

УДК 532.544/55:533.694.71/72

О НЕКОТОРЫХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ГРЭДА

БЫРКИН А. П., ЩЕННИКОВ В. В.

В работе показано, что найденные ранее авторами статьи автомодельные решения уравнений Навье — Стокса и Барнетта [1—9] могут быть распространены на случай плоских течений слаборазреженного газа, описываемых уравнениями Грэда. Приводятся примеры численной реализации автомодельных решений для течения в расширяющемся плоском канале. Обнаружено заметное расхождение в поведении автомодельных решений уравнений Навье — Стокса, Барнетта и Грэда в окрестности стенки канала.

Решения [1—9] являются в некотором смысле обобщениями на случай вязкого сжимаемого газа решений Гамеля, Пуазейля, Гартмана, известных в гидродинамике вязкой жидкости. Естественно полагать, что система уравнения Грэда имеет сходные с уравнениями Навье — Стокса и Барнетта автомодельные решения. При этом в отличие от приближения Барнетта приближение Грэда описывается замкнутой системой уравнений и граничных условий.

Автомодельные решения уравнений Грэда указаны также в [10], однако они относятся к другому классу.

1. Рассмотрим течение слаборазреженного газа в плоском канале. Система 13-моментных уравнений Грэда при отсутствии массовых сил имеет в декартовых координатах следующий вид [11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (P_{ij} + \rho v_i v_j) &= 0, \quad i=1, 2 \\ \frac{\partial \rho (\varepsilon + \frac{1}{2} w^2)}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho v_j \left(\varepsilon + \frac{1}{2} w^2 \right) + \sum_{i=1}^2 P_{ji} v_i + q_j \right] &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_k} (v_k \tau_{ij}) + \frac{2}{5} \frac{\partial q_i^*}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^2 \tau_{ik} \frac{\partial v_j^*}{\partial x_k} + p \frac{\partial v_i^*}{\partial x_j} + \frac{p}{\mu} \tau_{ij} &= 0, \quad i, j=1, 2 \\ \frac{\partial q_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^2 \left[\frac{\partial v_k q_i}{\partial x_k} + \frac{7}{5} q_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{2}{5} q_k \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \right. \\ \left. + \frac{2}{5} q_i \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \frac{2}{3} \varepsilon \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} + \frac{7}{3} \tau_{ik} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} - \sum_{j=1}^2 \frac{\tau_{ij}}{\rho} \frac{\partial P_{jk}}{\partial x_k} \right] + \\ \left. + \frac{5}{3} p \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i} + \frac{2}{3} \frac{p}{\mu} q_i = 0, \quad i=1, 2, \quad p = \frac{2}{3} \rho \varepsilon \right. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь t — время, x_1, x_2 — декартовы координаты; v_1, v_2 — составляющие вектора скорости вдоль соответствующих осей координат; ρ, p, ε — плотность, давление, внутренняя энергия газа; $w^2 = v_1^2 + v_2^2$; P_{ij}, τ_{ij} ($i, j=1, 2$) — компоненты тензора и девиатора напряжений соответственно ($P_{ij} = \delta_{ij}p + \tau_{ij}$); q_1, q_2 — составляющие вектора теплового потока; δ_{ij} — символ Кронекера;

$$f_{ij}^* = f_{ij} + f_{ji} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \sum_{k=1}^2 f_{kk}.$$

В рамках приближения Грэда можно полагать, что μ есть заданная функция внутренней энергии

$$\mu = \mu(\varepsilon) \tag{1.2}$$

Если внешняя нормаль к стенке канала совпадает с осью x_2 , тогда, согласно Грэду, граничные условия на неподвижной поверхности имеют вид [11]

$$\left(\frac{\tau_{12}}{p}\right)_s + \frac{2\theta}{2-\theta} \sqrt{\frac{3}{4\pi\varepsilon_s}} \left[v_1 \left(\frac{\tau_{22}}{2p} + 1\right) + \frac{q_1}{5p} \right]_s = 0 \tag{1.3}$$

$$\left(\frac{q^2}{p}\right)_s + \frac{4\theta}{2-\theta} \sqrt{\frac{\varepsilon_s}{3\pi}} \left[1 - \frac{\varepsilon_w}{\varepsilon} - \frac{\tau_{22}}{2p} \left(\frac{\varepsilon_w}{\varepsilon} - \frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} \frac{w^2}{\varepsilon} \left(\frac{\tau_{22}}{2p} + 1\right) \right]_s = 0$$

$v_{2s} = 0$ или $v_{2s} = v_{2s}(x_1)$

где θ — коэффициент аккомодации поверхности.

