

УДК 532.2+532.5.013.4

РАВНОВЕСНЫЕ ФОРМЫ И УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАЮЩИХСЯ КАПЕЛЬ

АРХИПОВ В. А., БУШЛАНОВ В. П., ВАСЕНИН И. М.,
РУСАКОВ В. В., ТРОФИМОВ В. Ф.

Классическая проблема определения равновесных форм вращающихся капель и их устойчивости возникла после опытов Ж. Плато по вращению капли масла в водно-спиртовом растворе [1]. Теоретически осесимметричные формы равновесия вращающихся капель исследовались рядом авторов [2-4]. Было найдено, что эти формы образуют семейство единственного параметра $\Sigma = \rho \omega^2 r_m^3 / (8\sigma)$, где ρ , σ — плотность и коэффициент поверхностного натяжения жидкости, ω — угловая скорость, r_m — экваториальный радиус вращающейся капли. С. Чандрасекхар показал, что осесимметричные формы становятся неустойчивыми в случае вращающихся капель идеальной жидкости при $\Sigma > \Sigma_{1*} = 0,8440$ [4]. Он высказал также предположение, что в случае вязкой жидкости при $\Sigma = \Sigma_{2*} = 0,4587$ от последовательности осесимметричных форм может ответвляться последовательность пространственных форм равновесия, подобно тому, как в теории гравитирующих вращающихся масс последовательность эллипсоидов Якоби ответвляется от последовательности сфероидов Маклорена. В работе [5] задача об устойчивости равновесных осесимметричных форм решена путем исследования достаточных условий минимума потенциальной энергии вращающейся капли и показана неустойчивость этих форм при $\Sigma > \Sigma_{2*} = 0,4587$. В статье [6] методом вириала изучены декременты затухания и нарастания амплитуды как для затухающих колебаний, так и для колебаний тороидальной моды, приводящих к неустойчивости вращающейся осесимметричной капли вязкой жидкости при $\Sigma > \Sigma_{2*}$.

В данной работе прямыми вариационными методами получены неосесимметричные равновесные формы вращающейся капли. Приведены результаты экспериментов по взаимодействию свободно летящих капель вязкой жидкости. Доказано, что от последовательности осесимметричных форм ответвляется последовательность пространственных форм, подобных эллипсоидам, если безразмерный момент количества движения системы $\Omega > 3,4$. Изучена устойчивость таких форм в схеме Пуанкаре.

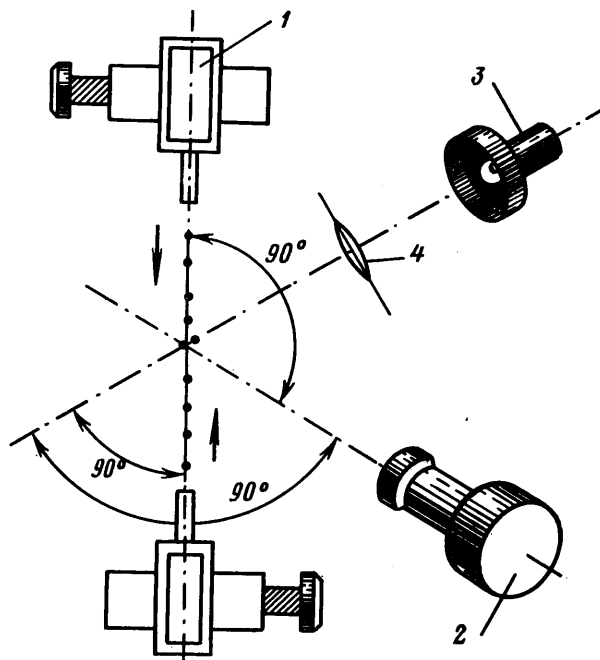
1. Экспериментальное исследование. В экспериментах вращающиеся капли получали в результате столкновения и слияния двух летящих навстречу друг другу капель. При столкновениях, отличных от центрального, образованная капля приобретает вращательное движение, так как при этом система двух сталкивающихся капель обладает моментом количества движения M . В системе координат, начало которой находится в центре масс системы сталкивающихся капель, величина M может быть определена еще до столкновения по формуле

$$M = (r_1 \times u_1) m_1 + (r_2 \times u_2) m_2 \quad (1.1)$$

Здесь m_1, m_2 — массы сталкивающихся капель, u_1, u_2 — векторы скорости капель, r_1, r_2 — радиус-векторы центров масс капель.

