**МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА**
**№ 4 · 1982**

УДК 533.6.011.8

# ИНВАРИАНТНО-ГРУППОВЫЕ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

БУНИМОВИЧ А. И., КРАСНОСЛОБОДЦЕВ А. В.

При разработке аналитических методов решения кинетических уравнений целесообразно воспользоваться групповыми методами. Установление группы симметрии дает возможность обоснованно выбрать конкретную модель кинетического уравнения, отвечающую физической постановке задачи, в ряде случаев решить задачу Коши, получить классы новых точных решений, которые могут служить эталонами при построении численных алгоритмов решения кинетических уравнений. Использованию групповых методов для анализа однородного по пространству, изотропного по скоростям уравнения Больцмана для максвелловских молекул посвящены работы [1–6]. Получены точные решения, исследована асимптотика основного уравнения. В настоящей работе групповые методы применены для нахождения и анализа точных решений кинетического уравнения Бхатнагара – Гросса – Крука (БГК-уравнение), успешно моделирующего основные свойства уравнения Больцмана. Сделаны выводы о симметриях уравнения Больцмана. С целью упрощения выкладок изложение проводится для случая одномерного БГК-уравнения с постоянной «эффективной частотой столкновений».

**1. Постановка задачи.** Рассматривается уравнение вида

$$\partial f/\partial t+v\partial f/\partial x=\nu(\Phi-f) \tag{1.1}$$

Здесь $f$ – функция распределения, $\Phi$ – одномерное локально-максвелловское распределение, $\nu$ – «эффективная частота столкновений».

Уравнению (1.1) соответствует бесконечная система моментных уравнений

$$\begin{gathered}
f_k{}^t+kV^tf_{k-1}+Vf_k{}^x+f_{k+1}^x+(k+1)V^xf_k+kV^xVf_{k-1}=\\
=\nu(\Phi_k-f_k),\qquad f_k=\int f(v-V)^k\,dv,\qquad k=0,2,3,4\ldots\\
f_k{}^t=\frac{\partial f_k}{\partial t},\qquad f_k{}^x=\frac{\partial f_k}{\partial x},\qquad V^t=\frac{\partial V}{\partial t},\qquad V^x=\frac{\partial V}{\partial x}\\
\Phi_k=\begin{cases}0, & k=2i-1\\ (2i-1)!!\,(f_2/f_0)^if_0, & k=2i\end{cases}
\end{gathered} \tag{1.2}$$

относительно неизвестных моментов $f_k$ и макроскопической скорости $V(t,x)$.

Нахождение инвариантно-групповых решений уравнения (1.1) проводится с помощью групповых методов [7]. Однако в отличие от методов, разработанных для конечной системы уравнений, в данном случае для каждого из уравнений системы (1.2) вычисляется своя группа, после чего определяется пересечение найденных групп и только затем осуществляется предельный переход при $k\to\infty$. Этот прием применяется с целью получения конечномерной алгебры операторов, которая в рассматриваемом случае является подалгеброй полной алгебры.

Необходимое для нахождения инфинитезимальных координат оператора решение системы определяющих уравнений проводится при значении $\nu=1$, что с групповой точки зрения не приводит к потере общности.

В результате анализа находим, что рассматриваемая система уравнений (1.2) допускает следующую алгебру операторов:

$$u_1=\partial_t, \quad u_2=\sum f_k\partial_{f_k}, \quad u_3=t\partial_x+\partial_V, \quad u_4=\partial_x,$$

$$u_5=x\partial_x+V\partial_V+\sum (k-1)f_k\partial_{f_k} \tag{1.3}$$

Здесь и далее используются обозначения $\partial_z=\partial/\partial z$ для любого $z$.

Дальнейшее исследование проводится с бесконечными моментными операторами, так как при этом в результате определяется эволюция плотности, скорости, температуры и других параметров задачи.

Если требуется найти изменение функции распределения, то предварительно следует проинтегрировать уравнение Ли и получить явное представление допускаемых однопараметрических групп.

