

УДК 533.6.011.72

ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛАБОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА КРЫЛО СЛОЖНОЙ ФОРМЫ В ПЛАНЕ ПРИ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

НИШТ М. И., ПОЛОВКОВ А. Ф., ПОПЫТАЛОВ С. А.

Излагается метод расчета сверхзвуковых распределенных и суммарных аэродинамических характеристик крыла сложной формы в плане, в том числе имеющего вид летательного аппарата в плане, при набегаии на него произвольно ориентированной слабой ударной волны. Задача решается в линейной постановке.

Ранее задача воздействия слабой ударной волны на несущую поверхность при сверхзвуковых скоростях рассматривалась для пластины бесконечного размаха в [1, 2] и крыла конечного размаха в [3].

Метод расчета аэродинамических характеристик летательного аппарата [4] обобщается на случай взаимодействия с ним произвольно ориентированной слабой ударной волны. Используется подход, когда вначале решается краевая задача для ступенчатого изменения кинематических параметров во времени (получение переходных функций), а переход к произвольным зависимостям от времени осуществляется с помощью интеграла свертки [5].

1. Постановка задачи. Рассматривается движение летательного аппарата в идеальной среде с постоянной сверхзвуковой скоростью U_0 с углом атаки $\alpha=0$. Пусть на летальный аппарат набегаает со скоростью $V \geq a_\infty$ (a_∞ — скорость звука) произвольно ориентированная слабая ударная волна с заданными параметрами потока за плоским фронтом. Ставится задача о нахождении возмущенного летательным аппаратом давления P .

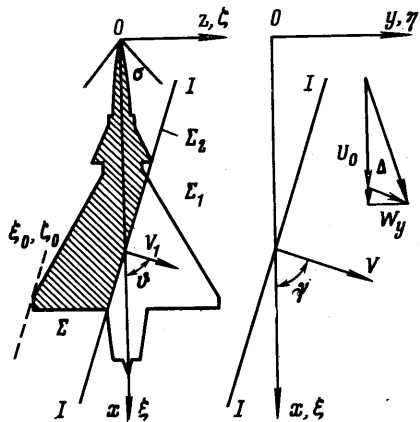
Летательный аппарат схематизируется базовой поверхностью в плоскости xz в системе координат xuz , связанной с летательным аппаратом (фиг. 1). Различаем следующие области: базовую поверхность летательного аппарата S ; вихревую пелену Σ , сходящую с летательного аппарата; невозмущенную область Σ_1 ; фронт ударной волны Σ_2 ; возмущенную область σ вне базовой поверхности и вихревой пелены.

Вводим обозначения: b_a — средняя аэродинамическая хорда, t — текущее время с момента первого касания летательного аппарата фронтом ударной волны, $P_{1,2}$ — давление соответственно на нижней и верхней сторонах базовой поверхности, ρ_∞ — плотность невозмущенного газа, Φ — потенциал скорости.

Безразмерные переменные запишем:

$$\xi = \frac{x}{b_a}, \quad \eta = \frac{y}{b_a}, \quad \zeta = \frac{z}{b_a}, \quad \tau = \frac{U_0 t}{b_a}$$

$$V^* = \frac{V}{U_0}, \quad \Delta p = \frac{2(P_1 - P_2)}{\rho_\infty U_0^2}, \quad \varphi = \frac{\Phi}{U_0 b_a}$$



Фиг. 1

где ξ, η, ζ — координаты, τ — время, V^* — скорость движения фронта ударной волны, Δp — нагрузка на базовой поверхности, φ — потенциал скорости.

Положение фронта в выбранной системе координат характеризуется углом γ между вектором скорости фронта и плоскостью $\xi\zeta$ ($0 \leq \gamma \leq \pi/2$) и углом θ между проекцией V_1 вектора скорости V на плоскость $\xi\zeta$ и осью ξ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$). Положительное значение угла θ показано на фиг. 1.

