

УДК 532.51:537.2

## **ОБТЕКАНИЕ ПРОВОДЯЩЕЙ СФЕРЫ ПОТОКОМ С ЗАРЯЖЕННЫМИ ИНЕРЦИОННЫМИ ЧАСТИЦАМИ**

**ВАРЕНЦОВ О. К.**

Решена задача об обтекании проводящей сферы гидродинамическим потоком, содержащим электрически заряженные частицы. Определено влияние объемной плотности электрического заряда и потенциала сферы на коэффициент захвата  $\eta$  при различных значениях параметра инерции частиц и различных законах их сопротивления. Показано, что  $\eta$  для заземленной сферы может значительно превосходить единицу. При постановке задачи предполагается, что область ЭГД-течения ограничена двумя сетками-электродами, моделирующими срез источника заряженных частиц и окружающие электрические условия. Поле скоростей около сферы считается потенциальным. Решение сформулированной задачи проводится численно.

Вопрос об электрогазодинамическом течении около проводящего тела для случая безынерционных частиц изучен в настоящее время достаточно полно. Построена приближенная теория цилиндрического зонда [1, 2], сделаны оценки влияния сжимаемости на показания зонда [2], рассмотрена задача о зонде специальной формы, не возмущающем электрогидродинамический поток [3], решена задача об обтекании проводящей сферы электрогидродинамическим потоком с учетом возмущения распределения объемной плотности электрического заряда [4]. Задача о движении заряженных инерционных частиц около сферы рассмотрена в [5] применительно к изучению коагуляции капель аэрозоля. Исследование проведено для отдельных частиц при отсутствии индуцированных электрических полей, а инерционность частиц учитывается в линейном приближении. Совместный учет инерционности частиц и их собственных полей ранее не проводился. Анализ подобной ситуации и посвящена настоящая работа.

1. Рассмотрим проводящую сферу радиуса  $R$ , помещенную в середину межэлектродного промежутка, образованного двумя бесконечными параллельными электродами. Пусть потенциалы электродов равны нулю, а сфера имеет потенциал  $\phi$ . Будем считать, что влиянием токопроводящей цепи сферы на распределение электрических и гидродинамических величин в межэлектродном промежутке можно пренебречь, а электроды представляют собой сетки, не возмущающие гидродинамического потока.

Вместе с жидкостью в межэлектродный промежуток поступают частицы, обладающие электростатическим зарядом  $Q$ ; радиус сферических частиц равен  $a \leq 10^{-3}$  см, плотность материала частиц —  $\rho_p$ . При попадании на сферу или электрод-коллектор частицы либо поглощаются, либо отдают свой заряд и, таким образом, исключаются из рассмотрения. Будем считать, что вблизи левого электрода (эмиттера) скорость частиц совпадает со скоростью гидродинамического потока. При дальнейшем движении скорость частиц меняется под воздействием электрической силы и силы сопротивления.

Электрическая сила принимается тождественно равной кулоновской силе  $QE$ . Поляризация частиц не учитывается в связи со следующими оценками.

Электрическое поле вблизи обтекаемой заземленной сферы радиуса  $R$  индуцируется частицами с зарядом  $Q$ . Пусть счетная плотность частиц равна  $n$  во всей области с характерным размером  $L$ , ограниченной заземленными электродами. Тогда напряженность поля  $E$  вблизи поверхности

сферы по порядку величины равна  $nQL^2R^{-1}$ . Составим отношение силы, действующей на проводящую частицу, как на диполь с моментом  $\mathbf{d} \sim a^3 \mathbf{E}$ , помещенный в поле  $\mathbf{E}$ , к соответствующей кулоновской силе

$$\frac{\nabla(\mathbf{dE})}{QE} \sim \frac{a^3 E^2 R^{-1}}{QE} \sim \frac{a^3 nQL^2}{QR^2} = na^3 \left(\frac{L}{R}\right)^2$$

Отсюда следует, что для потоков с частицами размером  $a \sim 10^{-3}$  см и плотностью  $n \sim 10^3$  см $^{-3}$  поляризацией частиц можно пренебречь при не слишком малых ( $RL^{-1} \geq 10^{-2}$ ) размерах обтекаемой сферы.