В результате анализа приходим к выводу, что оптимальная система подалгебр рассматриваемой задачи имеет следующий вид:

а) $u_1+\gamma u_2$

б) $u_5+\beta u_1+\gamma u_2$

в) $u_3+\alpha u_5+\beta u_1+\gamma u_2$

г) $u_4+\alpha u_2$

**2. Инвариантно-групповые решения.** Рассмотрим последовательно инвариантно-групповые решения, соответствующие приведенным операторам.

*Оператор а)*. Случай $\gamma=0$ соответствует стационарным решениям системы (1.2) и включает, в частности, одномерное максвелловское распределение.

При $\gamma\neq 0$ получается решение вида

$$V=p(x), \quad f_k=\exp(\gamma t)q_k(x) \tag{2.1}$$

В этом случае изменение параметров системы со временем сводится к изменению масштабов у моментов функции распределения.

Подстановка решений (2.1) в исходные уравнения приводит к системе уравнений для определения $p(x)$ и $q_k(x)$, а значит, и для $V(0, x)$, $f_k(0, x)$ (так как $p(x)$, $q_k(x)$ — начальные условия для моментов).

Если известны начальные условия, удовлетворяющие полученным уравнениям, можно определить эволюцию системы во времени.

Уравнения для начальной функции распределения при этом имеют вид

$$f(t, x, v)=\exp(\gamma t)F(x, v); \quad \gamma F+v\partial F/\partial x=\nu(\Phi(F)-F) \tag{2.2}$$

*Оператор б)*. Здесь возможно несколько случаев.

1°. $\beta\neq 0$, $k-1+\gamma\neq 0$, $k=0, 2, 3\ldots$

В этом случае решение имеет вид

$$V=\exp(t\beta^{-1})p[x\exp(-t\beta^{-1})],$$

$$f_k=\exp[(k-1)t\beta^{-1}]q_k[x\exp(-t\beta^{-1})] \tag{2.3}$$

При этом функции $p$, $q_k$ отличны от случая а). Применение тех же символов обеспечивает экономию обозначений, что в данной работе существенно.

Опять эволюция системы сводится к изменению масштабов во времени у пространственной переменной и у искомых функций, а после подстановки решений в (1.2) получается система уравнений для определения начальных условий. Ввиду того что система бесконечна, одну из функций можно задавать достаточно произвольно (важно не выйти из класса допустимой гладкости), после чего другие моменты определяются с точностью до постоянных, которые отражают определенный произвол в зависимости функции распределения от $v$.

2°. $\beta=0,\quad k-1+\gamma\neq0,\quad k=0, 2, 3\ldots$

Решения $V=xp(t)$, $f_k=x^{k-1+\gamma}q_k(t)$ описывают движения типа разлета. Первые моменты могут быть, например, такими

$$f_0=Ct^{-\gamma},\quad \gamma>0;\quad V=xt^{-1}$$

3°. $\beta\neq0$, существует такое $k_0$, что $k_0-1+\gamma=0$.

Тогда имеются решения

$$V=\exp(t\beta^{-1})p[x\exp(-t\beta^{-1})],\quad f_{k0}=q_{k_0}[x\exp(-t\beta^{-1})],$$
$$f_k=\exp[(k-1+\gamma)t\beta^{-1}]q_k[x\exp(-t\beta^{-1})] \tag{2.4}$$

Отличие этого случая от 1° заключается в том, что не изменяется масштаб $f_{k0}$.

4°. $\beta=0$, существует такое $k_0\neq1$, что $k_0-1+\gamma=0$.

Тогда имеются решения вида

$$V=xp(t),\quad f_{k0}=f_{k0}(t),\quad f_k=x^{k-1+\gamma}q_k(t) \tag{2.5}$$

Здесь ситуация аналогична приведенному в книге [8] решению В. С. Галкина для уравнения Больцмана, позволяющему замкнуть систему уравнений для первых $k_0$ моментов (включая скорость), если $k_0\neq0$. Смысл решений аналогичен случаю 2°.