Интенсивность воздействия ударной волны будем характеризовать дополнительным углом атаки Δ , который с линейной точностью равен W_y/U_0 (W_y — проекция скорости потока за ударной волной на ось y). Накладывается условие линеаризации: $\Delta \ll 1$.

Задача решается при следующих граничных условиях: на S выполняется условие непротекания; на вихревой пелене Σ отсутствует перепад давления; на дозвуковых задних кромках выполняется условие Чаплыгина — Жуковского; в областях σ и Σ , за исключением мест расположения скачков уплотнения, непрерывны производные давления $\partial p / \partial \eta$.

Возмущенное давление p удовлетворяет волновому уравнению

$$(1-M^2) \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial \zeta^2} + 2M \frac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial \tau} - M^2 \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} = 0 \quad (1.1)$$

Решение волнового уравнения (1.1) запишем в виде [4]

$$\Delta p(\xi, \eta, \zeta, \tau) = -\frac{1}{\pi} \iint_{s+\sigma+\Sigma} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial p}{\partial \eta_1} \right)_T dS - \frac{2}{\pi} \int_{l_1-l_3} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_1} \right)_T d\xi_1 - \frac{2}{\pi} \int_{l_2-l_4} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_1} \right)_T d\xi_1 \quad (1.2)$$

$$\tau_{1,2} = \tau - \Delta \tau_{1,2} - \Delta \tau_3, \quad \Delta \tau_1 = \frac{M^2}{K^2} \left(\xi - \xi_1 - \frac{R}{M} \right) \quad (1.3)$$

$$\Delta \tau_2 = \frac{M^2}{K^2} \left(\xi - \xi_1 + \frac{R}{M} \right), \quad \Delta \tau_3 = \frac{(\xi_1 - \xi_0) \cos \theta + (\zeta_1 - \zeta_0) \sin \theta}{\cos \theta + V^* / \cos \gamma}$$

$$R = \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 - K^2(\zeta - \zeta_1)^2}, \quad K = \sqrt{M^2 - 1}, \quad M = \frac{U_0}{a_\infty}$$

В выражении (1.2) и (1.3) обозначено: $T = T(\xi_1, \zeta_1, \tau_{1,2})$, l_1 — контур основания скачка уплотнения (разряжения), примыкающий к скачку со стороны передней кромки летательного аппарата, а l_3 — со стороны задней кромки; $l_{2,4}$ — контуры, полученные при подходе к скачку извне летательного аппарата. Величина $\Delta \tau_1$ соответствует времени, за которое возмущение из точки с координатами ξ_1, ζ_1 приходит в точку с координатами ξ, ζ передним фронтом волны, $\Delta \tau_2$ — задним фронтом; $\Delta \tau_3$ соответствует времени движения следа фронта ударной волны от точки с координатами ξ_0, ζ_0 первого касания им летательного аппарата до точки на поверхности S с координатами ξ_1, ζ_1 (фиг. 1).

2. Метод решения. Первый интеграл в правой части выражения (1.2) с учетом интеграла Коши — Лагранжа $p = -2(\partial \varphi / \partial \xi + \partial \varphi / \partial \tau)$ перепишем в виде

$$Q(\xi, \zeta, \tau) = \frac{2}{\pi} \iint_S \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_1} \right)_T dS + \frac{2}{\pi} \iint_S \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_1} \right)_T dS \quad (2.1)$$

Введем единичную ступенчатую функцию $H(\tau - \Delta\tau_3)$:

$$H(\tau - \Delta\tau_3) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_1} \right)_{L=L(\xi_1, \zeta_1, \tau)} = \begin{cases} 0 & (\tau < \Delta\tau_3) \\ 1 & (\tau \geq \Delta\tau_3) \end{cases} \quad (2.2)$$