Зависимость силы сопротивления частицы при ее движении в жидкости аппроксимируем с помощью формулы, предложенной в [6]. Тогда уравнение движения частицы принимает вид

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 6\pi\mu a (\mathbf{U} - \mathbf{u}) \psi + Q\mathbf{E} \quad (1.1)$$

$$\psi = 1 + \frac{1}{6} \text{Re}^{3/2}, \quad \text{Re} = \text{Re}_0 \frac{|\mathbf{U} - \mathbf{u}|}{U_0}, \quad \text{Re}_0 = \frac{2\rho a U_0}{\mu}$$

где  $\mu$ ,  $\rho$  — коэффициент динамической вязкости и плотность жидкости,  $U_0$  — скорость потока на бесконечности,  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{u}$  — скорость жидкости и частиц соответственно.

Будем считать, что параметр электрогидродинамического взаимодействия  $S = nm(\rho\tau)^{-1}$  [7] — малая величина. Тогда частицы не оказывают влияния на движение жидкости и поле скоростей можно считать известным из решения соответствующей гидродинамической задачи. В дальнейшем будет рассматриваться потенциальное обтекание сферы несжимаемой жидкостью, причем вектор гидродинамической скорости на бесконечности  $\mathbf{U}_0$  перпендикулярен плоскостям электродов.

Электрическое поле представляет собой сумму внешнего  $E_0$  и индуцированного  $E_i$  поля, создаваемого объемным зарядом частиц. Если  $E_i \ll E_0$ , то уравнение (1.1) интегрируется для каждой частицы независимо. Если же  $E_i \geq E_0$ , то частицы взаимодействуют друг с другом через индуцированное электрическое поле. В этом случае для решения задачи уравнение движения (1.1) необходимо интегрировать совместно с уравнением неразрывности для дисперсной фазы и уравнением Пуассона для электрического поля. Полная система уравнений выписана ниже в следующих безразмерных переменных:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^0 L^{-1}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}^0 U_0^{-1}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^0 U_0^{-1}$$

$$\varphi = \varphi^0 \left(\frac{U_0 L}{b}\right)^{-1}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}^0 \left(\frac{U_0}{b}\right)^{-1}, \quad q = nQ \left(\frac{\varepsilon U_0}{4\pi b L}\right)^{-1}$$

Здесь  $\varepsilon$  — диэлектрическая постоянная,  $q$  — безразмерная объемная плотность электрического заряда,  $b = Q(4\pi\mu a)^{-1}$ . Верхним индексом градус помечены размерные величины.

Уравнения и граничные условия в дальнейшем будем записывать в цилиндрических координатах  $(x, y, \theta)$ , которые введем таким образом, чтобы ось  $x$  проходила через центр сферы перпендикулярно плоскостям электродов. Вследствие осевой симметрии задачи зависимость параметров от координаты  $\theta$  отсутствует и система уравнений с граничными условиями принимает следующий вид:

$$u_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = \frac{1}{\tau} [(\mathbf{U} - \mathbf{u})\psi - \nabla\varphi] \quad (1.2)$$

$$u_x \frac{\partial q}{\partial x} + u_y \frac{\partial q}{\partial y} + q \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{u_y}{y} \right) = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -q \quad (1.4)$$

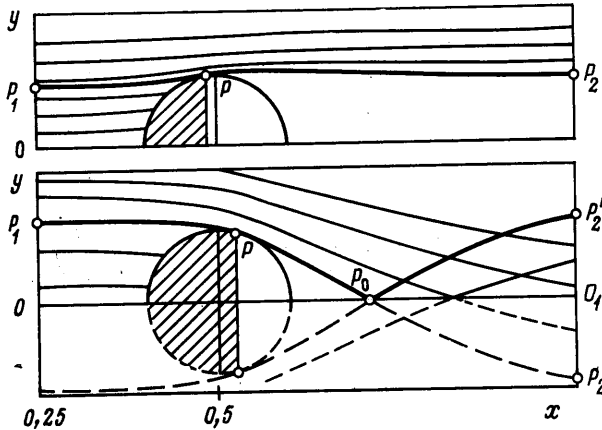
$$x=0, \quad u_y=U_y, \quad u_x=U_x, \quad q=\beta, \quad \varphi=0$$

$$x=1, \quad \varphi=0; \quad (x^2-0,5)^2+y^2=R^2, \quad \varphi=\varphi_s \quad (1.5)$$

$$y=0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}=0; \quad y=\infty, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}=0; \quad \tau = \frac{mU_0}{6\pi\mu aL}, \quad \beta = \frac{4\pi bLn_0Q}{\varepsilon U_0}$$

Задача характеризуется безразмерными параметрами  $\tau$ ,  $R$ ,  $\beta$ ,  $\varphi_s$ ,  $Re_0$ .

