

4. Гилинский М. М., Симаковский Г. П. Трехмерное двухфазное течение смеси газа с частицами в сопле Лаваля. — В кн.: Струйные и отрывные течения. М.: Изд-во МГУ, 1979, с. 51–56.
5. Злобин В. В. Исследование распределения твердой примеси в осесимметричных соплах. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 4, с. 46–50.
6. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами. — ПММ, 1965, т. 29, в. 3, с. 418–429.
7. Рычков А. Д. Об одной разностной схеме, используемой при расчетах неравновесных и двухфазных течений. — В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1977, с. 89–92.
8. Клигель Дж., Никерсон Г. Течение смеси газа и твердых частиц в осесимметричном сопле. — В кн.: Детонация и двухфазное течение. М.: Мир, 1966, с. 183–201.
9. Благосклонов В. И., Иванов М. Я. Алгоритм и программа расчета двухмерных сверхзвуковых течений идеального газа. — Тр. ЦАГИ, 1975, в. 1660, с. 25–54.
10. Копченов В. И., Крайко А. Н. Решение в рамках двухжидкостной модели прямой задачи о двухфазном течении в сопле Лаваля. — Науч. тр. Ин-та мех. МГУ, 1974, № 32, с. 96–108.
11. Полежаев Ю. В., Романченков В. П., Цирков И. В., Шебеко В. Н. Расчетная модель процесса эрозийного разрушения композиционного материала. — Инж.-физ. ж., 1979, т. 37, № 3, с. 395–404.

Москва

Поступила в редакцию
4.X.1980

УДК 532.546

АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ДВИЖЕНИЯ ГАЗА ЧЕРЕЗ ПОРИСТУЮ СРЕДУ ПРИ КВАДРАТИЧНОМ ЗАКОНЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

КУДРЯШОВ Н. А., МУРЗЕНКО В. В.

Результаты решения автомоделной задачи о плоском течении газа через пористую среду при квадратичном законе сопротивления [1] обобщаются на случай осесимметричного движения. Уравнение в автомоделных переменных для скорости изотермической фильтрации газа приводится к уравнению, решение которого — цилиндрические функции. Получены аналитические зависимости от координаты и времени давления и скорости движения газа при заданном расходе газа в начале координат и при нулевом начальном давлении газа в пористой среде.

Осесимметричное изотермическое движение газа через пористую среду при квадратичном законе сопротивления описывается системой уравнений со следующими начальными и граничными условиями [1–5]:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (Pur) = 0, \quad \frac{Pu^2}{bc^2} + \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

$$P(r, t=0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} (Pur) = K_0 \quad (2)$$

Второе условие в (2) соответствует заданному при $r=0$ расходу жидкости или газа. Здесь P — давление газа в пористой среде, u — скорость фильтрации газа, b — коэффициент сопротивления при фильтрации газа, c — изотермическая скорость звука.

Задача (1)–(2) является автомоделной и в автомоделных переменных имеет вид

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} (\xi \varphi f) = {}^{2/3} \xi \frac{df}{d\xi}, \quad \frac{df}{d\xi} + f\varphi^2 = 0 \quad (3)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} (f\varphi\xi) = 1, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} f(\xi) = 0 \quad (4)$$

Давление и скорость движения газа в пористой среде запишутся в виде

$$P = \frac{K_0}{t^{1/2} (bc^2 t)^{2/3}} f(\xi), \quad u = \left(\frac{bc^2}{t} \right)^{1/2} \varphi(\xi) \quad (5)$$

$$\xi = r(bc^2 t)^{-1/2}$$

Из (3), исключая f , получим

$$\frac{d\varphi}{d\xi} + {}^2/3\xi\varphi^2 - \varphi^3 + \frac{\varphi}{\xi} = 0 \quad (6)$$

Сделаем в (6) замену (7), получим уравнение для ξ

$$\varphi = ({}^2/3\xi^2 + \xi\psi)^{-1} \quad (7)$$

$$\frac{d\xi}{d\psi} = -\xi^2\psi - {}^2/3\xi^3 \quad (8)$$

которое после замены (9) примет вид

$$\xi = (0,5\psi^2 - h)^{-1} \quad (9)$$

$$\frac{d\psi}{dh} = 1,5(h - 0,5\psi^2) \quad (10)$$

Окончательно введя переменную y соотношением (11), имеем

$$\psi = {}^4/3y'(h)y^{-1} \quad (11)$$

$$y'' - \frac{9}{8}hy = 0 \quad (12)$$

Решением уравнения (12) является комбинация функций Эйри [6, 7]

$$y = C_1 \text{Ai}[(9/8)^{1/3}h] + C_2 \text{Bi}[(9/8)^{1/3}h] \quad (13)$$

$z \geq 0$:

$$\text{Ai}(z) = \sqrt{\frac{z}{3}} [I_{-1/6}({}^2/3z^{3/2}) - I_{1/6}({}^2/3z^{3/2})]$$

$$\text{Bi}(z) = \sqrt{\frac{z}{3}} [I_{-1/6}({}^2/3z^{3/2}) + I_{1/6}({}^2/3z^{3/2})]$$

