

УДК 532.59

О ВЛИЯНИИ ПОДВОДНОГО ХРЕБТА НА РАСХОДЯЩУЮСЯ ОТ ТОЧКИ НЕЛИНЕЙНУЮ ВОЛНУ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

КУЛИКОВСКИЙ А. Г.

В работе изучается воздействие подводного хребта на уединенную волну, имевшую до взаимодействия с хребтом форму окружности, расположенной вне хребта. Показано, что нелинейные эффекты приводят к концентрации энергии волны над подводным хребтом. При удалении от источника волны, распространяющиеся над хребтом, в рассматриваемом приближении не затухают и затухают всюду вне хребта. Указана аналогия между распространением волны и двумерными стационарными течениями жидкости, позволяющая использовать гидродинамическую интуицию для качественных представлений о характере распространения волн в различных случаях. Все результаты работы могут быть перенесены на случай периодических по времени волн.

1. При распространении как линейных, так и нелинейных волн на поверхности жидкости подводные хребты проявляют волноводные свойства, поскольку скорость волн убывает с уменьшением глубины жидкости. На возможность влияния подводных хребтов на распространение волн цунами обратил внимание М. А. Лаврентьев [1]. Линейные и нелинейные волны, распространяющиеся вдоль подводных хребтов, изучались в [2]. В частности, было указано решение в виде прямой уединенной волны, перпендикулярной хребту, амплитуда которой над хребтом больше, чем вне его, и распределена таким образом, что скорость волны всюду одна и та же.

Ниже ширина хребта и радиус кривизны волны будут предполагаться большими характерной ширины уединенной волны (измеряемой поперек волны). В этом случае для описания поведения волны будем использовать уравнения [3], которые запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{E_x}{EV} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{E_y}{EV} &= 0, \quad V=V(h, E) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь E — плотность волновой энергии, т. е. энергия волны, приходящаяся на единицу длины, отсчитываемой вдоль гребня волны, $E_x = En_x$, $E_y = En_y$, n_x , n_y — компоненты вектора нормали к линии гребня волны, h — невозмущенная глубина жидкости, $V(h, E)$ — функция, выражающая скорость уединенной волны через глубину h и плотность волновой энергии E , которая принимается такой же, как для неискривленных уединенных волн постоянной амплитуды при $h = \text{const}$. Для волн малой амплитуды последняя функция имеет вид

$$V \approx \sqrt{gh} \left(1 + \frac{1}{2} e^{2\gamma} \right), \quad e = \gamma^3 E, \quad \gamma = \frac{1}{3} \frac{1}{h\sqrt{\rho g}} \quad (1.2)$$

Условием применимости приведенной формулы является неравенство $e \ll 1$.

Для выражения (1.2) выполняются неравенства

$$\frac{\partial V}{\partial h} > 0, \quad \frac{\partial V}{\partial E} > 0 \quad (1.3)$$

которые будут предполагаться выполненными и в том случае, когда неравенство $e \ll 1$ не выполняется.

Неизвестными в системе (1.1) являются величины E_x , E_y , рассматриваемые как функции декартовых координат x и y .

Первое уравнение (1.1) выражает доказанное в [3] сохранение энергии каждого элемента фронта волны, все точки которого движутся по нормали к линии гребня волны. Второе уравнение представляет собой условие существования функции $\Phi(x, y)$, такой, что уравнение $\Phi(x, y) = t - t_0$ задает линию гребня волны или, более кратко, фронт волны в момент времени t .

При выполнении неравенств (1.3) система (1.1) является гиперболической. Характеристики этой системы составляют равные углы с направлением нормали к фронту волны. При малых значениях E для этого угла из равенства (1.2) получается выражение

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \gamma e^{1/2} \quad (1.4)$$

В рамках уравнений (1.1) в работе [4] были исследованы стационарные решения, описывающие прохождение над подводным хребтом уединенной волны, параллельной некоторой прямой, составляющей с хребтом произвольный угол. Все решения, полученные в [4], естественным образом разбиваются на два класса: «сверхзвуковые» и «дозвуковые».