Оператор в). Здесь также приходится различать несколько случаев.

1°. $\alpha=\beta=\gamma=0$

Решения имеют вид $V=x/t+p(t)$, $f_k=q_k(t)$. Для низших моментов они однозначно выписываются в явном виде $f_0=C/t$, $V=x/t+C_1/t$.

При $C_1\neq0$ решение совпадает с приведенным в [8] (для низших моментов).

2°. $\alpha\neq0$, $\beta=\gamma=0$.

Функциональный вид решений имеет вид

$$V=(x+t\alpha^{-1})p(t)-\alpha^{-1},\ f_k=(\alpha x+t)^{k-1}q_k(t) \tag{2.6}$$

После подстановки решений в систему (1.2) получается

$$q_0=\text{const},\quad f_0=C(\alpha x+t)^{-1}$$

Это решение соответствует волне плотности, бегущей с постоянной скоростью; при этом формальных ограничений на скорость волны (или на $\alpha$) нет. Начальный профиль плотности определяется с точностью до постоянного множителя.

3°. $\alpha=\beta=0$, $\gamma\neq0$.

В этом классе движений содержатся движения типа разлета.

Решения (для низших моментов) могут быть, например, такими

$$V=x/t-1/\gamma,\ f_0=C\exp(\gamma xt^{-1}),\ C>0$$

4°. $\alpha\neq0$, $\gamma\neq0$, $\beta=0$.

Здесь возможны два варианта. Если существует такое $k_0\neq1$, что $\gamma+\alpha(k_0-1)=0$, то класс решений запишется в виде

$$V=\alpha^{-1}(\alpha x+t)p(t)-\alpha^{-1},\quad f_{k0}=q_{k0}(t),\quad f_k=(\alpha x+t)^{k-1+\gamma/\alpha}q_k(t) \tag{2.7}$$

Это движение типа разлета. Следует отметить, что разлет как форма движения, конечно, обладает высокой симметрией, и приведенный анализ это подтверждает. Типы разлетов различаются как по начальному состоянию, так и по типу эволюции. Для приведенного конкретного случая система для моментов и скорости замыкается. Если, например, $k_0=2$, следовательно, и $\gamma=-\alpha$, $p=(t+C)^{-1}$. Полагая $C=0$, получим простейший вид разлета

$$V=x/t,\quad f_0=C_1/t,\quad C_1>0$$

Если же такого $k_0$ не существует, то получается обобщение рассмотренного второго случая. Все моменты порядка $k$ будут иметь такой же вид, как в предыдущем случае при $k\neq k_0$.

5°. $\beta\neq0$, $\alpha=\gamma=0$. Получаем решения

$$V=t\beta^{-1}+p(x-2^{-1}t^2\beta^{-1}),\quad f_k=q_k(x-2^{-1}t^2\beta^{-1}) \tag{2.8}$$

которые принадлежат к типу обобщенных бегущих волн.

Начальный профиль для $f_k$ равномерно ускоряется, для $V$ дополнительно к этому осуществляется равномерное движение по оси, соответствующей зависимой переменной. Таких решений много, что видно из первого уравнения после подстановки $q_0p=\text{const}$. В этом смысле это обобщение стационарных решений.

6°. $\beta\neq0$, $\gamma\neq0$, $\alpha=0$.

Решения имеют вид

$$V=t\beta^{-1}+p(x-{}^1/_2t^2\beta^{-1}),\quad f_k=\exp(\alpha\beta^{-1}t)\,q_k(x-{}^1/_2t^2\beta^{-1}) \tag{2.9}$$

Отличие от предыдущего случая состоит в наличии коэффициента затухания (возрастания) у моментов.

Необходимо отметить, что приведенный анализ имеет локальный характер (это касается и других решений).

Интервал существования и устойчивости таких решений в работе не рассматривается.

7°. $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$, $\gamma=0$.