Параметры сталкивающихся капель выбирались таким образом, чтобы времена затухания колебаний и времена нарастания амплитуды в случае потери устойчивости, вычисленные по результатам работы [6], были на много меньше времени нахождения капель в поле съемки. Тем самым обеспечивалось наблюдение установившихся равновесных форм вращающихся капель, а не промежуточных нестационарных конфигураций.

Эксперименты проводились по установке (фиг. 1), состоящей из двух генераторов 1, создающих встречные потоки монодисперсных капель, радиусы которых r_1, r_2 можно изменять в диапазоне от $0,2 \cdot 10^{-3}$ м до $0,4 \cdot 10^{-3}$ м. Исследовались столкновения каплей водно-глицериновой смеси плотностью $\rho = 1,23 \cdot 10^3$ кг·м $^{-3}$, вязкостью η в диапазоне от $15 \cdot 10^{-2}$ кг·м $^{-1}$ ·с $^{-1}$ до $50 \cdot 10^{-2}$ кг·м $^{-1}$ ·с $^{-1}$ и поверхностным натяжением $\sigma = 67 \cdot 10^{-3}$ Н·м $^{-1}$. Относительные скорости сталкивающихся каплей менялись в диапазоне от 3 м·с $^{-1}$ до 8 м·с $^{-1}$. С целью получения пространственной картины съемка велась двумя кинокамерами СКС-1м 2, расположенными под прямым углом друг к другу и перпендикулярно потокам каплей. Темп съемки составлял 1500–3000 кадров в секунду. Поле съемки освещалось фотолампами 3 с фокусирующей системой 4, обеспечивающей проведение киносъемки теньвым методом. (На фиг. 1 показана по-



Фиг. 1

ловина симметричной относительно потока каплей оптической части установки). Полученные пары кинограмм процесса взаимодействия каплей обрабатывались на дешифраторе совместно. Фактическое время установления равновесной формы каплей составляло 1–8 мс; капли же находились в поле съемки до 50 мс.

Равновесные формы вращающейся капли исследовались в зависимости от безразмерного момента количества движения

$$\Omega = \frac{|M|}{\sqrt{\rho \sigma} r_0^{3/2}}, \quad r_0 = (r_1^3 + r_2^3)^{1/3} \quad (1.2)$$

где r_0 — радиус сферической капли, имеющей тот же объем, что и исследуемая.

При столкновениях возможны либо слияние, либо дробление каплей. В случае слияния первоначально бесформенная конфигурация капли в течение нескольких миллисекунд приобретает устойчивую равновесную форму. Слившиеся капли почти всегда вращались. В зависимости от величины Ω наблюдались две характерные фигуры равновесия. При $\Omega < \Omega_{*} \approx 3,4 \pm 0,5$ вращающаяся капля после установления приобретала форму, близкую к эллипсоиду вращения. На фиг. 2, а приведены кадры кинограммы для

данного типа взаимодействия при следующих значениях безразмерных критериев: $We=202$, $Re=16,7$, $\Omega=3,0$. (Времена от начала процесса взаимодействия капель приведены на фиг. 2 в миллисекундах; сверху показан линейный масштаб — 1 мм.) В случаях слияния с $\Omega > \Omega_{2*}$ первоначальная конфигурация очень быстро (за время $\sim 1-2$ мс) приобретала неосесимметричную форму, напоминающую трехосный эллипсоид. Данный тип взаимодействия показан на фиг. 2, б ($We=155$, $Re=15,2$, $\Omega=4,5$). После установления, протекавшего за время 3–6 мс, эта фигура вращалась в поле съемки вокруг своей короткой оси без заметного изменения формы. При больших значениях Ω получились более вытянутые эллипсоиды.

Для осесимметричных фигур равновесия параметр $\Omega=3,4$, начиная с которого в экспериментах наблюдались неосесимметричные равновесные формы, соответствует параметру $\Sigma=0,43$. Сравнение этой величины с $\Sigma_{2*}=0,4587$ наводит на мысль об экспериментальном подтверждении гипотезы С. Чандрасекхара, предположившего ветвление равновесных форм капель при $\Sigma > \Sigma_{2*}$ [4].

