

УДК 532.526.2-3

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ  
НА ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛАХ С ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ**

БРЫКИНА И. Г., ГЕРШБЕЙН Э. А., ПЕЙГИН С. В.

Численными и приближенными аналитическими методами исследуется ламинарный пространственный пограничный слой на затупленных телах с проницаемой поверхностью, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. В первом приближении интегрального метода последовательных приближений получено аналитическое решение задачи для непроницаемой поверхности, малых значений параметра вдува и произвольного отсоса. Для больших значений параметра вдува (отсоса), вектор скорости которого в общем случае направлен под некоторым углом к вектору внешней нормали к телу, приведены асимптотические формулы для компонент напряжения трения и теплового потока. Получено численное решение уравнений пространственного пограничного слоя в широком диапазоне изменения параметра вдува (отсоса). Путем сравнения численных и аналитических решений оценивается точность и область применимости последних.

На основании решений, полученных в данной работе, и работ других авторов предлагается формула для расчета тепловых потоков к идеально каталитической поверхности тел, пространственно обтекаемых сверхзвуковым потоком диссоциированного или ионизованного воздуха.

Настоящая работа является продолжением работ [1, 2], где исследовались пограничные слои в окрестности плоскости симметрии и на стреловидных крыльях бесконечного размаха.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим течение в ламинарном пространственном пограничном слое на затупленном теле, обтекаемом сверхзвуковым потоком газа. Выберем невырожденную систему координат  $(\xi^*, \eta^*, \zeta^*)$  с началом в критической точке, нормально связанную с обтекаемой поверхностью:  $\zeta^* = \text{const}$  — семейство поверхностей, параллельных поверхности тела ( $\zeta^* = 0$ ),  $\xi^*$  и  $\eta^*$  — криволинейные координаты на поверхности тела. Метрика пространства  $R^3$ , записанная в приближении пограничного слоя, выражается формулой  $ds^{*2} = g_{11}^* d\xi^{*2} + 2g_{12}^* d\xi^* d\eta^* + g_{22}^* d\eta^{*2} + d\zeta^{*2}$ , где  $g_{ij}^*$  — ковариантные составляющие основного метрического тензора. Уравнения пространственного пограничного слоя в сжимаемом газе в системе координат  $(\xi^*, \eta^*, \zeta^*)$  имеют вид [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left( \rho^* u^* \sqrt{\frac{g_0^*}{g_{11}^*}} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta^*} \left( \rho^* w^* \sqrt{\frac{g_0^*}{g_{22}^*}} \right) + \sqrt{g_0^*} \frac{\partial}{\partial \zeta^*} (\rho^* v^*) &= 0 \\ \rho^* (D^* u^* + A_1 u^{*2} + A_2 w^{*2} + A_3 u^* w^*) &= A_4 + \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left( \mu^* \frac{\partial u^*}{\partial \zeta^*} \right) \\ \rho^* (D^* w^* + B_1 u^{*2} + B_2 w^{*2} + B_3 u^* w^*) &= B_4 + \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left( \mu^* \frac{\partial w^*}{\partial \zeta^*} \right) \\ \rho^* D^* H^* &= \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left\{ \mu^* \left[ \frac{\partial H^*}{\partial \zeta^*} + \frac{(\sigma-1)}{2} \frac{\partial}{\partial \zeta^*} (u^{*2} + w^{*2} + 2 \cos \psi u^* w^*) \right] \right\} \\ c_p \rho^* D^* T^* &= Dp^* + \mu^* \left[ \left( \frac{\partial u^*}{\partial \xi^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial w^*}{\partial \xi^*} \right)^2 + 2 \cos \psi \frac{\partial u^*}{\partial \xi^*} \frac{\partial w^*}{\partial \xi^*} \right] + \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial}{\partial \xi^*} \left( \frac{\mu^* c_p}{\sigma} \frac{\partial T^*}{\partial \xi^*} \right), \quad \frac{\partial p^*}{\partial \xi^*} = 0 \\
 p^* &= \rho^* R_A T^*, \quad \cos \psi = g_{12}^* / \sqrt{g_{11}^* g_{22}^*}, \quad D^* \equiv D + v^* \frac{\partial}{\partial \xi^*} \\
 g_0^* &= g_{11}^* g_{22}^* - g_{12}^{*2}, \quad D \equiv \frac{u^*}{\sqrt{g_{11}^*}} \frac{\partial}{\partial \xi^*} + \frac{w^*}{\sqrt{g_{22}^*}} \frac{\partial}{\partial \eta^*}
 \end{aligned}$$