С учетом (1.3) и (2.2) имеем

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_1} \right)_L = \frac{\partial H(\tau - \Delta\tau_3)}{\partial(\tau - \Delta\tau_3)} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_1} \right)_L = - \frac{\cos\vartheta}{\cos\vartheta + V^*/\cos\gamma} \frac{\partial H(\tau - \Delta\tau_3)}{\partial(\tau - \Delta\tau_3)}$$

Из (2.3) следует

$$\frac{\partial}{\partial\xi} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_1} \right)_L = - \frac{\cos\vartheta \cos\gamma}{\cos\gamma \cos\vartheta + V^*} \frac{\partial}{\partial\tau} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_1} \right)_L \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (2.1), получим

$$Q(\xi, \zeta, \tau) = \frac{2V^*}{\pi(V^* + \cos\vartheta \cos\gamma)} \int_S \int \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial\tau} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_1} \right)_T dS \quad (2.5)$$

Так как в (2.5) производная $\partial/\partial\tau(\partial\varphi/\partial\eta_1)_T$, согласно (2.2), не равна нулю только на линии $\tau_{1,2}=0$, осуществим переход от поверхностного интеграла к одномерному по этой линии.

Положив в (1.3) $\tau_{1,2}=0$ и выполнив преобразования, получим уравнение второй степени относительно переменных ξ_1 и ζ_1

$$a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\zeta_1 + a_{22}\zeta_1^2 + 2a_{13}\xi_1 + 2a_{23}\zeta_1 + a_{33} = 0 \quad (2.6)$$

$$a_{11} = \left(\frac{M^2}{K^2} - c \cos\vartheta \right)^2 - \frac{M^2}{K^4}, \quad a_{12} = c \sin\vartheta \left(c \cos\vartheta - \frac{M^2}{K^2} \right)$$

$$a_{22} = c^2 \sin^2\vartheta + \frac{M^2}{K^2}, \quad a_{13} = \left(\frac{M}{K^2} - c \cos\vartheta \right) \left(\tau - \frac{M^2}{K^2} \xi + ci \right) + \frac{M^2}{K^4} \xi$$

$$a_{23} = c \sin\vartheta \frac{M^2}{K^2} \xi - c \sin\vartheta \tau - c^2 i \sin\vartheta - \frac{M^2}{K^2} \zeta$$

$$a_{33} = \left(\tau - \frac{M^2}{K^2} \xi + ci \right)^2 - \frac{M^2}{K^4} \xi^2 + \frac{M^2}{K^2} \zeta^2$$

$$c = \frac{\cos\gamma}{V^* + \cos\vartheta \cos\gamma}, \quad i = \xi_0 \cos\vartheta + \zeta_0 \sin\vartheta$$

Для уравнения (2.6) три величины

$$I = a_{11} + a_{22}, \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (2.7)$$

являются инвариантами относительно поворота и переноса осей. Эти инварианты определяют свойства кривой второго порядка, не зависящие от ее положения на плоскости [6]. Если скорость движения следа фронта ударной волны на поверхности S больше скорости звука a_∞ , то $D > 0$, $A/I < 0$

и кривая второго порядка является эллипсом (окружностью при мгновенном охвате ударной волной поверхности S); если скорость следа фронта равна скорости звука, то $D=0$ и кривая второго порядка является параболой.

В общем случае закон распределения особенностей $\partial\varphi/\partial\eta_1$ вдоль кривой второго порядка неизвестен, поэтому необходимо в каждый момент времени τ знать размеры и положение кривой относительно поверхности летательного аппарата в принятой системе координат ξ, η, ζ .

Координатами центра кривой второго порядка будут [6]:

$$\xi_{01} = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \zeta_{01} = -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix} \quad (2.8)$$

Перейдем к полярной системе координат с центром в точке $\xi_{01}\zeta_{01}$ и с полярной осью, повернутой относительно оси ξ на угол ω , определяемый из формулы $\operatorname{tg} 2\omega = 2a_{12}/(a_{11}-a_{12})$ [6]. Скорость движения центра полярной системы координат определим по величине производных $\xi_{01}'(\tau)$ и $\zeta_{01}'(\tau)$.