$z \leq 0$:

$$\text{Ai}(z) = \sqrt{\frac{|z|}{3}} [J_{1/6}({}^2/3|z|^{3/2}) + J_{-1/6}({}^2/3|z|^{3/2})]$$

$$\text{Bi}(z) = \sqrt{\frac{|z|}{3}} [J_{-1/6}({}^2/3|z|^{3/2}) - J_{1/6}({}^2/3|z|^{3/2})]$$

Из второго уравнения (3) определяется связь давления газа в пористой среде со скоростью движения газа φ и переменными y и ξ

$$f = \exp \left\{ - \int \varphi^2 d\xi \right\} = y^2 \varphi^{-1} \xi^{-2} \quad (14)$$

Выражение (14) получено с учетом следующих формул, вытекающих из (6) - (11):

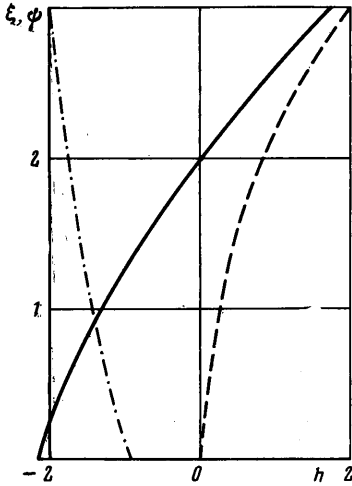
$$\begin{aligned} \int \varphi^2 d\xi &= \ln \varphi \xi + \frac{2}{3} \int \varphi \xi d\xi, & \int \varphi \xi d\xi &= - \int \xi^2 d\psi \\ \frac{2}{3} \int \xi^2 d\psi &= - \ln \xi - \int \xi \psi d\psi, & \int \xi \psi d\psi &= - \frac{3}{2} \int \psi dh \\ \int \psi dh &= \frac{4}{3} \ln y \end{aligned}$$

Подставив (13) в (11), получаем зависимость $\psi(h)$. Используя (9), имеем $h(\xi)$ и соответственно $y(h(\xi))$. Из (7) находим зависимость $\varphi(\xi)$. Таким образом, давление и скорость движения газа в пористой среде определяются как функции ξ .

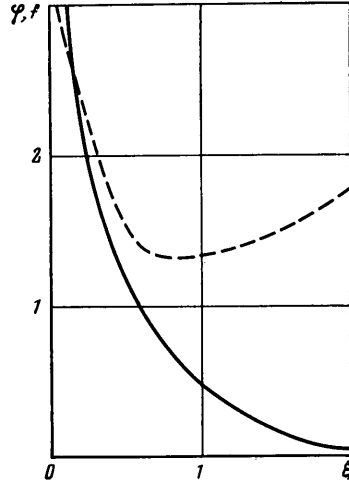
Рассмотрим поведение $h(\xi)$. Поскольку из (7)–(8) следует, что $d\psi/d\xi = \varphi\xi^{-1}$, а из (9)–(10) $-dh/d\psi = 2/3\xi$, то

$$\frac{dh}{d\xi} = 2/3\varphi > 0 \tag{15}$$

Поэтому зависимость $h(\xi)$ является монотонно возрастающей функцией от ξ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Используя (6)–(8), получаем асимптотику функции $\psi(\xi)$ и $\varphi(\xi)$ при $\xi \gg 1$:

$$\psi \approx -2/3\xi + 1,5\xi^{-2} + O(\xi^{-2}), \quad \varphi \approx 2/3\xi + 3\xi^{-2} + O(\xi^{-2}) \tag{16}$$

Из (15) с учетом (16) имеем при $\xi \gg 1$

$$h(\xi) \approx 2/9\xi^2 - 2\xi^{-1} + O(\xi^{-1}) \tag{17}$$

Из (3) следует, что при $\xi \gg 1$ y зависит от ξ медленнее, чем $\xi^{3/2}$, поэтому y зависит от h медленнее, чем $h^{2/4}$. Используя асимптотику функций Эйри при $h \rightarrow \infty$ [8] $\text{Ai}[(9/8)^{1/2}h]$ экспоненциально убывает, а $\text{Bi}[(9/8)^{1/2}h]$ экспоненциально возрастает, получаем, что $C_2 = 0$.

При $\xi \rightarrow 0$ из выражений (7)–(8) находятся асимптотические зависимости $\psi(\xi)$ и $\varphi(\xi)$ при малых ξ :

$$\psi \approx \sqrt{2} \xi^{-1/2}, \quad \varphi \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \xi^{-1/2} \tag{18}$$

Подставив (13) в (11), получаем зависимость $\psi(h)$:

$$\psi(h) = \frac{4 \text{Ai}'[(9/8)^{1/2}h]}{3 \text{Ai}[(9/8)^{1/2}h]} \tag{19}$$

Используя (18) из (19), определяем, что при $\xi = 0$ $\text{Ai}[(9/8)^{1/2}h] = 0$. Корень этого уравнения есть $h_0 = -2,25$. Постоянная C_1 находится из граничного условия (4). С учетом (19) $C_1 = 3[2\sqrt{2} \text{Ai}'((9/8)^{1/2}h_0)]^{-1} = 1,45$. При $h = 0$ из (19) определяем $\psi(0) \approx -1,01$. Подставив $\psi(0)$ и $h = 0$ в (9), получаем $\xi(h=0) \approx 2$.