Функциональный вид решений следующий:

$$\begin{gathered}V=\alpha^{-1}\exp(\alpha\beta^{-1}t)\,p[(x+t\alpha^{-1}+\beta\alpha^{-2})\exp(-\alpha\beta^{-1}t)]-\alpha^{-1}\\ f_k=\exp[(k-1)\alpha\beta^{-1}t]\,q_k[(x+t\alpha^{-1}+\beta\alpha^{-2})\exp(-\alpha\beta^{-1}t)]\end{gathered} \tag{2.10}$$

После подстановки решений в систему (1.2) получается система уравнений относительно $p$, $q_k$, а после указанных выше преобразований — система уравнений на начальные условия.

Если начальные данные удовлетворяют полученным уравнениям, то сразу получается закон эволюции системы (конечно, при допущении о локальной разрешимости уравнений).

Если в качестве исходных элементов принять $p$, $q_k$, то эволюция системы заключается в комбинации сдвигов и изменении масштабов.

8°. $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$, $\gamma\neq0$.

Как и в случае 4° пункта б), возможны два варианта. Если $k_0=1-\gamma\alpha^{-1}$, где $\gamma\alpha^{-1}$ — целое число, тогда

$$\begin{gathered}V=\alpha^{-1}\exp(\alpha\beta^{-1}t)\,p[(x+t\alpha^{-1}+\beta\alpha^{-2})\exp(-\alpha\beta^{-1}t)]-\alpha^{-1}\\ f_{k_0}=q_{k_0}[(x+t\alpha^{-1}+\beta\alpha^{-2})\exp(-\alpha\beta^{-1}t)]\\ f_k=\exp[(\gamma+\alpha(k-1))\beta^{-1}t]\,q_k[(x+t\alpha^{-1}+\beta\alpha^{-2})\exp(-\alpha\beta^{-1}t)],\quad k\neq k_0\end{gathered} \tag{2.11}$$

Если такого $k_0$ не существует, то вид всех $f_k$ будет такой же, как при $k\neq k_0$ в приведенном выше случае. Смысл полученных решений аналогичен решениям пункта 7°. Здесь также имеется система дифференциальных уравнений на начальные условия.

*Оператор г).* При $\alpha=0$ получается хорошо известное решение, описывающее релаксацию к равновесному состоянию [9].

При $\alpha\neq 0$ решение принимает вид

$$V=p(t),\ f_k=\exp(\alpha x)\, q_k(t)$$

При подстановке полученных результатов в систему уравнений (1.2) получаются уравнения для $p(t)$, $q_k(t)$, а так как $V(t,\ 0)=p(t)$, $f_k(t,\ 0)=$ $=q_k(t)$, то получается система уравнений для определения граничных условий.

**3. О полной группе уравнения.** Представляет интерес полная группа симметрии системы (1.2). Операторы имеют следующий вид: $u\partial=t^*\partial_t+$ $+x^*\partial_x+V^*\partial_v+\sum f_k^*\partial_{fk}$.

Ниже предполагается, что параметр $\nu$ не обязательно постоянен.

Тогда имеем

$$t^*=C_1t^2+C_5t+C_6,\ x^*=C_1tx+C_2x+C_3t+C_4$$

$$v^*=v((x^*)^x-(t^*)^t)+(x^*)^t$$

$$f_0^*=f_0(C_0-(x^*)^x),\ f_2^*=f_2(2((x^*)^x-(t^*)^t)+C_0-(x^*)^x)$$

$$f_3^*=f_3(3((x^*)^x-(t^*)^t)+C_0-(x^*)^x)-g_3(t)$$

$$f_4^*=f_4(4((x^*)^x-(t^*)^t)+C_0-(x^*)^x)+4g_3v+g_4(t,\ x)$$

Аналогичным образом записываются выражения для $f_k^*$ при $k\geqslant 5$.