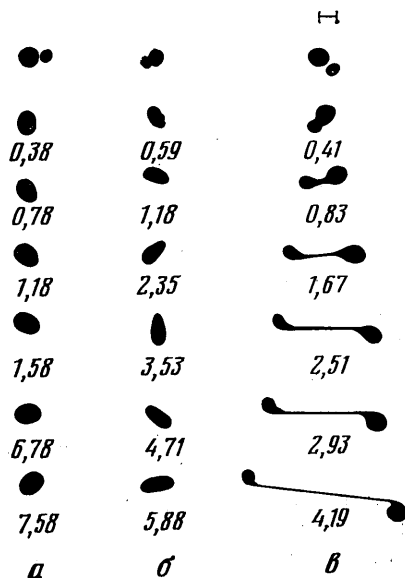
В случаях столкновений с параметром $\Omega > \Omega_{1*} \approx 6 \pm 0,9$ наблюдались только дробления капель. На фиг. 2, в приведена характерная картина столкновения, закончившегося дроблением ($We=149$, $Re=15,9$, $\Omega=12,2$). В результате дробления наблюдались два мелких осколка, соизмеримых с исходными каплями, и три — четыре мелких, образующихся в результате распада перемычки, соединяющей капли в процессе дробления. Почти при всех дроблениях крупные осколки вращались.

Границы слияния и дробления капель изучались в зависимости от безразмерных критериев

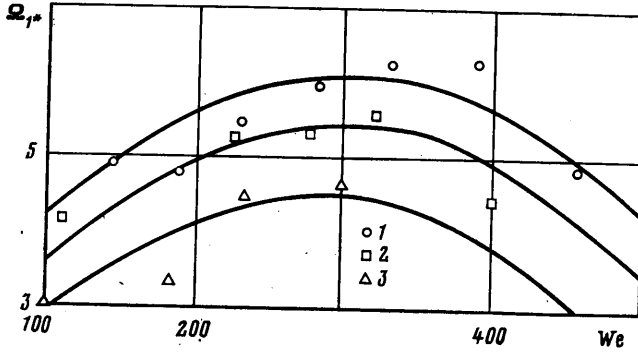
$$\Omega, \gamma = \frac{r_2}{r_1}, \quad Re = \frac{\rho |u_1 - u_2| 2r_1}{\eta}, \quad We = \frac{\rho |u_1 - u_2| 2r_1}{\sigma}$$

Предполагалось, что $r_2 > r_1$. В экспериментах эти критерии менялись в следующих диапазонах: $1 < \gamma < 2,5$; $10 < Re < 25$; $80 < We < 500$; $0 < \Omega < 20$. Заметной зависимости процессов слияния и дробления капель от Re в исследованном диапазоне обнаружено не было. Поэтому граница, отделяющая область слияния от области дробления капель, искалась в виде $\Omega_{1*} = f(We, \gamma)$. Результаты экспериментального исследования этой зависимости приведены на графике (фиг. 3). При $\Omega > \Omega_{1*}$ имело место дробление капель, при $\Omega < \Omega_{1*}$ — слияние. Здесь кривые $\Omega_{1*}(We)$ приведены для $\gamma=1,1$ (1); $\gamma=1,4$ (2) и $\gamma=2,05$ (3).

3. Доказательство существования неосесимметричных равновесных форм вращающихся капель и исследование их устойчивости. С целью теоретической проверки гипотезы С. Чандрасекхара была предпринята попытка рассчитать предполагаемые фигуры равновесия прямыми методами вариационного исчисления. Рассмотрим задачу о нахождении равновесных форм вращающейся капли, удерживаемой в равновесии силами поверхностного



Фиг. 2



Фиг. 3

натяжения. Известно, что равновесная форма доставляет минимум функционалу полной энергии U в системе координат, где капля находится в абсолютном покое [5]. Тогда задача формулируется следующим образом.

