

угла атаки, обозначаемое  $\varphi$ , является функцией только одного параметра  $K_0$  (или  $K$ ), характеризующего влияние градиента скорости поперечного растекания. На фиг. 3 представлены те же результаты, что и на фиг. 2, но перестроенные в виде зависимости  $\lg \varphi$  от  $K_0$ . Поперечное растекание вызывает утоньшение пограничного слоя на наветренной стороне и утолщение на подветренной, при этом  $\varphi$  возрастает на наветренной стороне и уменьшается на подветренной с ростом абсолютной величины параметра  $K_0$ . В исследованном диапазоне параметров  $\theta$ ,  $M_e$  и  $Re_1$  ( $\theta \leq 15^\circ$ ,  $M_e = 3,3-5,4$ ,  $Re_1 = 13-47$  млн.) увеличение  $\varphi$  на линии растекания с ростом  $K_0$  может быть аппроксимировано экспоненциальным законом  $\varphi = \exp(2,6 K_0)$ .

Предлагаемая формула наилучшим образом описывает результаты измерений, судя по разбросу экспериментальных точек в  $\pm 15\%$  на фиг. 3. Здесь достигнут наименьший разброс точек, поскольку он не может быть ниже погрешности определения числа  $Re_1$ , выражаемой приблизительно такой же величиной.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Stetson K. F., Rushton G. H. Shock tunnel investigation of boundary layer transition at  $M=55$ .— AIAA Journal, 1967, v. 5, № 5, p. 899–906.
2. Mateer G. G. The effect of angle of attack on boundary-layer transition on cones.— AIAA Journal, 1972, v. 10, № 8, p. 1127–1128.
3. Давыдова Н. А., Юшин А. Я. Экспериментальное исследование влияния угла атаки на переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный при обтекании круговых конусов.— Уч. зап. ЦАГИ, 1973, т. 4, № 2, с. 45–53.
4. Колочинский Ю. Ю., Тарасова Т. А., Юшин А. Я. Исследование влияния угла атаки на переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный при обтекании острого кругового конуса в ударной трубе.— В кн.: Аэродинамическое нагревание при сверхзвуковых скоростях потока. М., 1979, № 2003, с. 133–146. (Тр. ЦАГИ).
5. Stetson K. F. Effect of bluntness and angle of attack on boundary-layer transition on cones and biconic configurations.— AIAA Pap., 1979, № 0269, 13 p.
6. Гарбузов В. М., Колина Н. П., Пяглова А. И. Расчет коэффициентов сопротивления трения и теплопередачи пластины и острого конуса, обтекаемого сверхзвуковым потоком, при турбулентном течении в пограничном слое.— В кн.: Аэродинамическое нагревание при сверхзвуковых скоростях. М., 1977, № 1881, с. 67–129. (Тр. ЦАГИ).
7. Авдеевский В. С., Данилов Ю. И., Кошкин В. К., Кутырин И. Н., Михайлова М. М., Михеев Ю. С., Сергеев О. С. Основы теплопередачи в авиационной и ракетной технике. М.: Оборонгиз, 1960, с. 210–212.
8. Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Любимов А. Н., Русанов В. В. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. М.: Наука, 1964, 505 с.
9. Ericsson L. E. Correlation of attitude effects on slender vehicle transition.— AIAA Journal, 1974, v. 12, № 4, p. 523–529.
10. Messiter A. F. Lift of slender delta wings according to Newtonian theory.— AIAA Journal, 1963, v. 1, № 4, p. 794–802.
11. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959, с. 105–111.

Москва

Поступила в редакцию  
20.XI.1980

УДК 532.529.5:533.697.4

#### РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ В СОПЛЕ ЛАВАЛЯ

ИГНАТОВ С. Ф., МИХАТУЛИН Д. С., ЧИРКОВ И. В.

Течение смеси газа с частицами в соплах рассматривается во многих работах, библиография которых представлена в монографиях [1, 2]. Большинство работ посвящены расчету двухфазного течения, причем типичным является использование условия прилипания частиц к стенке сопла в его дозвуковой части [3, 4]. Это означает, что частицы, траектории которых пересекают стенку сопла, из рассмотрения ниже по потоку исключаются.