2. В случае стационарного течения в канале постоянного поперечного сечения будем искать решение задачи (1.1)–(1.3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} v_i &= e^{\alpha x} V_i(y), \quad P_{ij} = e^{\beta x} \Pi_{ij}(y) \\ \tau_{ij} &= e^{\beta x} T_{ij}(y), \quad p = e^{\beta x} P(y) \\ \varepsilon &= e^{\gamma x} E(y), \quad \rho = e^{\delta x} R(y) \\ q_i &= e^{\kappa x} Q_i(y), \quad w = e^{\alpha x} W(x) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $x = x_1, y = x_2$; x, y — соответственно продольная и поперечная координаты.

Для существования решения (2.1) необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} \mu &\sim \varepsilon^n, \quad \gamma = 2\alpha, \quad \kappa = 2\alpha(1+n) \\ \beta &= \alpha(1+2n), \quad \delta = \alpha(2n-1) \end{aligned} \tag{2.2}$$

где α, n — произвольные константы.

С учетом (2.1), (2.2) задача (1.1)–(1.3) редуцируется к следующей задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений (стационарное течение):

$$\begin{aligned} 2\alpha n R V_1 + (R V_2)' &= 0 \\ \beta (\Pi_{i1} + R V_i V_1) + (\Pi_{i2} + R V_i V_2)' &= 0, \quad i=1, 2 \\ \kappa \left[R V_1 \left(E + \frac{1}{2} W^2 \right) + \sum_{i=1}^2 \Pi_{i1} V_i + Q_1 \right] + \\ + \left[R V_2 \left(E + \frac{1}{2} W^2 \right) + \sum_{i=1}^2 \Pi_{i2} V_i + Q_2 \right]' &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \kappa(V_1 T_{ij}) + (V_2 T_{ij})' + \frac{2}{5} e^{-\alpha x} \frac{(\partial e^{\alpha x} Q_i)^*}{\partial x_j} + e^{-\alpha x} \sum_{k=1}^2 T_{ik} \frac{\partial e^{\alpha x} V_j}{\partial x} + \\
& + e^{-\alpha x} P \frac{(\partial e^{\alpha x} V_i)^*}{\partial x_j} + \frac{1}{m} P T_{ij} = 0; \quad i, j = 1, 2 \\
& (\kappa + \alpha) V_1 Q_i + \frac{7}{5} \alpha Q_i V_i + \frac{2}{5} e^{-\alpha x} \sum_{k=1}^2 Q_k \frac{\partial e^{\alpha x} V_k}{\partial x_i} + \frac{2}{5} \alpha Q_i V_i + \frac{2}{3} \beta E T_{i1} + \\
& + \frac{7}{3} \gamma T_{i1} E - R^{-1} \beta \sum_{j=1}^2 T_{ij} \Pi_{j1} + \frac{5}{3} P e^{-2\alpha x} \frac{\partial e^{2\alpha x} E}{\partial x_i} + \frac{2}{3} P Q_i \frac{1}{m} + (V_2 Q_i)' + \\
& + \frac{7}{5} Q_2 V_i' + \frac{2}{5} Q_i V_2' + \frac{2}{3} E (T_{i2})' + \frac{7}{3} T_{i2} E' - R^{-1} \sum_{j=1}^2 T_{ij} (\Pi_{j2})' = 0; \\
& i = 1, 2
\end{aligned} \tag{2.3}$$

где $\mu = e^{\gamma n x} m(y)$, штрих означает дифференцирование по y .