В сверхзвуковом решении обе характеристики систем (1.1) направлены по одну сторону от хребта, так что набегающая с другой стороны волна не возмущена наличием хребта. В дозвуковом решении характеристики направлены в разные стороны от хребта, и волна испытывает влияние хребта по обе стороны от него.

Если при заданном E , отличном от нуля, угол α между нормалью к волне и хребтом достаточно мал, то решение, описывающее волну, является дозвуковым. При стремлении угла α к нулю это решение стремится к описанному выше решению работы [2]. Отметим, что амплитуда волны вне хребта является произвольной, и при $\alpha = 0$ может быть равна нулю вне хребта, оставаясь отличной от нуля только над хребтом. При этом решение не определяется однозначно, а содержит произвольный параметр, в качестве которого может быть выбрана полная энергия Θ волны, распространяющейся над хребтом. При малых значениях Θ амплитуда волны отлична от нуля только в окрестности самой высокой точки хребта. Максимальное значение, равное Θ_m , достигается в случае, когда амплитуда отлична от нуля всюду над хребтом и равна нулю вне его.

Отметим, что рассмотренные выше волны, сосредоточенные только на хребте, удовлетворяют системе (1.1), которая не учитывает дифракционных эффектов. Последние могут привести к некоторым потерям энергии волны, распространяющейся над хребтом. Однако эти потери будут тем менее существенны, чем больше характерный масштаб явления.

Рассмотренные решения входят в более широкий класс решений, существенно зависящих от двух пространственных переменных и описывающих волны, не выходящие за пределы хребта и испытывающие при дви-

жении некоторые колебания. Хотя такие решения уже не определяются полностью своей энергией Θ , однако она является важной характеристикой этих волн.

2. Рассмотрим сначала воздействие на круговую нелинейную волну подводного хребта, имеющего малую высоту и малую ширину. При этом, очевидно, хребет будет мало влиять на волну, распространяющуюся вне хребта, а над хребтом волна будет подстраиваться к волне вне хребта в соответствии с решением работы [4]. При этом на начальном периоде воздействия хребта на волну угол α между нормалью к волне и хребтом близок к прямому и решение является сверхзвуковым. По прошествии достаточно большого времени, принимая, что форма волны вне хребта остается достаточно близкой к круговой, получим асимптотическое выражение для угла между нормалью к волне и хребтом

$$\alpha = l/r, \quad l = \text{const} \quad (2.1)$$

где l — расстояние от центра волны до хребта, а r — текущий радиус волны.

Если учесть, что энергия волны сохраняется, то получим, что для круговой волны в области постоянной глубины $er = \epsilon = \text{const}$ и что, согласно (2.1) и (1.4), при больших r будет выполняться неравенство $\alpha < \beta$, где β определено равенством (1.4). Это означает, что волна над хребтом при больших r будет дозвуковой. Переход от сверхзвукового режима к дозвуковому будет происходить при некотором значении $r = r_*$, определяемом из равенства $\alpha = \beta$.

Таким образом, принимая, что хребет мало возмущает круговую волну, приходим к выводу, что при удалении от источника волна над хребтом преобразуется в волну работы [2], соответствующую максимальной энергии Θ_m волны, распространяющейся над хребтом. Вне хребта волна затухает как круговая ($e = \epsilon/r$).

3. Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда хребет достаточно высок и широк, так что соответствующее хребту значение Θ_m больше той энергии Θ_l , которая может быть собрана хребтом из круговой волны. Задача этого раздела будет заключаться в оценке величины Θ_l .

Прежде всего отметим, что в решениях работы [4] плотность энергии волны E над хребтом в сверхзвуковом случае меньше, а в дозвуковом случае больше, чем вне хребта. Это утверждение следует из сохранения в указанных решениях потока энергии $E \sin \alpha = \text{const}$, а согласно [4], величина α над хребтом в сверхзвуковом случае больше, а в дозвуковом случае меньше, чем вне хребта. Поэтому после перехода от сверхзвукового режима к дозвуковому будет происходить накопление энергии над хребтом. Энергию сверхзвуковой волны над хребтом непосредственно до перехода обозначим через Θ_0 .