2. Система уравнений (1.2)–(1.4) с граничными условиями (1.5) описывает такие течения в рассматриваемой области, при которых траектории частиц нигде не пересекаются. В этом случае в каждой точке области скорость частиц определена однозначно, а траектории частиц являются линиями тока дисперсной фазы.



Фиг. 1

Однако такие течения реализуются лишь в довольно узком диапазоне изменения определяющих параметров. В общем же случае в потоке существуют области, в каждую точку которых приходит несколько характеристик, и, таким образом, скорость частиц определена неоднозначно. К образованию областей с пересекающимися характеристиками приводит, в частности, увеличение параметра  $\beta$ . В качестве примера на фиг. 1 показаны траектории частиц при  $Re_0=0$ ,  $\tau=0,5$ ,  $R=0,1$ ;  $\varphi_s=0$  и различных  $\beta$ .

Решение задачи при  $\beta=0$  описывает обтекание сферы потоком с незаряженными частицами, хорошо известное в литературе. Отметим основные особенности, характерные для таких течений при любых значениях  $\tau$ ,  $R$  и проиллюстрированные на фиг. 1, а. Траектории частиц нигде не пересекаются. Все частицы, проходящие через сечение  $OP_1$ , попадают на сферу, а соответствующая трубка тока ограничена предельной траекторией  $P_1P_2$ . Точка  $P$  касания траектории со сферой лежит на передней полусфере, а траектория  $P_1P_2$  ось нигде не пересекает.

Если частицы обладают электрическим зарядом ( $\beta \neq 0$ ), то в межэлектродном промежутке возникает электрическое поле, под воздействием кото-

рого заряженные частицы в окрестности заземленной сферы отклоняются к оси. В результате поток частиц на сферу возрастает, точка  $P$  смещается вниз по потоку и может лежать на задней полусфере. Предельная траектория при увеличении  $\beta$  приближается к оси симметрии течения и при достаточно высокой объемной плотности заряда пересекает ось в пределах межэлектродного промежутка (фиг. 1, б). Справа от точки пересечения  $P_0$  образуется область, в которой присутствуют частицы, стартовавшие как в верхней, так и в нижней полуплоскости. Область ограничена частью предельной траектории  $P_0P_2'$ , приходящей из нижней полуплоскости и являющейся линией разрыва плотности заряда.

Для решения задачи в области  $P_0P_2'O_1$  необходимо рассматривать две дисперсные фазы, соответствующие частицам, пришедшим из нижней и из верхней полуплоскости. При этом правую часть уравнения (1.4) следует приравнять суммарной плотности фаз  $q+q_m$ , а уравнения (1.2) и (1.3) интегрировать для каждой фазы отдельно.

Недостающие граничные условия на отрезке  $P_0O_1$  следуют из условия симметрии течения

$$y=0, \quad x > x(P_0), \quad u_{xm}=u_x, \quad u_{ym}=-u_y, \quad G_m=G \quad (2.1)$$

где  $G=qy$ . Последнее условие (2.1) вытекает из рассмотрения соотношения вдоль характеристики уравнения (1.3)

$$\frac{dq}{dy} = - \frac{q \operatorname{div} \mathbf{u}}{u_y}$$

После интегрирования этого соотношения вдоль характеристики от начальной точки имеем

$$G=qy=(qy)_0 \exp \left( - \int_{y_0}^y \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \frac{dy}{u_y} \right) \quad (2.2)$$

Отсюда следует, что вблизи отрезка оси  $P_0O_1$ , который частицы пересекают с отличной от нуля радиальной скоростью  $u_y$ , плотность  $q$  неограниченно возрастает, а величина  $G$  ограничена и в силу симметрии на оси равна величине  $G_m$ . Заметим также, что из (2.2) и непрерывности граничных условий на эмиттере следует, что  $G$  непрерывна в области, занятой характеристиками.

Рассмотрим теперь изменение потенциала в окрестности оси при  $x > x(P_0)$ . Умножим уравнение (1.4) на  $y$  и проинтегрируем его в пределах  $(0, y)$ . В результате имеем

$$\int_0^y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} y dy + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \left( y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=0} = - \int_0^y (G + G_m) dy \quad (2.3)$$

Переходя к пределу в (2.3) при  $y \rightarrow 0$  с учетом ограниченности  $\varphi$  и  $\partial^2 \varphi / \partial x^2$ , а также ограниченности и непрерывности величин  $G$  и  $G_m$  вблизи оси, получаем

$$y=0, \quad \partial \varphi / \partial y = -2G \quad (2.4)$$

Таким образом, граничное условие (1.5) при  $x > x(P_0)$ ,  $y=0$  некорректно и должно быть заменено на условие (2.4). При  $x < x(P_0)$  величина  $G$  на оси обращается в нуль и условия (1.5) и (2.4) совпадают.