Найти минимум функционала

$$U = \sigma S + \frac{|M|^2}{2I}, \quad |M| = \text{const}, \quad V = \text{const} \quad (2.1)$$

Здесь S , V , I — площадь поверхности, объем и момент инерции капли относительно ее оси вращения. В первом приближении равновесная поверхность аппроксимировалась трехосным эллипсоидом с полуосями A , B , C . Полуоси искали из условия минимума функционала (2.1), который в данном случае будет просто функцией длин полуосей. Перейдем к безразмерным величинам:

$$a = \frac{A}{r_0}, \quad b = \frac{B}{r_0}, \quad c = \frac{C}{r_0}, \quad s = \frac{S}{r_0^2}, \quad v = \frac{V}{r_0^3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$i = \frac{I}{\rho r_0^5}, \quad u = \frac{U}{\sigma r_0^2}, \quad \Omega = \frac{|M|}{\sqrt{\rho \sigma} r_0^{7/2}}$$

При этом (2.1) примет вид

$$u = s + \frac{\Omega^2}{2i}, \quad \Omega = \text{const}, \quad v = \frac{4\pi}{3} = \text{const}$$

Будем считать, что вращение происходит вокруг оси c и что $a \geq b \geq c$. В противном случае имели бы $a < c$ (или $a < b$) и, сделав a (или b) осью вращения, получили форму, обладающую такой же поверхностью s , что и первоначальная, но с большим i и, следовательно, при одинаковых Ω имели бы меньшее значение u . Для эллипсоида имеем

$$abc = 1, \quad i = \frac{4\pi}{15} (2 - e_1 - e_2) q^{-7/2}$$

$$s = 2\pi q^{-1/2} \left(q^{1/2} + \frac{1 - e_1}{\sqrt{e_1}} F + \sqrt{e_1} E \right)$$

$$e_1 = 1 - \frac{c^2}{a^2}, \quad e_2 = 1 - \frac{c^2}{b^2}, \quad q = (1 - e_1)(1 - e_2)$$

$$F = \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 x}}, \quad E = \int_0^y \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx$$

$$k = \left(\frac{e_2}{e_1} \right)^{1/2}, \quad y = \arcsin \sqrt{e_1}$$

Область определения D функции $u(e_1, e_2, \Omega)$ получили из условия $a \geq b \geq c$: $D = \{e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_1 - e_2 \geq 0\}$. Граница области $e_1 = e_2$ соответствует сжатым сфероидам, а $e_2 = 0$ — случаю $c = b$. Поиск точки (e_1, e_2) , доставляющей минимум u при данном Ω в области D , осуществляется из необходимых условий экстремума

$$\frac{\partial u}{\partial e_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial e_2} = 0 \quad (2.2)$$

Оказалось, что для $\Omega < 3,45$ существуют два решения системы (2.2). Одно решение (точка) лежит на границе $e_1 = e_2$, а другое — на линии $e_2 = 0$ и находятся соответственно из уравнений

$$\Omega^2 = \frac{16\pi^2}{15} \frac{(1-e_1)^{3/2}}{e_1} \left[\frac{3-e_1}{1-e_1} - \frac{3+e_1}{2\sqrt{e_1}} \ln \frac{1+\sqrt{e_1}}{1-\sqrt{e_1}} \right] \quad (2.3)$$

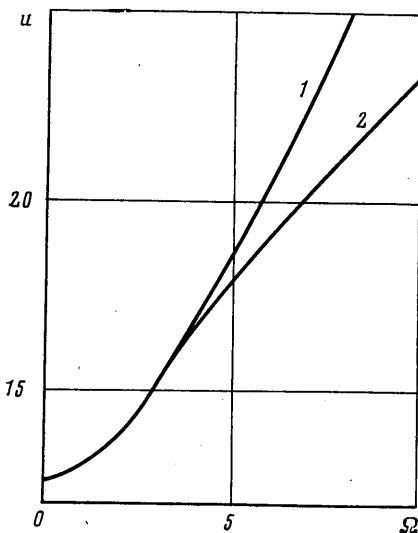
$$\Omega^2 = \frac{8\pi^2}{5} \frac{(2-e_1)^2}{1+e_1} (1-e_1)^{3/2} \left[\frac{1}{\sqrt{1-e_1}} \left(\frac{1}{e_1} - \frac{2}{3} \right) + \frac{4e_1-3}{3e_1(1-e_1)} \frac{\arcsin \sqrt{e_1}}{\sqrt{e_1}} \right] \quad (2.4)$$