Здесь  $u^*$ ,  $w^*$ ,  $v^*$  — физические составляющие вектора скорости в направлениях  $\xi^*$ ,  $\eta^*$ ,  $\zeta^*$  соответственно;  $T^*$ ,  $\rho^*$ ,  $p^*$ ,  $H^*$ ,  $\mu^*$ ,  $c_p = \text{const}$ ,  $\sigma = \text{const}$ ,  $R_A$  — температура, плотность, давление, полная энтальпия, коэффициент вязкости ( $\mu^* \sim T^{*w}$ ), теплоемкость газа, число Прандтля, универсальная газовая постоянная. Коэффициенты  $A_i(\xi^*, \eta^*)$ ,  $B_i(\xi^*, \eta^*)$  ( $i=1 \div 4$ ), являющиеся известными функциями компонент метрического тензора и давления на поверхности, приведены в [3].

Граничные условия для системы (1.1) следующие:

$$\begin{aligned}
 \zeta^* = 0: \quad u^* &= u_w^*, \quad w^* = w_w^*, \quad T^* = T_w^* \quad (H^* = H_w^*), \quad \rho^* v^* = \rho_w^* v_w^* \\
 \zeta^* \rightarrow \infty: \quad u^* &\rightarrow u_e, \quad w^* \rightarrow w_e, \quad T^* \rightarrow T_e \quad (H^* \rightarrow H_e = \text{const})
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь индексы  $w$  и  $e$  соответствуют значениям переменных на поверхности тела и на внешней границе пограничного слоя.

Будем далее рассматривать такие формы поверхности тела, при которых градиент давления  $\nabla p^*(\xi^*, \eta^*)$  является величиной порядка  $O(\rho_\infty V_\infty^2 / R)$ . Как показывает асимптотический анализ уравнений Навье — Стокса для случая гиперзвукового обтекания затупленных тел при наличии ддува при выполнении условий

$$\frac{\rho_w^* v_w^*}{\rho_\infty V_\infty} \ll 1, \quad \lambda = \frac{\rho_w^* v_w^{*2}}{\rho_\infty V_\infty^2} \ll 1, \quad \text{Re}_\infty = \frac{\rho_\infty v_\infty R}{\mu_0^*} \gg 1$$

данные уравнения пограничного слоя асимптотически верно описывают течение в пристенном слое около поверхности тела. При этом индуцированный градиент давления является величиной  $O(\sqrt{\lambda} \nabla p^*)$ , и им в первом приближении можно пренебречь.

Перейдем к новым безразмерным переменным, отнеся все линейные размеры к характерному размеру тела  $R$ :

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= ds^{*2} R^{-2} = g_{11} d\xi^2 + 2g_{12} d\xi d\eta + g_{22} d\eta^2 + d\zeta^2 R^{-2} \\
 \rho &= \rho^* / \rho_e, \quad \mu = \mu^* / \mu_e, \quad T = T^* / T_e, \quad l = \mu \rho \\
 \zeta &= \sqrt{\frac{u_e \rho_e}{\mu_e R \xi}} \int_0^{\zeta} \rho d\zeta, \quad u = f_{\zeta'} = \frac{u^*}{u_e}, \quad w = \varphi_{\zeta'} = \frac{w^*}{w_e}
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$v = v^* \rho \sqrt{\frac{\rho_e R \xi}{\mu_e u_e}} + \frac{R \xi u}{\sqrt{g_{11}}} \zeta_{\xi'} + \frac{R \alpha \xi w}{\sqrt{g_{22}}} \zeta_{\eta'}, \quad g = \frac{H^* - H_w^*}{H_e - H_w^*}$$

Уравнения (1.1) в переменных (1.3) примут вид:

$$\begin{aligned}
 (lu_{\zeta'})_{\zeta'} &= D^\circ u + \beta_1 u (u^2 - T) + \beta_2 u (w^2 - T) + \beta_3 u (uw - T) \\
 (lw_{\zeta'})_{\zeta'} &= D^\circ w + \beta_1 w (u^2 - T) + \beta_2 w (w^2 - T) + \beta_3 w (uw - T)
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\left\{ \frac{l}{\sigma} [g_{\zeta'} - (\varphi_1 u^2 + \varphi_2 w^2 + \varphi_3 u w)_{\zeta'}] \right\}'_{\zeta} = D^{\circ} g - \beta_1^g u (1-g) -$$