Такое допущение, справедливое для частиц размером порядка нескольких микрон, не дает возможности объяснить наличие максимума концентрации крупных частиц

размером порядка десятков микрон в области течения, расположенной на некотором расстоянии от оси. Для объяснения этого явления, экспериментально зафиксированного в работе [5], ниже проведен анализ результатов расчета потоков массы частиц полидисперсного состава в сопле Лавала с учетом их отражения от стенки и неравномерного распределения в начальном сечении сопла и сравнение с экспериментальными данными, полученными на газодинамической установке с двухфазным потоком.

1. Расчет двухфазного течения в сопле проводился с использованием модели двух взаимопроникающих сред (газа и частиц) [6]. Основные допущения: газ совершенный, невязкий, нетеплопроводный; вязкость и теплообмен учитываются только при взаимодействии между газом и частицами; частицы не взаимодействуют между собой.

В [6] предполагается также, что частицы сферические, одного размера, однако здесь рассматриваемая модель используется для полидисперсного состава частиц (со «ступенчатой» функцией распределения), при этом решаются уравнения движения для каждой из восьми фракций частиц отдельно.

Так как рассматривается течение газа с малым содержанием частиц, весовая доля которых составляет  $\sim 1\%$ , можно пренебречь не только объемом, занимаемым частицами, но и их механическим и тепловым воздействием на газ. Это упрощает задачу, так как, пользуясь известными численными методами, можно определить газодинамические параметры во всей области течения без учета частиц, а из решения записанной ниже системы обыкновенных дифференциальных уравнений найти значения проекций вектора скорости  $u_s, v_s$  каждой фракции частиц на оси  $x, r$  цилиндрической системы координат

$$u_s du_s - f_x dx = 0, u_s dv_s - f_r dx = 0 \quad (1.1)$$

Здесь  $f_x, f_r$  — соответственно проекции силы взаимодействия на оси координат, отнесенные к единице массы частиц.

Уравнения (1.1) записаны вдоль траектории движения частиц:  $dr/dx = v_s/u_s$ .

Понятие континуума среды частиц проявляется в использовании уравнения неразрывности для каждой фракции частиц

$$\oint_{\gamma} (\rho_s u_s dr - r \rho_s v_s dx) = 0$$

Здесь  $\rho_s$  — пространственная плотность частиц,  $\gamma$  — произвольный замкнутый контур в области течения.

Проекции силы вязкого взаимодействия определяются из выражений:

$$f_x = \frac{3}{4} \frac{C_d}{d_s} \frac{\rho}{\rho_s^{\circ}} |\mathbf{V} - \mathbf{V}_s| (u - u_s)$$

$$f_r = \frac{3}{4} \frac{C_d}{d_s} \frac{\rho}{\rho_s^{\circ}} |\mathbf{V} - \mathbf{V}_s| (v - v_s)$$

Здесь  $u, v, \rho$  — соответственно проекции вектора скорости  $\mathbf{V}$  и плотность газа,  $\rho_s^{\circ}$  — плотность частиц.

Коэффициент сопротивления  $C_d$  сферических частиц можно определить из эмпирических соотношений

$$C_d = \frac{24 (1 + 0,15 \text{Re}^{0,687}) [1 + \exp(-0,427/M^{4,68} - 0,3/\text{Re}^{0,88})]}{\text{Re} (1 + M/\text{Re} [3,82 + 1,28 \exp(-1,25 \text{Re}/M)])}$$

Здесь  $M, \text{Re}$  — числа Маха, Рейнольдса для относительного движения газа и частицы.

Для численного решения уравнений (1.1) используется схема, предложенная в работе [7].