Для $\Omega > 3,45$ существует три решения (2.2). Два решения также определяются из (2.3) и (2.4). Третье решение (точка) лежит внутри области D . Оно получено численно из (2.2) и приведено в таблице

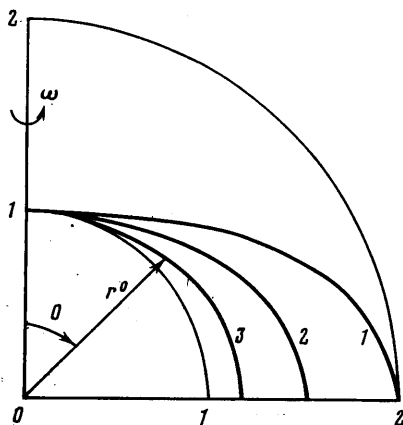
Ω	e_1	e_2	a	b	c	u
3,4427	0,5453	0,51	1,1547	1,1123	0,7786	15,6544
3,5074	0,6173	0,44	1,2505	1,0337	0,7736	15,7577
3,5533	0,6464	0,41	1,2951	1,0026	0,7701	15,8306
3,6122	0,6745	0,38	1,3424	0,9727	0,7659	15,9234
3,7183	0,7118	0,34	1,4127	0,9334	0,7583	16,0888
3,9959	0,7756	0,27	1,5614	0,8658	0,7397	16,5111
4,4530	0,8370	0,20	1,7637	0,7962	0,7121	17,1772
4,9866	0,8797	0,15	1,9717	0,7417	0,6838	17,9133
5,6641	0,9131	0,11	2,2146	0,6918	0,6527	18,7923
5,8931	0,9213	0,10	2,2932	0,6780	0,6432	19,0770
6,1522	0,9293	0,09	2,3806	0,6636	0,6330	19,3920
6,4658	0,9374	0,08	2,4844	0,6478	0,6213	19,7641
7,2965	0,9534	0,06	2,7510	0,6123	0,5936	20,7049
8,6599	0,9692	0,04	3,1694	0,5675	0,5560	22,1294
9,8424	0,9774	0,03	3,5182	0,5372	0,5291	23,2661

Для проверки достаточных условий минимума были численно получены линии уровня функции u в области D для различных Ω . Оказалось, что минимум для $\Omega < 3,45$ (что соответствует $\Sigma < 0,4587$) реализуется на границе $e_1 = e_2$ и определяется из (2.3). Для $\Omega > 3,45$ точки минимума лежат внутри области D и могут быть получены из таблицы. Можно отметить, что полученные здесь сфероиды для $\Omega < 3,45$ мало отличаются от истинных равновесных форм, найденных в [2].

На фиг. 4 приведена зависимость полной энергии u от безразмерного момента Ω для осесимметричных равновесных форм (1), найденных в [2], и для трехосных эллипсоидов (2). Из графика видно, что при $\Omega > 3,45$ полная энергия трехосных эллипсоидов меньше, чем полная энергия осесимметричных фигур и, следовательно, при наличии диссипации трехосные фигуры предпочтительнее осесимметричных.



Фиг. 4



Фиг. 5

Рассмотрим следующее приближение. Точные трехмерные фигуры равновесия находятся методом локальных вариаций [7]. Переформулируем изопериметрическую задачу (2.1) к более удобной для численной реализации форме. Уравнение поверхности капли $r(\theta, \varphi)$ будем искать в сферической системе координат, вращающейся вместе с каплей (ось $\theta=0$ направлена по оси вращения). Перейдем к безразмерным переменным, отнеся все линейные размеры к некоторому масштабу z_m . При этом (2.1) примет вид

$$U = \sigma z_m^2 s^\circ + \frac{|M|^2}{2\rho i^\circ z_m^5}, \quad v^\circ z_m^3 = \text{const}, \quad |M| = \text{const} \quad (2.5)$$

$$s^\circ = \frac{S}{z_m^2}, \quad v^\circ = \frac{V}{z_m^3}, \quad i^\circ = \frac{I}{\rho z_m}, \quad r^\circ(\theta, \varphi) = \frac{r(\theta, \varphi)}{z_m} \quad (2.6)$$