Эту величину нетрудно оценить, зная форму хребта и плотность энергии волны в точке перехода.

Точка перехода $r = r_*$ определяется условием, что направление одной из характеристик перед хребтом совпадает с хребтом: $\alpha = \beta$. Если воспользоваться соотношением (1.4), то получим

$$r_* = 3^{3/4} \sqrt{\frac{l^3}{\epsilon}}, \quad \alpha = \beta = \alpha_* = \frac{l}{r_*} = 3^{-3/4} \sqrt{\frac{\epsilon}{l}} \quad (3.1)$$

Здесь l — расстояние от центра волны до хребта. Возможность использования выражения (1.4) сводится к тому, что $\alpha_* \ll 1$. Будем предполагать это условие выполненным.

Рассмотрим характеристику, касающуюся хребта в точке $r=r_*$ и отделяющую область невозмущенного движения волны от области, возмущенной хребтом (см. фигуру).

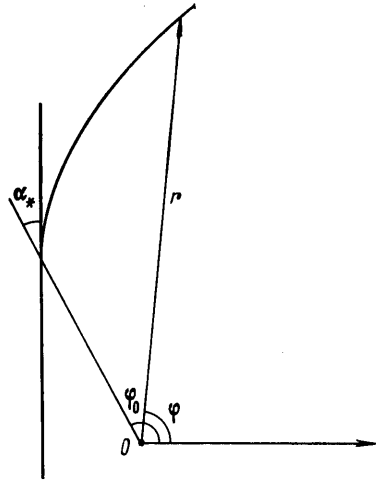
Уравнение этой характеристики в полярных координатах r и φ имеет вид

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{1}{r} \operatorname{tg} \varphi \approx -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\varepsilon^{1/2}}{r^{1/2}} \quad (3.2)$$

$$\varphi = \varphi_0 - \sqrt{3}\varepsilon^{1/2} \left[\frac{1}{\sqrt{3/r_*}} - \frac{1}{\sqrt{3/r}} \right]$$

Здесь φ_0 — начальный полярный угол. При $r \rightarrow \infty$ получаем $\varphi = \varphi_0 - 3\alpha_*$.

Так как хребет собирает энергию волн, то следует ожидать, что искажение первоначально круговой волны будет сводиться к некоторому развороту участков фронта волны в сторону хребта и к тому, что элементы фронта, движущиеся по нормали к фронту, получат дополнительное смещение в сторону хребта. Если пренебречь этим эффектом, то к хребту придут элементы фронта, составлявшие часть первоначальной окружности с углом α_* . Их суммарная энергия равна $\Theta_1 \alpha_*$, где $\Theta_1 = \gamma^2 \varepsilon$ — энергия одного радиана первоначальной круговой волны. Если же предположить, что вся возмущенная область волны придет к хребту, то получим энергию $3\Theta_1 \alpha_*$. Таким образом, получаем оценку энергии волны, которая будет распространяться над хребтом на достаточном удалении от источника, породившего волну



$$\Theta_j = \Theta_0 + k\Theta_1 \alpha_*, \quad 1 \leq k \leq 3 \quad (3.3)$$

Величина Θ_0 может быть по порядку величины оценена по углу δ , под которым виден участок фронта волны, находящийся над хребтом при $r=r_*$: $\Theta_0 \sim \Theta_1 \delta$ из точки, являющейся источником возмущений. Если $\delta \ll \alpha_*$, то этой величиной можно пренебречь. Тогда, используя (3.1), получим

$$\Theta_j = \frac{k}{3^{1/2} \sqrt{\rho q}} \Theta_1^{1/2} l^{-1/2} h_0^{-1/2}$$

Отметим, что при стремлении Θ_1 к нулю, т. е. при переходе к линейным волнам, накопления энергии волн хребтом не происходит, так как точка перехода уходит на бесконечность $r_* \rightarrow \infty$, $\alpha_* \rightarrow 0$.