Отметим, что пересечение траекторий частиц не противоречит постановке задачи, в которой столкновение частиц исключается. Покажем, что для рассматриваемых потоков ( $n \sim 10^3 \text{ см}^{-3}$ ,  $a \sim 10^{-3} \text{ см}$ ) можно считать, что на оси, где  $q = \infty$ , частицы не сталкиваются. Допустим, что кольцевая трубка тока, имеющая на эмиттере радиус

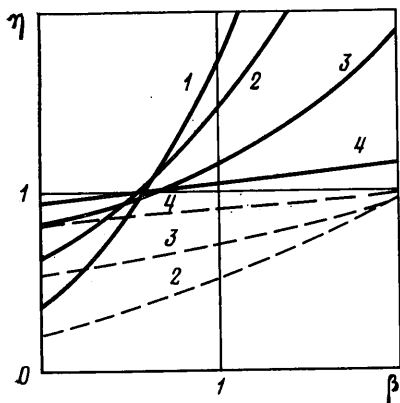
$r_1$  и толщину  $\delta$ , пересекает ось на длине  $\Delta l$  и имеет при этом толщину  $\delta'$ . Плотность и скорость частиц на эмиттере и их радиальная скорость при пересечении оси  $x$  равны соответственно  $n, u, u_y'$ . Тогда одновременно на оси находится  $N = 2\pi r_1 \delta n u 2a u_y'^{-1}$  частиц, которые занимают относительную часть оси

$$\frac{aN}{\Delta l} = \frac{4\pi r_1 a^2 n \delta u}{\Delta l u_y} = 4\pi r_1 a^2 n \frac{\delta u}{\delta' u'} \sim 2,5 \cdot 10^{-2}$$

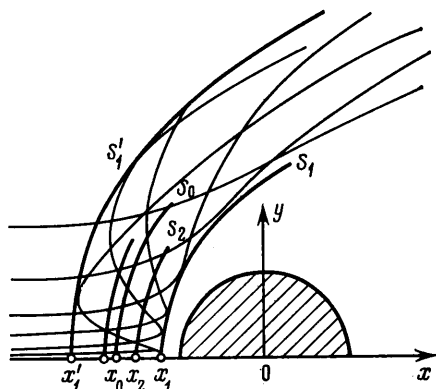
Таким образом, расстояние между частицами на оси  $x$  велико по сравнению с их размерами.

Решение задачи проводилось численно с квадратной сеткой, неравномерной вблизи сферы. Уравнение (1.5) интегрировалось методом Зейделя, уравнения (1.3), (1.4) – методом характеристик. При этом в области  $P_0 P_2' O$ , характеристическое соотношение для  $q$  использовалось в форме (2.2). Проверка точности осуществлялась путем контрольных расчетов при различных разбиениях области, а также сравнением решения, полученного вышеуказанным методом при  $q=0$  с траекторным расчетом. Ошибка в определении потока частиц на сферу достигала максимума 5% в неблагоприятных для расчета режимах, близких к запиранию ( $\eta \approx 0,25$ ).

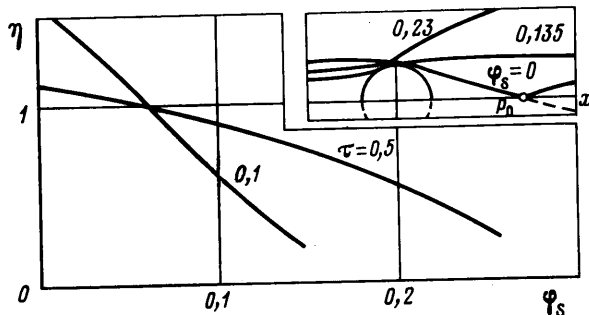
3. Во многих приложениях большой интерес представляет поток частиц на сферу, который характеризуется коэффициентом захвата  $\eta$  – отношением площади бесконечно удаленного сечения трубки тока, приходящей