Произвольная вариация δr° не сохраняет заданного объема V . Поэтому после каждой вариации δr° произведем изменение масштаба на величину δz_m , такую, чтобы объем V в результате двух последовательных вариаций не изменился. Для этого, очевидно, в силу (2.6) нужно взять $\delta z_m = \delta(V/v^\circ)^{1/3}$ при $V = \text{const}$. Тогда вариация полной энергии будет иметь вид

$$\delta U = \sigma z_m^2 \delta s^\circ - \frac{|M|^2}{2(i^\circ)^2 \rho z_m^5} \delta i^\circ + \sigma s^\circ 2 z_m \delta z_m - 5 \frac{|M|^2}{2i^\circ \rho z_m^6} \delta z_m \quad (2.7)$$

Нетрудно видеть, что (2.11) есть первая вариация функционала

$$U = \sigma \left(\frac{V}{v^\circ} \right)^{2/3} s^\circ + \frac{|M|^2}{2(V/v^\circ)^{5/3} i^\circ \rho} \quad (2.8)$$

Выберем в качестве масштаба $z_m = r(0, \varphi)$. Таким образом, изопериметрическая задача (2.5) свелась к следующей. Найти поверхность $r^\circ(\theta, \varphi)$, доставляющую минимум функционалу (2.8), в котором $|M|$ и V — заданные постоянные, а $r^\circ(0, \varphi) = 1$.

Поверхность $r^\circ(\theta, \varphi)$ ищется в классе поверхностей, имеющих три плоскости симметрии. Поэтому решение ищется в области $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Для численной реализации метода локальных вариаций поверхность задается набором чисел

$$r_{ij} = r^\circ(\theta_i, \varphi_j), \quad i=0, 1, \dots, n_i; \quad j=0, 1, \dots, n_j$$

Интегралы, через которые выражаются $v^\circ, s^\circ, i^\circ$, вычисляются с помощью приближенных методов. В качестве начального приближения $r_{ij}^{(0)}$ использовались точки, взятые на поверхностях трехосных эллипсоидов, приведенные в таблице. Затем вы-

бирался параметр h и следующее приближение полагалось $r_{ij}^{(1)} = r_{ij}^{(0)} + h$ или $r_{ij}^{(1)} = r_{ij}^{(0)} - h$, если при этом значение правой части (2.8) уменьшалось; в противном

случае полагалось $r_{ij}^{(1)} = r_{ij}^{(0)}$. После нахождения первого приближения процесс повторяется до тех пор, пока во всех точках не выполнится равенство $r_{ij}^{(n+1)} = r_{ij}^{(n)}$.

Числа $n_i = n_j = 20$ и параметр h подбирались при $\Omega < 3,45$, так как в этом случае известна точная фигура, полученная в [2]. На фиг. 5 приведены сечения равновесной фигуры плоскостями $\varphi = \text{const}$, проходящими через ось вращения при $\Omega = 4$ ($v^\circ = 1,097$). Здесь сечение 1 соответствует $\varphi = 0$, сечение 2 — $\varphi = \pi/4$, сечение 3 — $\varphi = \pi/2$. Заметим, что полученные фигуры очень мало отличаются от эллипсоидов.

Устойчивость трехмерных фигур равновесия изучалась по схеме Пуанкаре. Задача об устойчивости равновесной формы вращающейся жидкости для случая Пуанкаре сводится к нахождению при постоянном моменте количества движения таких параметров задачи, при которой обращается в нуль вторая вариация функционала полной энергии (2.1) [5]: $\delta^2 U = 0$.

Это равенство выполняется [5], если обращается в нуль наименьшее собственное значение задачи

$$-\Delta N + \kappa N + \frac{\rho}{\sigma} \frac{|\mathbf{M}|^2}{I^3} (\delta I) r^2 \sin^2 \theta + \mu = \lambda N \quad (2.9)$$

$$\int_s N dS = 0, \quad \int_s N^2 dS = 1$$

Здесь N — возмущение равновесной поверхности, Δ — оператор Лапласа — Бельтрами, δI — первая вариация момента инерции капли, μ — константа.