Решая (2.6) совместно с (2.8), получим:

$$\begin{aligned} \xi_{01}'(\tau) &= -\frac{1}{D} \left[a_{12}c \sin \vartheta + a_{22} \left(\frac{M^2}{K^2} - c \cos \vartheta \right) \right] \\ \zeta_{01}'(\tau) &= \frac{1}{D} \left[a_{12} \left(\frac{M^2}{K^2} - c \cos \vartheta \right) + a_{11}c \sin \vartheta \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Полная скорость V_0 , движения центра полярной системы координат и угол β между положительным направлением оси ξ и скоростью V_0 , будут равны

$$V_0 = \sqrt{[\xi_{01}'(\tau)]^2 + [\zeta_{01}'(\tau)]^2}, \quad \beta = \operatorname{arctg} \left[\frac{\zeta_{01}'(\tau)}{\xi_{01}'(\tau)} \right]$$

Для определения радиуса $r(\xi_1, \zeta_1)$ эллипса воспользуемся уравнением кривой второго порядка, приведенным к каноническому виду [6]

$$\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\zeta_1^2}{b^2} = 1, \quad a^2 = -\frac{1}{\lambda_2} \frac{A}{D} = -\frac{A}{\lambda_1 \lambda_2^2} \quad (2.10)$$

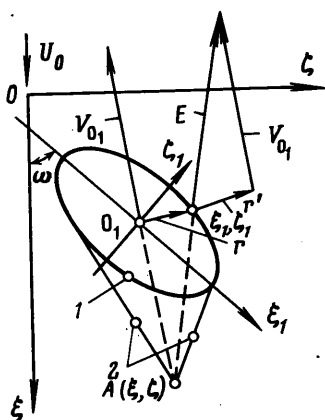
$$b^2 = -\frac{1}{\lambda_1} \frac{A}{D} = -\frac{A}{\lambda_1^2 \lambda_2}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1, \quad r^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \theta}$$

Здесь $\lambda_1 \geq \lambda_2$ — корни характеристического уравнения $\lambda^2 - I\lambda + D = 0$.

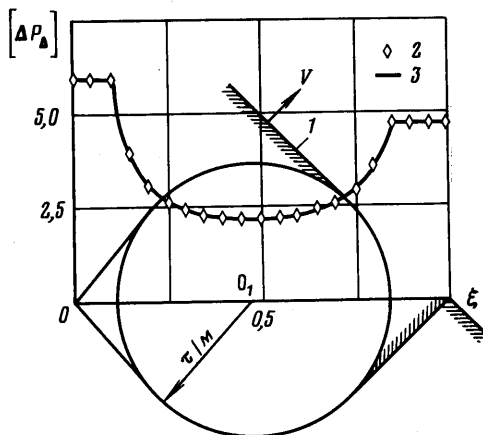
Интеграл (2.5) в полярной системе координат примет вид

$$Q(\varepsilon, \zeta, \tau) = \frac{2V^*}{\pi(V^* + \cos \vartheta \cos \gamma)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_1} \right) r d\theta dr \quad (2.11)$$

Из условия распространения сигналов с линии $\tau_{1,2}=0$ (эллипс 1, фиг. 2) в обратном конусе Маха (2) до точки ξ, ζ на поверхности S следует, что скорость E произвольной точки кривой второго порядка равна векторной сумме скорости перемещения центра V_0 и производной радиуса $\tau'(\tau)_{\xi, \zeta}$. Кроме того, сумма проекций V_0 и $\tau'(\tau)_{\xi, \zeta}$ на нормаль к кривой в точке ее касания обратного конуса Маха равна нулю. Поэтому за величину Δr в (2.11) принимаем произведение $\Delta \tau$ на сумму проекций скоростей V_0 и $\tau'(\tau)_{\xi, \zeta}$ на нормаль к кривой в точке ξ_1, ζ_1 . Решение в этом случае совпадает с решением, полученным в [4] при $\gamma = \pi/2$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Определим с помощью формул (2.6), (2.7) и (2.10) скорость изменения радиуса $r'(\tau)_{\xi_1, \zeta_1}$ кривой второго порядка. Выражение для r в (2.10) приведем к виду

$$r = \left(-\frac{A}{q} \right)^{1/2} = v^{1/2}, \quad q = \lambda_1^2 \lambda_2 \sin^2 \theta + \lambda_1 \lambda_2^2 \cos^2 \theta \quad (2.12)$$