4. В заключение отметим аналогию между уравнениями (1.1) и уравнениями, описывающими стационарное сверхзвуковое течение газа или слоя жидкости, растекающейся по некоторой поверхности (теория «мелкой воды»). Действительно, если обозначить

$$\mathbf{v} = \frac{1}{V} \frac{\mathbf{E}}{E}, \quad \xi \mathbf{v} = \mathbf{E} \quad (4.1)$$

то получим, что уравнения (1.1) описывают стационарные безвихревые течения жидкости со скоростью v и плотностью или толщиной слоя $\xi = EV$.

Возводя первое уравнение (4.1) в скалярный квадрат, получим соотношение, аналогичное интегралу Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + P(h, \xi) = 0 \quad (4.2)$$

Здесь $P(h, \xi)$ — функция, получаемая из $-1/2 V^2$ путем замены переменной E на ξ с помощью соотношений (4.1).

Согласно (1.1), скорость \mathbf{v} имеет потенциал ϕ и линии равного потенциала $\phi(x, y) = \text{const}$ (ортогональные вектору \mathbf{v}) соответствуют положениям гребня волны в различные моменты времени.

В соотношениях (4.1) и (4.2) h — известная функция x и y . Если $h = \text{const}$, то P будет зависеть только от ξ и можно подобрать уравнение состояния газа $p = p(\xi)$, такое, что выражение $P = \int dp/\rho$ будет иметь тре-

буемый вид. При малых E , воспользовавшись соотношением (1.2), получим, что p пропорционально ξ^3 , $\gamma = 5/3$, а соотношение (4.2) принимает вид

$$\frac{v^2}{2} - \frac{1}{2gh} + \frac{\xi^{7/3}}{2\rho^{2/3}g^2h^{10/3}} = 0 \quad (4.3)$$

В этом соотношении второе слагаемое можно рассматривать как потенциал массовых сил. Несколько необычной для гидродинамики является зависимость функции давления, представляемой третьим членом, от потенциала массовых сил. Однако при малых изменениях h зависимостью третьего слагаемого от h можно пренебречь.

Тогда прямолинейный хребет будет соответствовать потенциальной яме с потенциалом, зависящим от одной переменной. Наиболее наглядно течение жидкости можно представить как растекание слоя идеальной тяжелой жидкости от источника по плоскости, в которой имеется канава. Конечно, теория мелкой воды соответствует $\gamma = 2$, а не $5/3$, и при удалении от источника угол β , составляемый характеристиками и скоростью, убывает как $r^{-1/2}$, а не как $r^{-1/3}$, однако для качественного представления характера течения эти различия несущественны.

Если не обращать внимание на указанные различия, то изучаемому распространению волн будет соответствовать растекание от точечного источника слоя идеальной тяжелой жидкости по плоскости, в которой имеется канава. Всякому, кто наблюдал течение жидкости, очевидно, что толщина слоя жидкости при удалении от источника будет стремиться к нулю, а канава на достаточном от источника удалении будет полностью или частично заполнена движущейся жидкостью. Это течение соответствует распространению волн, о котором было сказано выше.

Приведенная здесь аналогия между течениями жидкости и распространением волн позволяет заранее качественно представить себе картины распространения волн в более сложных случаях. Например, если хребет криволинейный, то это соответствует кривой канаве и можно предсказать, что если кривизна канавы станет достаточно большой (нетрудно оценить, какой именно), то текущая в ней жидкость выплеснется из нее под действием центробежной силы. Это будет соответствовать сходу волны с хребта. Подобная картина выплескивания жидкости из канавы (схода волны с хребта) будет наблюдаться, если будет меняться поперечное сечение канавы и, в частности, ее глубина (высота хребта).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 416 с.
2. *Биченков Е. И., Гаринов Р. М.* Распространение волн на поверхности тяжелой жидкости в бассейне с неровным дном.— ПМТФ, 1969, № 2, с. 21–26.
3. *Grimshaw R.* The solitary wave in water of variable depth. Pt 2.— J. Fluid Mech., 1974, v. 46, № 3, p. 611–622.
4. *Реутов В. А.* Движение уединенной волны над подводным хребтом.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 4, с. 79–85.

Москва

Поступила в редакцию
29.IX.1981