающей силы (второй член в правой части уравнения (1.2)) и, следовательно, к снижению интенсивности свободной конвекции. Так, например, «циркуляционный» режим течения, имеющий место при $Ar = 400$ и $\epsilon_1 = 1$ (фиг. 1, 2), сменяется «диффузионным» при $Ar = 400$ и $\epsilon_1 = 10$.

Как уже отмечалось, система уравнений (1.1)–(1.4) получена из полной системы уравнений Навье — Стокса для изотермической бинарной смеси газов путем предельного перехода при стремлении к нулю параметра гидростатической сжимаемости ϵ . В связи с этим представляет интерес оценка границ

применимости системы (1.1)–(1.4) при конечных значениях ϵ . Для получения такой оценки в данной работе наряду с решением описанной выше задачи в рамках модели (1.1)–(1.4) было также проведено ее решение на основе полной системы уравнений Навье–Стокса при различных значениях параметра ϵ . При этом использовался численный метод [8], специально ориентированный на решение полной системы уравнений Навье–Стокса для сжимаемого газа при произвольных (в том числе и малых) значениях Маха, являющегося аналогом параметра ϵ для задач вынужденной конвекции. Проведенные расчеты показали, что максимальная погрешность определения локальных значений состава смеси, обусловленная использованием приближенной системы уравнения (1.1)–(1.4), при $\epsilon \leq 0,05$ не превышает 5%, а затраты машинного времени при этом сокращаются более чем на порядок.

В большинстве случаев, представляющих практический интерес, параметр ϵ принимает значения много меньше этой величины. Так, например, для воздуха при $T_0=300$ К и $L=10$ м $\epsilon=10^{-3}$, а для водорода при тех же условиях $\epsilon=7,8 \cdot 10^{-5}$.

Таким образом, для рассматриваемого класса задач система уравнений (1.1)–(1.4) практически не уступает по общности полной системе уравнений Навье–Стокса, сохраняя при этом относительную простоту традиционного приближения Буссинеска, и тем самым значительно расширяет возможности теоретического анализа нестационарных свободно конвективных течений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никулин Д. А., Потехин Г. С., Стрелец М. Х. Приближенная система уравнений для описания нестационарной концентрационной естественной конвекции в бинарных газовых смесях. – Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 5, с. 57.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
3. Шапошников И. Г. К теории конвективных явлений в бинарной смеси. – ПММ, 1953, 17, № 5, с. 604.
4. Roache P. J. Computational fluid dynamics. Albuquerque USA, Hermosa Publ., 1976.
5. Полежаев В. И. Численное решение системы двумерных нестационарных уравнений Навье–Стокса для сжимаемого газа в замкнутой области. – Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 2, с. 103.
6. Ramshaw J. D., Trapp J. A. A numerical technique for low-speed homogeneous two-phase flow with sharp interfaces: – J. Computational Phys., 1976, v. 21, № 4, p. 438.
7. Суетин П. Е., Волобуев П. В. Бароэффект при взаимной диффузии газов в области высоких давлений. – В кн.: Тепло- и массоперенос. Т. 4. Минск: Наука и техника, 1966, с. 132.
8. Harlow F. H., Amsden A. A. A numerical fluid dynamics calculation method for all flow speeds. – J. Computational Phys., 1971, v. 16, № 8.

Ленинград

Поступила в редакцию
12.VIII.1980