Фиг. 2



Фиг. 4



Фиг. 3

на сферу, к площади ее большого круга. Зависимость коэффициента захвата от параметров  $\beta, \tau$  и  $Re_0$  в случае заземленной сферы ( $\phi_s=0$ ) при  $R=0,1$  проиллюстрирована на фиг. 2, где сплошные кривые соответствуют стоксовому обтеканию частиц, штриховые – закону сопротивления (1.1) при  $Re_0=300$  (кривым 1–4 соответствуют  $\tau=0,075; 0,16; 0,5; 2,0$ ). Увели-

чение заряда частиц или их концентрации сопровождается усилением электрических полей и приводит к возрастанию потока частиц на сферу. При этом коэффициент захвата может значительно превосходить единицу. При больших значениях параметра инерции  $\tau$  и числа  $Re_0$  влияние электрических сил проявляется значительно слабее. Возрастание сил сопротивления приводит к уменьшению коэффициента захвата, а с увеличением инерционности частиц  $\eta$  приближается к единице.

При подведении к сфере потенциала, совпадающего по знаку с зарядом частиц, вследствие электростатического отталкивания поток частиц на сферу уменьшается. На фиг. 3 нанесены зависимости коэффициента захвата от потенциала сферы  $\varphi_s$  и показаны предельные траектории частиц при  $Re_0=0$ ,  $\tau=0,5$ ,  $\beta=1$  и различных  $\varphi_s$ . Интервал изменения  $\varphi_s$  при расчетах был ограничен режимами, близкими к запирающему. Расчет обтекания сферы в режиме запирающего значительно усложняется вследствие образования областей с многократным пересечением характеристик. Картина подобного течения может быть легко получена для слабозаряженных потоков ( $\beta\varphi_s^{-1}=4\pi nQL^2\varphi_s^{-1}\ll 1$ ). В этом случае индуцированные электрические поля малы и траектории частиц определяются путем интегрирования уравнения движения заряженной частицы в лапласовом поле. Пример такого расчета приведен на фиг. 4.

Семейство траекторий имеет счетное число огибающих  $S_i$  и  $S_i'$  ( $i=1, 2, \dots$ ), показанных на фиг. 4 жирными линиями. Очевидно, что каждая из линий  $S_i$  и  $S_i'$  является линией разрыва плотности и среднемассовой скорости частиц. Точки пересечения  $x_i$  и  $x_i'$  огибающих с осью  $x$  есть точки остановки частицы, совершающей затухающие колебания вдоль оси около точки равновесия  $x_0$ . Предельной кривой для огибающих  $S_i$  и  $S_i'$  при  $i \rightarrow \infty$  является линия  $S_0$  — траектория частицы, стартовавшей из точки  $x_0$  с нулевой скоростью.

Для расчета подобного течения в рамках сплошной среды его можно рассматривать как течение многих фаз. При этом фаза 1 движется от эмиттера к  $S_1$ , фаза 2 — от  $S_1$  к  $S_1'$ , фаза 3 — от  $S_1'$  к  $S_2$  и т. д. Следует отметить, что фаза с большим номером соответствует более узкой трубке тока вблизи оси. Поэтому количество фаз, которое необходимо ввести в рассмотрение, определяется, очевидно, заданной точностью решения задачи.

Автор благодарит А. Б. Ватажину за помощь в работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кравченко В. Д., Левитов В. И. К теории зонда Сато. — Изв. АН СССР. ОТН, 1955, № 10, с. 14–28.
2. Ушаков В. В. К теории зонда Сато в электрогазодинамике. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 3, с. 134–140.
3. Бучин В. А. Задача об электрогидродинамическом зонде, не возмущающем распределений плотностей тока и объемного заряда. — ПММ, 1972, т. 36, вып. 3, с. 555–559.
4. Варенцов О. К. Обтекание проводящей сферы электрогазодинамическим потоком. — ПММ, 1980, т. 44, вып. 4, с. 677–685.
5. Левин Л. М. Исследования по физике грубодисперсных аэрозолей. М.: Изд-во АН СССР, 1961, с. 105–168.
6. Клячко Л. С. Уравнения движения пылевых частиц в пылеприемных устройствах. — Отопление и вентиляция, 1934, № 4, с. 27–29.
7. Ватажин А. Б., Грабовский В. И. Электрогидродинамическое течение в тормозящем электрическом поле при учете инерции заряженных частиц. — ПММ, 1979, т. 43, вып. 6, с. 1029–1039.

Москва

Поступила в редакцию  
19.XII.1980