Как показано в [8], в дозвуковой конической части сопла течение газа соответствует течению к стоку, а в трансзвуковой проекции вектора скорости газа можно определить из следующих соотношений:

$$\frac{u}{u_*} = 1 + \left( \frac{2}{\kappa + 1} \frac{r_*}{R} \right)^{0,5} \frac{x}{r_*} + \frac{1}{4} \frac{r^2}{R r_*}$$

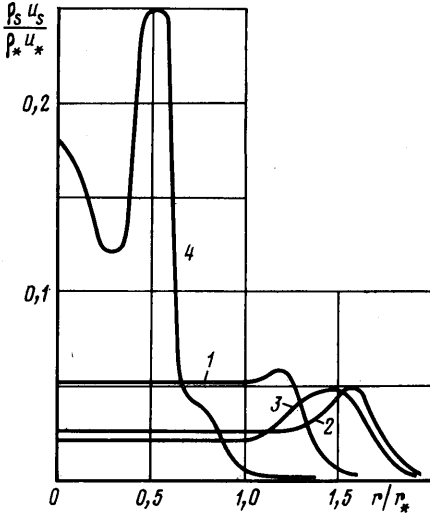
$$\frac{v}{u_*} = \frac{1}{2} \frac{x r}{R r_*} + \frac{1}{4} \left( \frac{\kappa + 1}{2} \frac{r_*}{R} \right)^{0,5} \frac{r^3}{R r_*^2}$$

Здесь  $\kappa$  — показатель адиабаты,  $u_*$  — критическая скорость газа,  $R$  — радиус кривизны трансзвуковой части сопла.

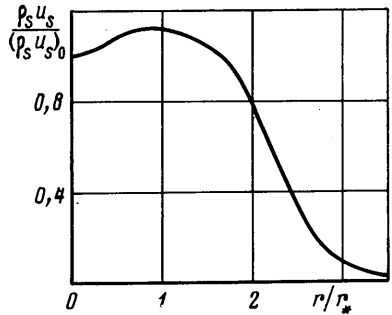
Звуковая линия приближенно аппроксимируется дугой окружности. Координата звуковой точки на оси сопла определяется из выражения

$$\frac{x}{r_*} = \left( \frac{\kappa+1}{32} \frac{r_*}{R} \right)^{0,5}$$

Параметры сверхзвукового течения газа в сопле получены методом сквозного счета по программе [9]. Отличительной особенностью является использование крайевых условий, учитывающих отражение частиц от стенки сопла и возможность



Фиг. 1



Фиг. 2

пересечения ими оси течения. Отраженные от стенки и неотраженные частицы одного размера рассматриваются как разные фракции. В расчетах принимались условия абсолютно упругого, «зеркального» отражения, а также законы взаимодействия с потерей скорости при ударе и различными углами отражения. Точность результатов расчета скорости частиц с использованием приближенного метода определения газодинамических параметров до- и трансзвуковой области сопла составляет  $\sim 4\%$ , что следует из сравнения с результатами расчета двухфазного течения в сопле методом установления по программе А. Н. Крайко и В. И. Копченова [10].

Расчеты проведены для сверхзвукового сопла с числом Маха на входе  $M_0=0,05$  и на срезе  $M_s=3$ . Сопло имеет коническую дозвуковую часть с полууглом раствора  $\alpha=8^\circ$ , сопряженную по дуге окружности радиусом  $R/r_*=26,6$  ( $r_*=30$  мм – радиус критического сечения) с конической сверхзвуковой частью ( $\alpha=6^\circ$ ). Радиус среза сопла  $r_s/r_*=2,3$ . В форкамере приняты следующие параметры газа: температура  $T_0=2300$  К, плотность  $\rho_0=10,5$  кг/м<sup>3</sup>, газовая постоянная  $R=406$  Дж/кг·град, показатель адиабаты  $\kappa=1,25$ .

Расчеты двухфазного течения в сопле проведены для корундовых частиц полидисперсного состава марок М20П и М50П (ГОСТ 3647-71) со средним диаметром соответственно  $d_s=20$  и 50 мкм. Зависимость массовой доли частиц от их диаметра для этих составов микропорошков приведены в таблице. Весовая концентрация частиц в форкамере сопла принималась равной 1%.