В сферической системе координат r, θ, φ , центр которой совпадает с центром масс капли, а ось $\theta = 0$ направлена по оси вращения,

$$\Delta N = \frac{1}{W} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{GN_\theta' - FN_\varphi'}{W} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{EN_\varphi' - FN_\theta'}{W} \right) \right]$$

$$\kappa = \frac{\rho |\mathbf{M}|^2}{2\sigma I^2} \frac{\partial}{\partial n} (r^2 \sin^2 \theta) - \left(\frac{EN_0 - 2FM_0 + GL_0}{W} \right)^2 + 2 \frac{L_0 N_0 - M_0^2}{W}$$

$$W = \sqrt{EG - F^2}, \quad E = (r_\theta')^2 + r^2, \quad G = (r_\varphi')^2 + r^2 \sin^2 \theta, \quad F = r_\theta' r_\varphi'$$

$$N_0 = \frac{r \sin \theta}{\sqrt{W}} (r_{\theta\theta}'' r - 2(r_\theta')^2 + r_\theta' r \sin \theta \cos \theta - r^2 \sin^2 \theta)$$

$$L_0 = \frac{r \sin \theta}{\sqrt{W}} (r r_{\theta\theta}'' - 2(r_\theta')^2 - r^2)$$

$$M_0 = \frac{r}{\sqrt{W}} (r_{\theta\varphi}'' r \sin \theta - 2r_\theta' r_\varphi' \sin \theta - r_\varphi' r \cos \theta)$$

где $E, G, F; N_0, L_0, M_0$ — коэффициенты первой и второй квадратичных форм, $\partial/\partial n$ — оператор дифференцирования по нормали к равновесной поверхности.

Наименьшее собственное значение λ задачи (2.9), вычислялось по методу Бубнова — Галеркина. Вид и число базисных функций подбирались с помощью задачи об определении границы устойчивости осесимметричных форм равновесия капли, которая была решена ранее в точной постановке [8]. Наилучший результат был получен для функций вида $Y_n = r^n \sin^n \theta \cdot \cos 2\varphi$. Использование всего четырех таких функций, взятых при $n=2, 3, 4, 5$, позволило получить границу устойчивости осесимметричных форм равновесия $\Omega_{2*} = 3,411$, совпадающую с результатами работы [8].

При исследовании устойчивости трехмерные равновесные формы аппроксимировались эллипсоидами. Чтобы оценить влияние такой аппроксимации на результат вычисления границы устойчивости, осесимметричные формы капли также аппроксимировались эллипсоидами вращения. Ошибка в определении Ω_{2*} составила в этом случае 2%.

Исследование трехмерных форм равновесия в схеме Пуанкаре показало, что они неустойчивы при $\Omega > \Omega_{1*} \approx 5,23$. Косвенным подтверждением этого результата являются описанные выше эксперименты по изучению столкновений капель, в которых вращающиеся капли при $\Omega \geq \Omega_{1*} = 6 \pm 0,9$ не наблюдались.

ЛИТЕРАТУРА

1. Plateau J. Statique experimentale et théoretique des liquides, soumis aux seules forces moléculaires. Paris: Goutier — Villars, 1873, v. 1–2 (v. 1–450 с., v. 2–495 с.).
2. Анпель П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. М.—Л., 1936. 375 с.
3. Sperber D. Equilibrium configuration and fission barrier for liquid drop nuclei with high angular momentum.— Phys. Rev., 1963, v. 130, № 1, p. 468–477.
4. Chandrasekhar S. The stability of a rotating liquid drop.— Proc. Roy. Soc., London, ser. A, 1965, v. 286, № 1404, p. 1–26. (Рус. пер. Чандрасекхар С. Механика, 1966, № 5).
5. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976. 504 с.
6. Бушланов В. П., Васенин И. М. Устойчивость вращающейся вязкой капли.— В кн.: Теплофизика и физ. гидродинамика, Новосибирск, 1978, с. 9–14.
7. Черноуцко Ф. Л. Метод локальных вариаций для численного решения вариационных задач.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 4, с. 749–754.
8. Беллева М. А., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых силовых полях — В кн.: Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости. М.: ВЦ АН СССР, 1968, с. 5–68.

Томск

Поступила в редакцию
7.VII.1980