$$- \beta_2^g w (1-g), \quad -v = \beta_u f + \alpha \beta_w \varphi + \xi (g_{11}^{-1/2} f_{\xi}' + \alpha g_{22}^{-1/2} \varphi_{\eta}')$$

$$\left( \frac{l}{\sigma} T_{\zeta'} \right)'_{\zeta} = D^{\circ} T - l [\lambda_1 (u_{\zeta}')^2 + \lambda_2 (w_{\zeta}')^2 + \lambda_3 u_{\zeta}' w_{\zeta}']$$

$$D^{\circ} \equiv \xi \left( u g_{11}^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \alpha w g_{22}^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \quad \beta_1^u = \frac{\xi}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \ln u_e}{\partial \xi} + \xi A_1^{\circ}$$

$$\beta_3^u = \alpha \xi (g_{22}^{-1/2} (\ln u_e)_{\eta}' + A_3^{\circ}), \quad \beta_2^u = \alpha^2 \xi A_2^{\circ}, \quad \beta_1^w = \xi B_1^{\circ} / \alpha$$

$$\beta_2^w = \alpha \xi (g_{22}^{-1/2} (\ln w_e)_{\eta}' + B_2^{\circ}), \quad \beta_3^w = \xi (g_{11}^{-1/2} (\ln w_e)_{\xi}' + B_3^{\circ})$$

$$\beta_u = \frac{\xi}{2\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \ln (u_e \mu_e \rho_e \xi g_0 / g_{11})}{\partial \xi}, \quad \beta_1^g = \frac{\xi}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \ln (1-H_w)}{\partial \xi}$$

$$\beta_w = \frac{\xi}{2\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \ln (\alpha w_e \mu_e \rho_e g_0 / g_{22})}{\partial \eta}, \quad \beta_2^g = \frac{\alpha \xi}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \ln (1-H_w)}{\partial \eta}, \quad \alpha = \frac{w_e}{u_e}$$

$$\varphi_1 = \frac{1-\sigma}{1-H_w} \frac{u_e^2}{2H_e}, \quad \varphi_2 = \alpha^2 \varphi_1, \quad \varphi_3 = 2 \cos \psi \sqrt{\varphi_1 \varphi_2}$$

$$\lambda_1 = u_e^2 / (c_p T_e), \quad \lambda_2 = w_e^2 / (c_p T_e), \quad \lambda_3 = 2 \cos \psi \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$$

$$A_i^{\circ} = R A_i, \quad B_i^{\circ} = R B_i \quad (i=1, 2, 3), \quad \varphi_i = 1 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3$$

Граничные условия для системы (1.4) следующие:

$$\zeta=0: u=u_w, \quad w=w_w, \quad T=T_w (g=0), \quad v=B=v_w * \rho_w * \sqrt{\frac{R\xi}{\mu_e \rho_e u_e}}$$

$$\zeta \rightarrow \infty: u \rightarrow 1, \quad w \rightarrow 1, \quad T \rightarrow 1 \quad (g \rightarrow 1) \quad (1.5)$$

**2. Решение уравнений методом последовательных приближений. Общее аналитическое решение задачи в первом приближении.** Уравнения (1.4) будем решать методом последовательных приближений аналогично [1, 2]. Ранее этот метод для двумерных задач пограничного слоя был предложен в [4]. В дальнейшем, в ином виде (по-другому вводились управляющие функции и организовывался итерационный процесс), метод использовался для решения уравнений пространственного пограничного слоя (см. [3]).

Уравнения импульсов и энергии для полной энтальпии путем двойного интегрирования по координате  $\xi$  (от  $\xi$  до  $\infty$  и от 0 до  $\xi$ ) с учетом граничных условий ( $u_w = w_w = 0$ ) сводятся к системе интегродифференциальных уравнений, для которой строится итерационный процесс, выражающий каждое последующее приближение для искомого функций через предыдущее. Для того чтобы все приближения удовлетворяли граничным условиям на внешней границе, на каждом шаге итерационного процесса вводятся дополнительные управляющие функции  $\delta_i^{(n+1)}$  ( $i=u, w, g$ ), и производится переход к вспомогательным поперечным координатам

$$\zeta_i^{(n)} = \xi / \sqrt{\delta_i^{(n+1)}} \quad (2.1)$$

Итерационный алгоритм, по которому, задав каким-либо способом нулевое приближение, можно определить все последующие приближения для искомого функций, аналогичен по виду алгоритму, приведенному в [2],

и поэтому здесь не приводится. Отметим только, что в отличие от [2] для определения  $\delta_i^{(n+1)}$  ( $i=u, w, g$ ) получаются уравнения в частных производных, которые в случае отсутствия вдува решаются в квадратурах вдоль характеристик для любого приближения. Характеристики в общем случае находятся численно. При обтекании проницаемой поверхности решение уравнений для  $\delta_i^{(n+1)}$  может быть найдено путем численного интегрирования либо аналитически в приближении локальной автомодельности. При малых значениях параметра вдува (отсоса) эти решения можно получить в квадратурах асимптотическим методом при  $B \rightarrow 0$ .