Анализ результатов расчета потока массы частиц микропорошка М50П на срезе сопла для случая их равномерного распределения при  $u_s/u=0,2$  в начальном сечении дает возможность явно выделить влияние отраженных от стенки частиц на местное увеличение потока их массы (фиг. 1, кривая 1). При графическом пред-

$d_s$ , мкм	М, %		$d_s$ , мкм	М, %	
	М20П	М50П		М20П	М50П
0–10	10	1	30–40	2	24
10–15	27	1	40–50	–	50
15–20	43	2	50–60	–	14
20–30	18	5	60–80	–	3

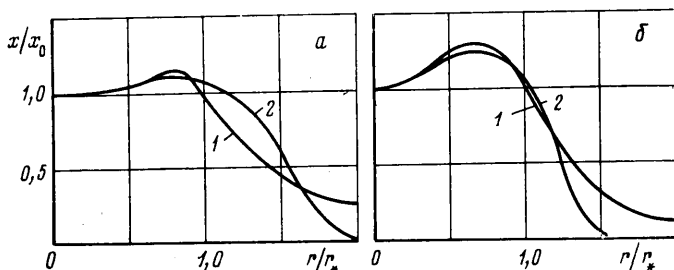
ставлении найденные в расчете ступенчатые профили плотности тока частиц сглаживались.

Ниже представлены результаты расчетов для других сопел, отличающихся меньшим радиусом кривизны в трансзвуковой области течения ( $R/r_* = 1$ ) и меньшим диаметром форкамеры ( $r/r_* = 2$ ).

Уменьшение площади сечения форкамеры приводит к увеличению ширины двухфазной трубки тока на срезе сопла и к большему смещению от оси симметрии точки расположения максимального значения потока частиц (фиг. 1, кривая 2).

Большее значение скорости частиц на входе в сопло ( $u_s/u = 0,9$ ), а следовательно, и высокоскоростное взаимодействие их со стенкой приводят к большему прониканию отраженных частиц внутрь потока, что определяет расширение области течения с повышенным значением плотности потока второй фазы (фиг. 1, кривая 3).

Эффект, связанный с отражением частиц от стенки сопла, может быть настолько большим, что приводит к местному увеличению потока массы как на периферии, так и вблизи оси течения. Это связано с тем, что отраженные частицы не только достигают, но и пересекают ось. Иллюстрацией этому служат результаты расчета потока массы частиц на срезе сопла с углом наклона прямолинейной образующей в дозвуковой части, равным  $45^\circ$  (фиг. 1, кривая 4).



Фиг. 3

Многочисленные расчеты с использованием в качестве граничного условия на стенке различных законов соударения, учитывающих изменение кинетической энергии частиц и угла отражения при ударе, показали, что наибольшее влияние на картину движения частиц по соплу оказывает величина их нормальной к стенке составляющей скорости после взаимодействия, однако изменение этой величины в широком диапазоне значений качественно не меняет распределение параметров второй фазы в двухфазной трубке тока.

2. Практический интерес представляет сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными. В экспериментах на газодинамической установке, формы и размеры сопла которой использовались при проведении расчетов, реализованы приведенные выше параметры состояния газа в форкамере.

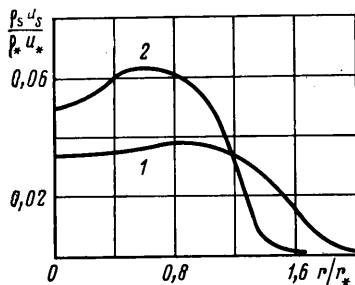
Твердые частицы вводились через форсунки, расположенные в форкамере по концентрическим окружностям. Использовались корундовые порошки марок М20П и М50П. Специально выполненные эксперименты с отбором частиц от каждой форсунки в отдельности показали равномерное распределение расхода частиц между форсунками.