Скорость изменения радиуса $r'(\tau)_{\xi_1, \zeta_1}$ будет равна

$$r'(\tau) = \frac{v'(\tau)}{2\sqrt{v}} = \frac{1}{2\sqrt{v}} \left[-\frac{1}{q} (2a_{11}a_{22}\tau + 2a_{11}a_{22}b + 4a_{12}lj\tau + \right. \\ \left. + 2a_{12}lf + 2a_{12}ej - 2a_{22}j^2\tau - 2a_{22}jf - 2a_{12}^2\tau - 2a_{12}^2b - 2a_{11}l^2\tau - 2a_{11}le) \right] \quad (2.13)$$

$$b = ci - \frac{M^2}{K^2} \xi, \quad l = -c \sin \theta, \quad j = \frac{M}{K^2} - c \cos \theta$$

$$f = j \left[-\frac{M^2}{K^2} \xi + ci \right] + \frac{M^2}{K^4} \xi$$

$$e = c \sin \theta \frac{M^2}{K^2} \xi - c^2 i \sin \theta - \frac{M^2}{K^2} \zeta$$

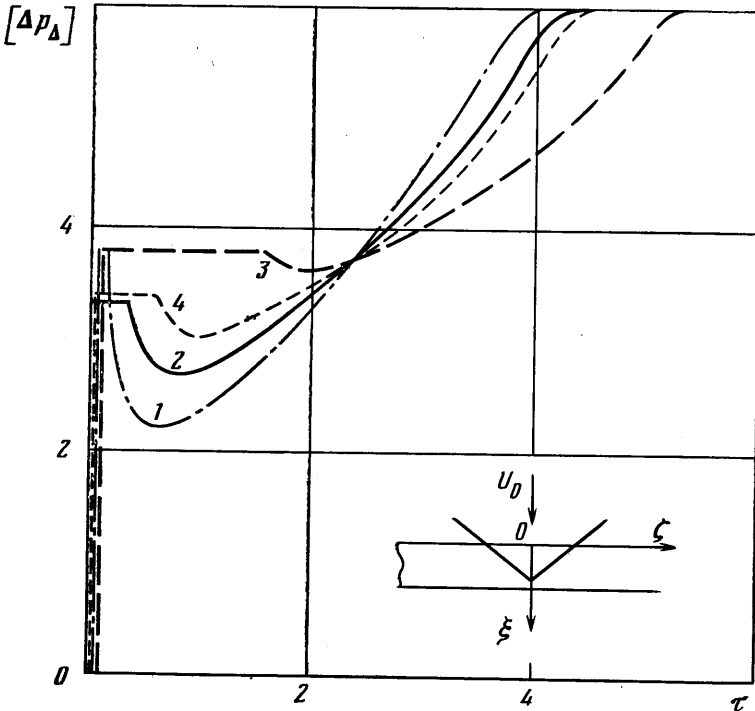
Пусть \mathbf{n} — единичный вектор, нормальный к кривой второго порядка в точке ξ_1, ζ_1 , тогда Δr определим по формуле

$$\Delta r = \Delta \tau [r'(\tau) \cos \nu + V_0 \cos \mu] \quad (2.14)$$

где ν и μ — углы между векторами скорости $\mathbf{r}'(\tau)$, \mathbf{V}_0 и единичным вектором \mathbf{n} соответственно.