Классифицирующее уравнение имеет вид

$$\nu^t t^*+\nu^x x^*+\nu(t^*)^t=0,\qquad \nu g_k+g_k^t-g_{k+1}=0,\qquad k=3,4\dots$$

Видно, что бесконечномерность алгебры операторов возникает начиная с третьего момента. Классифицирующее уравнение дополняется бесконечной системой линейных уравнений, в которую входит параметр $\nu$. Рассмотренная выше алгебра при $\nu=1$ входит естественно подалгеброй в полную алгебру.

Можно брать различные добавки к рассмотренным выше операторам. Например, получить добавочные осциллирующие члены к давлению и высшим моментам, которые изменяют и основное движение, причем так, что высшие моменты несут высшие частоты. Таким образом, можно сказать, что добавочный «квазипериодический» режим для моментов, начиная с третьего, заложен в самой симметрии задачи.

Если же положить $g_k=g_k(t)$ для всякого $k$, то получится $g_k=$ $=C_k\exp(-\nu t)$, $\nu=\mathrm{const}$, что соответствует тому, что БГК-уравнение является однорелаксационным кинетическим уравнением, так как к моментам, начиная с третьего, добавятся члены вида $r_k(t,\ x)\exp(-\nu t)$. Этот результат получен из анализа симметрии задачи.

**4. Об уравнении Больцмана.** Отметим, что проведенное исследование БГК-уравнения в значительной степени может быть использовано и при анализе уравнения Больцмана.

Можно убедиться, что уравнение Больцмана при любом предположении о виде межмолекулярного взаимодействия допускает операторы вида $\partial_t$, $\partial_x$, $\partial_y$, $\partial_z$, $t\partial_x+\partial_{v_1}$.

Кроме того, уравнение допускает оператор (А. А. Никольский), вид которого явно зависит от показателя степенного взаимодействия

$$-t\partial_t+v_1\partial_{v_1}+v_2\partial_{v_2}+v_3\partial_{v_3}+\gamma f\partial_f,\ \gamma=(3n-7)(n-1)^{-1}$$

Для простоты рассматриваем представление через $v_i$, $f$.

Тогда для операторов

$$\partial_y;\ \partial_z;\ t\partial_x+\partial_{v_1}+\beta\partial_x+\delta(-t\partial_t+v_1\partial_{v_1}+v_2\partial_{v_2}+v_3\partial_{v_3}+\gamma f\partial_f)$$

получается вид эволюции для решений уравнения Больцмана

$$f=\frac{1}{t^\gamma}g\left(\frac{\delta v_1+1}{t^{-1}},\frac{v_2}{t^{-1}},\frac{v_3}{t^{-1}},x+\frac{t}{\delta}+\frac{\beta}{\delta}\ln t\right)$$

смысл которого состоит в том, что описывается процесс затухания возмущений с выходом при $t\to\infty$ на постоянные характеристики, т. е. несмотря на то, что рассматривается макроскопический процесс, в параметрах этого процесса явно присутствуют микроскопические параметры.

Из рассмотренного примера следует, что возможность построения для уравнения Больцмана решений указанного вида достаточно широка, ибо приведенные операторы могут образовывать различные комбинации.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Бобылев А. В.* О структуре общего решения и классификации частных решений нелинейного уравнения Больцмана для максвелловских молекул.– Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 6, с. 1361–1365.
2. *Бобылев А. В.* Метод преобразования Фурье в теории уравнения Больцмана для максвелловских молекул.– Докл. АН СССР, 1975, т. 225, № 5, с. 1041–1044.
3. *Бобылев А. В.* О некоторых свойствах уравнения Больцмана для максвелловских молекул.– М., 1975, 29 с. (Препринт ин-та прикл. матем. АН СССР, № 51).
4. *Бобылев А. В.* О точных решениях уравнения Больцмана.– Докл. АН СССР, 1975, т. 225, № 6, с. 1296–1299.
5. *Krook M., Wu T. T.* Formation of Maxwellian tails.– Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, № 19, p. 1107–1113.
6. *Krook M., Wu T.* Exact solutions of the Boltzmann equation.– Phys. Fluids, 1977, v. 20, № 10, p. 1589–1595.
7. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, 399 с.
8. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.
9. *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.XII.1980