Граничные условия (1.3) при этом примут вид

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{T_{12}}{P} \right)_s + \frac{2\theta}{(2-\theta) \sqrt[4]{3\pi E_s}} \left[V_1 \left(\frac{T_{22}}{2P} + 1 \right) + \frac{Q_1}{5P} \right] = 0 \\
& \left(\frac{Q_2}{P} \right)_s + \frac{4\theta}{2-\theta} \sqrt[4]{\frac{1}{3} \frac{E_s}{\pi}} \left[1 - \frac{E_w}{E} - \frac{T_{22}}{2P} \left(\frac{E_w}{E} - \frac{3}{2} \right) - \frac{3}{2} \frac{W^2}{E} \left(\frac{T_{22}}{2P} + 1 \right) \right] = 0
\end{aligned} \tag{2.4}$$

3. Следующий класс автомодельных решений задачи (1.1)–(1.3) относится к течению в плоских расширяющихся каналах с прямолинейными стенками. В этом случае решение ищется в виде (x – по-прежнему продольная координата $x=x_1$, $y=x_2$)

$$\begin{aligned}
v_i &= x^\alpha V_i(z), & P_{ij} &= x^\beta \Pi_{ij}(z) \\
\tau_{ij} &= x^\beta T_{ij}(z), & p &= x^\beta P(z) \\
\varepsilon &= x^\gamma E(z), & \rho &= x^\delta R(z) \\
q_i &= x^\alpha Q_i(z), & w &= x^\alpha W(z)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где $z=y/x$.

Нетрудно убедиться, что для существования решения (3.1) необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned}
\mu &\sim \varepsilon^n, & \gamma &= 2\alpha, & \kappa &= 2\alpha(1+n) - 1 \\
\beta &= \alpha(1+2n) - 1, & \delta &= \alpha(2n-1) - 1
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где α, n — произвольные постоянные.

Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид (ограничимся лишь первыми четырьмя уравнениями)

$$\begin{aligned} &(\alpha + \delta)RV_1 = z(RV_1)' + (RV_2)' = 0 \\ &\beta(\Pi_{i1} + RV_i V_1) - z(\Pi_{i1} + RV_i V_1)' + \\ &\quad + (\Pi_{i2} + RV_i V_2)' = 0, \quad i=1, 2 \\ &\times \left[RV_1 \left(E + \frac{1}{2} W^2 \right) + \sum_{i=1}^2 \Pi_{i1} V_i + Q_1 \right] - z \left[RV_1 \left(E + \frac{1}{2} W^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^2 \Pi_{i1} V_i + Q_1 \right]' + \left[RV_2 \left(E + \frac{1}{2} W^2 \right) + \sum_{i=1}^2 \Pi_{i2} V_i + Q_2 \right]' = 0 \end{aligned}$$

где штрих означает дифференцирование по z .

Граничные условия (2.4) должны быть записаны для нормальной и касательной составляющих девиатора напряжений и нормальной составляющей теплового потока.

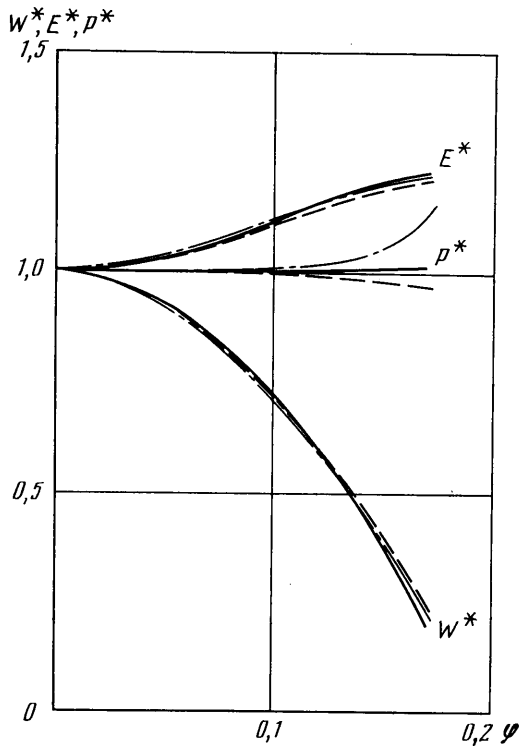
Используя предложенный в [1] подход к построению автомодельных решений уравнений Барнетта в нестационарном случае, легко можно получить их аналоги для уравнений Грэда.

4. Для иллюстрации рассмотрим численную реализацию автомодельного решения, соответствующего стационарному течению в плоском расширяющемся канале при $\alpha=0$. В этом случае вид функции $\mu=\mu(\varepsilon)$ может быть произвольным. Из (3.2) следует, что при $\alpha=0$ имеет место $\gamma=0, \beta=\delta=\kappa=-1$.