Поток массы частиц  $m$  какой-либо фракции в начальном сечении форкамеры, создаваемый одной форсункой, отнесенный к полному расходу данной фракции порошка через эту форсунку, по радиусу, отнесенному к радиусу критического сечения сопла, можно представить в виде функции расстояния от оси форсунки в виде

$$m(r)/G = A \exp(-Br^2) \quad (2.1)$$

Связь между коэффициентами  $A$  и  $B$  определяется из условий нормировки

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{m(r)}{G} r dr d\varphi = 1$$



Фиг. 4

После этого выражение (2.1) принимает вид

$$m(r)/G = \frac{k^2 \exp(-k^2 r^2)}{\pi}$$

Величина  $k=1,4$  определена на основе анализа экспериментальных данных, причем на нее не оказывает влияние изменение размера частиц.

Просуммировав поток массы для отдельной форсунки по фракциям с массовыми долями порошка  $g_i$ , а также сложив потоки массы от всех форсунок, можно получить распределение потока массы частиц по сечению форкамеры. На фиг. 2 показано распределение потока массы частиц в начальном сечении форкамеры экспериментальной установки, отнесенное к значению потока массы на оси.

Экспериментальные результаты исследования неравномерности параметров частиц М20П и М50П в сечении двухфазной трубки тока представлены соответственно на фиг. 3, а, б (кривая 1) в виде профилей, полученных на пластинах из стеклопластика вследствие их эрозионного разрушения. В эксперименте пластины устанавливались в меридиональном сечении на срезе сопла.

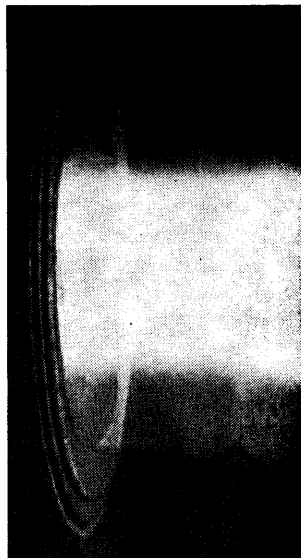
Так как интенсивность эрозионного разрушения стеклопластиков при скорости взаимодействия  $V \geq 1$  км/с прямо пропорциональна величине потока кинетической энергии частиц [11], то профили пластин в эксперименте будут подобны распределениям потоков кинетической энергии второй фазы в сечении двухфазной трубки тока. На этом основании проводится сравнение профилей пластин, представленных в виде функции безразмерной величины  $x/x_0$  от  $r/r_*$  с расчетными распределениями потоков кинетической энергии в виде зависимости  $\rho_s u_s V_s^2 / (\rho_s u_s V_s^2)_0$  от  $r/r_*$  (фиг. 3, кривая 2), где индекс 0 относится к значениям рассматриваемых величин на оси симметрии.

Профиль сопла с малыми углами наклона к оси образующих в до- и сверхзвуковой области течения и большим радиусом сопряжения, на котором проводились эксперименты и для которого проведены расчеты, выбран так, чтобы уменьшить влияние центробежных сил на движение частиц. При этом предполагалось, что в случае отражения частиц от стенки сопла это явление не окажет большого влияния на распределение их пространственной плотности из-за малости угла соударения.

Результаты расчетов для двух составов порошка частиц окиси алюминия М20П и М50П это подтверждают. Изображенные на фиг. 4 распределения потоков массы этих частиц в сечении на срезе сопла (кривые 1 и 2) практически повторяют распределения соответствующих параметров в начальном сечении форкамеры. Отраженные от стенки частицы микропорошков М20П и М50П проникают внутрь двухфазной трубки тока на глубину, составляющую соответственно 10 и 20% ее диаметра на срезе сопла, но мало влияют на распределение потоков массы, так как их концентрация у стенки в начальном сечении форкамеры мала в сравнении с концентрацией в приосевой области.

Диаметр двухфазной трубки тока на срезе сопла оказывается значительно меньше диаметра среза сопла и зависит от размера частиц и интенсивности их отражения от стенки сопла в его дозвуковой части, что следует из экспериментальных данных и совпадающих с ними результатов расчета.

На фиг. 5 показано истечение из сверхзвукового сопла струи, содержащей частицы порошка М20П. Частицы занимают центральную светящуюся область струи, поперечный размер которой в 2 раза меньше диаметра среза сопла.