В первом приближении изложенного метода были получены аналитические формулы для компонент скорости, энтальпии, коэффициентов трения и теплопередачи при двух способах задания нулевого приближения:

$$u^{(0)} = w^{(0)} = g^{(0)} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \quad (2.2)$$

$$u^{(0)} = w^{(0)} = g^{(0)} = 1 - \exp(-\zeta) \quad (2.3)$$

Выпишем здесь формулы, полученные для коэффициентов трения и теплопередачи в случае нулевого приближения (2.2)

$$c_{f_i} = \frac{0,23}{B_{\infty} \sqrt{\delta_i}} + 0,47\beta^i \sqrt{\delta_i} \left[ 1 - \frac{\Phi_1}{2B_{\infty}} + H_w \left( 2,4 - \frac{\Phi_2}{2B_{\infty}} \right) \right] - 2D$$

$$(i=u, w) \quad c_q = \frac{0,12\Phi_1}{\alpha B_{\infty} \sqrt{\delta_g}} + 0,23\beta^g \sqrt{\delta_g} \left( 1 - \frac{\Phi_1}{2B_{\infty}} \right) - D \quad (2.4)$$

$$c_{f_u} = \frac{2\tau_u \xi \sqrt{Re}}{\rho_e u_e^2}, \quad c_{f_w} = \frac{2\tau_w \eta \sqrt{Re}}{\rho_e u_e w_e}, \quad c_q = \frac{q \sqrt{Re}}{\rho_e u_e (H_e - H_w^*)}$$

$$\tau_u \xi = \mu^* \frac{\partial u^*}{\partial \xi^*}, \quad \tau_w \eta = \mu^* \frac{\partial w^*}{\partial \xi^*}, \quad q = \lambda \frac{\partial T^*}{\partial \xi^*}$$

$$\beta^i = H_e (\beta_1^i + \beta_2^i + \beta_3^i) / (c_p T_e) \quad (i=u, w), \quad \beta^g = \beta_1^g + \beta_2^g$$

$$Re = \frac{u_e \rho_e R \xi}{\mu_e}, \quad B_{\infty} = 0,068 + 0,057 l_w$$

$$\Phi_1 = 0,068 + 0,091 l_w, \quad \Phi_2 = 0,091 + 0,16 l_w$$

$$D = B(1 - 0,117 D_{\infty} / B_{\infty}), \quad D_{\infty} = 0,234 + 0,33 l_w, \quad l_w = T_w^{1/2}$$

Функции  $\delta_i(\xi, \eta)$  при отсутствии вдува или отсоса с поверхности находятся по формулам:

$$\delta_i = (FG_i \xi)^{-1} \int_0^{\xi} \frac{\alpha_i F G_i}{B_{\infty}} \sqrt{g_{11}} d\xi \quad (i=u, w, g) \quad (2.5)$$

$$F = \frac{u_e \mu_e \rho_e g_0 E}{g_{11}}, \quad E = \exp \left( 2 \int_0^{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \alpha \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \right) d\xi \right), \quad \alpha_g = \frac{\Phi_1}{\sigma}$$

$$G_g = \exp \int_0^{\xi} \frac{\beta^g \Phi_1 \sqrt{g_{11}}}{\xi B_{\infty}} d\xi, \quad \alpha_i = 1, \quad G_i = \exp \int_0^{\xi} \frac{\beta^i (\Phi_1 + H_w \Phi_2)}{\xi B_{\infty} g_{11}^{1/2}} d\xi \quad (i=u, w)$$

Здесь интегралы берутся вдоль линий тока внешнего невязкого тече-

ния на поверхности тела

$$\sqrt{g_{11}}d\xi/\sqrt{g_{22}}d\eta = u_e/w_e$$

В случае обтекания проницаемой поверхности функции  $\delta_i$  можно определить аналитически в виде ряда по  $B$ . При этом нулевое приближение дается формулой (2.5); последующие — этой же формулой при формальной замене  $\alpha_i$  на  $\alpha_i + BD_\infty \sqrt{\delta_{ik}}$ , где  $k$  — номер приближения в разложении решения в ряд по малому  $B$ .