Считаем далее, что величина $\partial \varphi / \partial \eta_1$ в точке ξ_1, ζ_1 меняется линейно от 0 до $\partial \varphi / \partial \eta_1$ [4], тогда

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_1} \right) = \frac{1}{\Delta \tau} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_1} \quad (2.15)$$



Фиг. 4

Подставляя (2.14) и (2.15) в (2.11) и затем значение Q в (1.2), окончательно получим

$$\Delta p(\xi, \zeta, \tau) = \frac{2V^*}{\pi[V^* + \cos \vartheta \cos \gamma]} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_1} \right)_{\tau} [r'(\tau) \cos \nu + V_{\infty} \cos \mu] r d\theta -$$

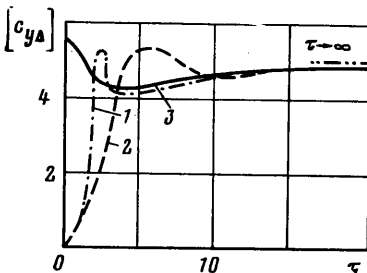
$$- \frac{1}{\pi} \iint_{\sigma+\Sigma} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial p}{\partial \eta_1} \right)_{\tau} dS - \frac{2}{\pi} \int_{l_1-l_3} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_1} \right)_{\tau} d\zeta_1 - \frac{2}{\pi} \int_{l_2-l_4} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_1} \right)_{\tau} d\zeta_1$$

(2.16)

Определение остальных членов выражения (2.16) производится согласно [4].

3. Пример. На базе выражения (2.16) разработан численный метод определения переходных функций распределенных и суммарных аэродинамических характеристик летательных аппаратов и их частей при воздействии произвольно ориентированной слабой ударной волны (воздействует перепад давления на фронте и поток за фронтом ударной волны).

В качестве примера приводятся результаты расчета переходной функции $[\Delta p_{\Delta}]$ распределения нагрузки вдоль хорды пластины бесконечного размаха в момент достижения фронтом ударной волны (1) задней кромки (фиг. 3). Расчет проводился при $M=1,2$; $V/a_{\infty}=1$; $\vartheta=0$, $\gamma=45^{\circ}$. Резуль-



Фиг. 5

таты расчета (2) сравниваются с решением (3), полученным в [1].

Также приводятся результаты расчета переходной функции $[\Delta p_\Delta]$ нагрузки в точке A_1 ($\xi=0,83$; $\zeta=0$) на пластине бесконечного размаха (фиг. 4) при $M=1,2$; $V/a_\infty=1$, $\theta=0$, $\gamma=60^\circ$ (1) и 90° (2), $\theta=180^\circ$, $\gamma=60^\circ$ (3) и 80° (4) и переходной функции $[c_{y\Delta}]$ коэффициента подъемной силы гипотетического летательного аппарата (фиг. 5) при $M=1,2$; $V/a_\infty=1$, $\theta=0$, $\gamma=60^\circ$ (1) и 90° (2); $\theta=180^\circ$, $\gamma=60^\circ$ (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ehlers E. F., Shoemaker E. M. A linearized analysis of the forces exerted on a rigid wing by a shock wave. — J. Aerospace Sci., 1959, v. 26, № 2, p. 75–80.
2. Голубинский А. И. Об обтекании движущейся пластинки перемещающейся ударной волной. — Инж. ж., 1961, т. 1, вып. 2, с. 26–30.
3. Шамшури А. Д. Воздействие слабой ударной волны на крыло сложной формы в плане при сверхзвуковых скоростях. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 2, с. 173–176.
4. Попыгалов С. А. Расчетная система определения аэродинамических характеристик летательных аппаратов при сверхзвуковых скоростях полета. — Тр. 11-х чтений, посвящ. разраб. научного наследия и развитию идей К. Э. Циолковского, Калуга, 1976. М., 1978, с. 12–18.
5. Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971. 767 с.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1977. 831 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.XII.1980