При этом система обыкновенных дифференциальных уравнений (3.3) после обезразмеривания с учетом интегралов первых ее четырех уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} &V_2 = zV_1, \quad Q_2 = zQ_1 - CzV_1 \\ &T_{12} = z_{11}, \quad \Pi_{22} = zT_{12} + C \\ &-\frac{2}{5}CzV_1' - \frac{4}{5}(Q_1 + zQ_1') = \frac{2}{5}CV_1 - \text{Re } P(\Pi_{11} - P)/m \\ &\frac{4}{5}CzV_1' + \frac{4}{5}(Q_1 + zQ_1') = -\frac{4}{5}CV_1 - \text{Re } P(z^2\Pi_{11} + C - P)/m \\ &\frac{2}{5}Q_1' - \frac{2}{5}z(Q_1 + zQ_1') + \frac{2}{5}Cz(V_1 + zV_1') + CV_1' = \frac{2}{5}Q_2 - \text{Re } Pz\Pi_{11}/m \\ &-\left[\frac{7}{5}CzV_1 + \frac{2}{5}z(Q_1 + zQ_2) \right] V_1' + \frac{2}{3}zEP' + \frac{2}{3}zPE' = \\ &= \frac{2}{5}zV_1Q_2 - \frac{2}{5}V_1Q_1 - \frac{2}{3}EP - \frac{2}{3}\text{Re } PQ_1/m \\ &\left[-\frac{7}{5}Cz^2V_1 + \frac{2}{5}(Q_1 + zQ_2) \right] V_1' - \frac{2}{3}EP' + \left(\frac{7}{3}C - \frac{2}{3}P \right) E' = \\ &= -\frac{7}{5}CzV_1^2 - \frac{4}{5}V_1Q_2 - \frac{2}{3}\text{Re } PQ_2/m \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь $\text{Re} = \rho_0 w_0 r_0 / \mu_0$ — число Рейнольдса, определенное по параметрам потока газа на оси ($y=0$) в каком-либо сечении канала; r_0 — расстояние,



Фиг. 1

на котором находится указанное сечение от вершины двугранного угла, представляющего собой канал; C — константа.

Постоянные интегрирования в первых трех соотношениях системы (4.1) равны нулю в силу предположения о симметрии течения в канале.

Для определения функций $V_1(z)$, $E(z)$, $P(z)$, $\Pi_{11}(z)$ и $Q_1(z)$ используем последние пять уравнений системы (4.1), которая имеет особенность при $z=0$. Используя разложения для искомых функций в окрестности $z=0$, можем отойти от этой точки.

При этом имеем

$$V_1(0) = 1, \quad E(0) = (\kappa(\kappa-1)M^2)^{-1}, \quad P(0) = (\kappa M^2)^{-1} \quad (4.2)$$

$$Q_1(0) = -E(0)P(0) \left[\frac{3}{5} + \operatorname{Re} P(0) \right]^{-1}$$

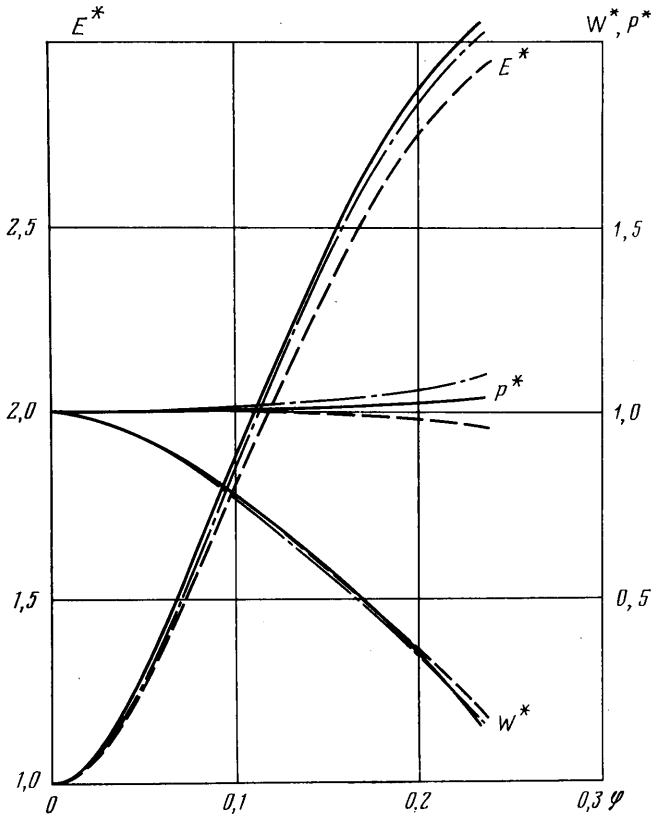
$$C = \left[\operatorname{Re} P^2(0) - \frac{4}{5} Q_1(0) \right] \left[\frac{4}{5} + \operatorname{Re} P(0) \right]^{-1}$$

$$\Pi_{11}(0) = P(0) + \left[\frac{2}{5} C + \frac{4}{5} Q_1(0) \right] [\operatorname{Re} P(0)]^{-1}$$