Фиг. 5

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Стернин Л. Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М.: Машиностроение, 1974, 242 с.
2. Стернин Л. Е., Маслов Б. Н., Шрайбер А. А., Подвысоцкий А. М. Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. М.: Машиностроение, 1980, 175 с.
3. Васенин И. М., Рычков А. Д. Численное решение задачи о течении смеси газа и частиц в осесимметричном сопле Лавалья. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 5, с. 178–181.

4. Гилинский М. М., Симаковский Г. П. Трехмерное двухфазное течение смеси газа с частицами в сопле Лавала. — В кн.: Струйные и отрывные течения. М.: Изд-во МГУ, 1979, с. 51–56.
5. Злобин В. В. Исследование распределения твердой примеси в осесимметричных соплах. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 4, с. 46–50.
6. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами. — ПММ, 1965, т. 29, в. 3, с. 418–429.
7. Рычков А. Д. Об одной разностной схеме, используемой при расчетах неравновесных и двухфазных течений. — В кн.: Газовая динамика. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1977, с. 89–92.
8. Клигель Дж., Никерсон Г. Течение смеси газа и твердых частиц в осесимметричном сопле. — В кн.: Детонация и двухфазное течение. М.: Мир, 1966, с. 183–201.
9. Благосклонов В. И., Иванов М. Я. Алгоритм и программа расчета двухмерных сверхзвуковых течений идеального газа. — Тр. ЦАГИ, 1975, в. 1660, с. 25–54.
10. Копченов В. И., Крайко А. Н. Решение в рамках двухжидкостной модели прямой задачи о двухфазном течении в сопле Лавала. — Науч. тр. Ин-та мех. МГУ, 1974, № 32, с. 96–108.
11. Полежаев Ю. В., Романченков В. П., Чирков И. В., Шебеко В. Н. Расчетная модель процесса эрозионного разрушения композиционного материала. — Инж.-физ. ж., 1979, т. 37, № 3, с. 395–404.

Москва

Поступила в редакцию  
4.X.1980

УДК 532.546

### АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ДВИЖЕНИЯ ГАЗА ЧЕРЕЗ ПОРИСТУЮ СРЕДУ ПРИ КВАДРАТИЧНОМ ЗАКОНЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

КУДРЯШОВ Н. А., МУРЗЕНКО В. В.

Результаты решения автомоделной задачи о плоском течении газа через пористую среду при квадратичном законе сопротивления [1] обобщаются на случай осесимметричного движения. Уравнение в автомоделных переменных для скорости изотермической фильтрации газа приводится к уравнению, решение которого — цилиндрические функции. Получены аналитические зависимости от координаты и времени давления и скорости движения газа при заданном расходе газа в начале координат и при нулевом начальном давлении газа в пористой среде.

Осесимметричное изотермическое движение газа через пористую среду при квадратичном законе сопротивления описывается системой уравнений со следующими начальными и граничными условиями [1–5]:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (Pur) = 0, \quad \frac{Pu^2}{bc^2} + \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

$$P(r, t=0) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} (Pur) = K_0 \quad (2)$$

Второе условие в (2) соответствует заданному при  $r=0$  расходу жидкости или газа. Здесь  $P$  — давление газа в пористой среде,  $u$  — скорость фильтрации газа,  $b$  — коэффициент сопротивления при фильтрации газа,  $c$  — изотермическая скорость звука.

Задача (1)–(2) является автомоделной и в автомоделных переменных имеет вид

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} (\xi \varphi f) = {}^{2/3} \xi \frac{df}{d\xi}, \quad \frac{df}{d\xi} + f\varphi^2 = 0 \quad (3)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} (f\varphi\xi) = 1, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} f(\xi) = 0 \quad (4)$$

Давление и скорость движения газа в пористой среде запишутся в виде

$$P = \frac{K_0}{t^{1/2} (bc^2 t)^{2/3}} f(\xi), \quad u = \left( \frac{bc^2}{t} \right)^{1/2} \varphi(\xi) \quad (5)$$

$$\xi = r(bc^2 t)^{-1/2}$$