Примерный ход зависимости $h(\xi)$ представлен на фиг. 1 сплошной кривой. Штриховой линией показана функция $2/9\xi^2$, асимптотическая для $h(\xi)$ при $\xi \rightarrow \infty$. Штрихпунктирной линией изображена зависимость $\psi(h)$.

Выражение для давления газа в пористой среде для условий (4) записывается в виде

$$f = 2\varphi^{-1}\xi^{-2} \{\text{Ai}[(9/8)^{1/2}h]\}^2 \tag{20}$$

На фиг. 2 представлено решение системы уравнений (3) с условиями (4). Штриховая кривая соответствует скорости осесимметричной фильтрации газа $\varphi(\xi)$, сплошной линией показано давление газа в пористой среде.

Асимптотические зависимости скорости движения газа $\varphi(\xi)$ при малых ξ ($\xi \ll 1$) и при больших ξ ($\xi \gg 1$) представляются выражениями (16) и (18).

Поскольку $y^2 (\xi \rightarrow 0) \sim \xi$, то из (20) находим асимптотическое выражение для давления газа в пористой среде при малых ξ , $f \approx \sqrt{2} \xi^{-1/2}$.

Сравним результаты течения газа через пористую среду при квадратичном законе сопротивления для плоского [1] и осесимметричного движения, рассмотренных в настоящей работе. Заметим, что схемы, по которым получены аналитические решения, в двух случаях похожи, хотя конкретные формулы и различаются. Зависимости безразмерной скорости движения и давления газа в пористой среде от ξ при больших ξ ($\xi \gg 1$) имеют одинаковый вид. При малых ξ ($\xi \ll 1$) для осесимметричного течения скорость движения и давление газа в пористой среде стремятся к бесконечности при $\xi \rightarrow 0$, в отличие от постоянных значений для плоской задачи.

Применение подобной схемы к решению автомодельной задачи сферически-симметричного течения газа не позволило найти аналитические выражения для скорости движения и давления газа в пористой среде.

Результаты настоящей работы могут быть применены и к исследованию течения газа (или жидкости) по осесимметричной трещине из скважины [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бондаренко А. Г., Колобашкин В. М., Кудряшов Н. А. Автомодельное решение задачи о течении газа через пористую среду в режиме турбулентной фильтрации. — ПММ, 1980, т. 44, вып. 3, с. 573—577.
2. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.—Л.: Гостехиздат, 1947. 244 с.
3. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
4. Баренблатт Г. И. Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде. — ПММ, 1952, т. 16, вып. 6, с. 679—698.
5. Morrison F. A. Jr. Transient non-Darcy gas flow in a finite porous bed. — Trans. ASME, Ser. I. — J. Fluids Eng., 1977, v. 199, № 4, p. 779—781.
6. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 434 с.
7. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1977. 342 с.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
9. Pitts J. H., Brandt H. Gas flow in a permeable earth formation containing a crack. — Trans. ASME, Ser. E. — J. Appl. Mech., 1977, v. 44, № 4, p. 553—558.

Москва

Поступила в редакцию
19.XI.1980

УДК 532.546

О РАЗЛОЖЕНИИ ГИДРАТА ГАЗА В ПЛАСТЕ

ВЕРИГИН Н. Н.

Рассмотрим полуограниченный пласт, имеющий пористость m и заполненный в начальный момент в объеме $m\beta$ газом, $m\alpha$ — водой и $(1-\alpha-\beta)m$ — газовым гидратом. Преобладающую часть объема пор в пласте занимают гидрат и газ, а вода дисперсно рассеяна в газе в виде капель (влажный газ). При этом предполагается, что начальное давление в пласте P_0 больше давления разложения гидрата при данной температуре $P_*(T)$. Пусть в сечении пласта $x=0$ давление мгновенно снижено от P_0 до $P_c = \text{const}$. Тогда гидрат начнет разлагаться и пласт разделится на зону 1 в пределах $0 < x < l(t)$, где газ в объеме εm и вода в объеме $(1-\varepsilon)m$ движутся по направлению сечения $x=0$, а также зону 2 в пределах $l(t) < x < \infty$, где находятся газ, вода и гидрат в тех же объемах, что и при $t=0$, причем газ и вода движутся в направлении сечения $x=l(t)$. Движущаяся граница $x=l(t)$ отделяет зону 1, в которой закончилось полное разложение гидрата, от остальной части пласта 2, где такое разложение еще не произошло. Эта граница движется противоположно направлению фильтрации газа и воды. Фильтрация влажного газа в зонах 1 и 2 описывается следующими линеаризованными уравнениями [1]:

$$a_i \frac{\partial^2 P_i^2}{\partial x^2} = \frac{\partial P_i^2}{\partial t}; \quad a_i = \frac{2k_i P_*}{\mu_i m_i} \quad (i=1, 2) \quad (1)$$