где $\kappa = 5/3$ — показатель адиабаты, M — число M на оси канала.

При заданных M и Re условий (4.2) достаточно, чтобы сформулировать задачу Коши для системы (4.1).

Значение величины z_w , определяющей полуугол раскрытия канала φ_w , при этом определим из аналога первого условия (2.4), значение E_w — из аналога второго условия (2.4).



Фиг. 2

В качестве примера на фиг. 1 сплошными линиями приведены рассчитанные профили приведенной скорости $W^*=W/W(0)$, внутренней энергии $E^*=E/E(0)$ и давления $P^*=P/P(0)$ по величине $\varphi = \arctg z$, отвечающие $M=1$, $Re=100$, $\varphi_w=0,169$; $n=1$ и $\theta=0,9$.

Для сравнения на фигуре представлены результаты расчетов, отвечающие приближению Навье – Стокса (штрихом) и приближению Барнетта (штрихпунктиром), которые заимствованы из работы [1].

Отчетливо видно отличие в поведении кривых для величины $P^*=P/P(0)$ для различных приближений. Отметим также, что в приближении Грэда $E_w/E_s=0,95$, в то время как в приближении Навье – Стокса и Барнетта E_w/E_s равняется соответственно 1,04 и 1,03.

Последнее объясняется тем, что в данной работе при расчете температурного скачка на стенке учитывались дополнительные члены, которые по величине сравнимы с основными.

На фиг. 2 приведены аналогичные результаты, отвечающие случаю $M=2$, $Re=1000$ и качественно совпадающие с предыдущими.

ЛИТЕРАТУРА

1. Быркин А. П. Некоторые классы автомодельных решений уравнений Барнетта. – Уч. зап. ЦАГИ, 1979, т. 10, № 1, с. 46–54.
2. Williams J. C. Conical nozzle flow with velocity slip and temperature jump. – AIAA Journal, 1967, v. 5, № 12, p. 2128–2134.
3. Shidlovski V. P. Special case of viscous gas motion in cylindrical tube in slip flow regime. – In: Rarefied gas dynamics. N. Y. – London: Acad. Press, 1969, v. 1, p. 215–223.

4. *Быркин А. П.* Об одном точном решении уравнений Навье – Стокса для сжимаемого газа. – ПММ, 1969, т. 33, вып. 1, с. 152–157.
5. *Щенников В. В.* Об одном классе точных решений уравнений Навье – Стокса для случая сжимаемого теплопроводного газа. – ПММ, 1969, т. 33, вып. 3, с. 582–584.
6. *Быркин А. П.* О точных решениях уравнений Навье – Стокса для течения сжимаемого газа в каналах. – Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 6, с. 15–21.
7. *Кронрод В. А., Щенников В. В.* Об одном точном решении уравнений Навье – Стокса для химически реагирующей смеси газов. – ПМТФ, 1973, № 4, с. 49–56.
8. *Гущин В. А., Щенников В. В.* Об одном классе точных решений уравнений Навье – Стокса для случая сжимаемого тепло- и электропроводящего газа. – Тр. Моск. физ.-техн. ин-та. Сер. Аэрофизика. Прикладная математика, 1971, с. 25–35.
9. *Быркин А. П.* Автомодельные течения вязкого проводящего газа в канале при наличии скрещенного электромагнитного поля. – Уч. зап. ЦАГИ, 1972, т. 3, № 1, с. 93–102.
10. *Галкин В. С.* Об одном классе решений уравнений кинетических моментов Грэда. – ПММ, 1958, т. 22, вып. 3, с. 386–389.
11. *Шидловский В. П.* Введение в динамику разреженного газа. М.: Наука, 1965. 248 с.

Москва

Поступила в редакцию
4.III.1980