При обтекании осесимметричных тел и стреловидных крыльев различной формы под углом атаки, а также в окрестности плоскости симметрии затупленных трехмерных тел, распределения вдоль непроницаемой охлажденной поверхности величин теплового потока и компонент напряжения трения, отнесенных к своим значениям в критической точке, слабо зависят от вида нулевого приближения [1, 2]. Аналогичный результат получен в настоящей работе для всей поверхности затупленного тела при пространственном его обтекании.

Для относительных распределений величин теплового потока и компонент напряжения трения вдоль непроницаемой охлажденной поверхности получены приближенные формулы, не зависящие от вида нулевого приближения:

$$q^* = \frac{q(\xi, \eta)}{q(0, 0)} = \frac{\varphi_i u_e \mu_e \rho_e (E g_0 / g_{11})^{1/2}}{\left[ 2\beta_0 u_{e\xi}'(0, 0) \int_0^\xi \varphi_i F \sqrt{g_{11}} d\xi \right]^{1/2}} \quad (2.6)$$

$$\tau_{i*} = \frac{\tau_i(\xi, \eta)}{\tau_i(0, 0)} = \psi_i \left( \frac{u_e \mu_e \rho_e}{\xi u_{e\xi}'(0, 0)} \right)^{1/2} \frac{\sqrt{2\beta_0 + \beta_0^i} (1 + \delta_{i*} \beta^i)}{2\sqrt{\delta_{i*}} (\beta_0 + \beta_0^i)} \quad (2.7)$$

$$\delta_{i*} = (\xi F G_i)^{-1} \int_0^\xi F G_i \sqrt{g_{11}} d\xi, \quad G_i = \exp \int_0^\xi \beta^i \xi^{-1} \sqrt{g_{11}} d\xi \quad (i=u, w)$$

$$\psi_u = u_e / \xi u_{e\xi}'(0, 0), \quad \psi_w = w_e / \eta w_{e\eta}'(0, 0)$$

Здесь индекс 0 показывает, что значения коэффициентов  $\beta$ ,  $\beta^i$  берутся в критической точке; интегралы берутся вдоль линий тока внешнего вязкого течения на поверхности тела.

Формулы (2.7) для простоты выписаны для сильно охлажденной поверхности тела ( $T_w \ll 1$ ). Следует отметить, что величины  $\tau_u^*$  и  $\tau_w^*$  слабо зависят от температуры стенки, что подтверждается и численными расчетами (см. п. 5).

В случае пространственного течения в окрестности плоскости симметрии формулы (2.6), (2.7) переходят в соответствующие формулы работы [2], а в случае осесимметричного течения — в формулы работы [1].

**3. Асимптотические формулы для компонент напряжения трения и теплового потока при сильно наклонном вдуве и отсосе.** Обобщим полученные в [5, 6] асимптотические решения при интенсивном нормальном вдуве и отсосе на случай, когда вектор скорости вдува (отсоса) составляет некоторый угол с вектором внешней нормали к телу. Решая асимптотические уравнения, в первом приближении получаем следующие размерные формулы для компонент напряжения трения и теплового потока на по-

верхности тела (индексы \* и  $w$  опускаем):

$$\mu \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\mu}{\rho v} [A_4 - \rho(Du + A_1 u^2 + A_2 w^2 + A_3 uw)] \quad (3.1)$$

$$\mu \frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{\mu}{\rho v} [B_4 - \rho(Dw + B_1 u^2 + B_2 w^2 + B_3 uw)]$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\mu}{\sigma \rho v} D(p - c_p \rho T)$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial \xi} = -(\rho v)_w (u_e - u_w), \quad \mu \frac{\partial w}{\partial \xi} = -(\rho v)_w (w_e - w_w) \quad (3.2)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} = -(\rho v)_w \{c_p (T_e - T_w) + 0,5 [(u_e - u_w)^2 + (w_e - w_w)^2 + 2 \cos \psi (u_e - u_w)(w_e - w_w)]\}$$

Здесь формулы (3.1) и (3.2) соответствуют случаю сильного наклонного вдува и сильного наклонного отсоса.

Придонные линии тока, обычно определяемые векторными линиями напряжения трения на поверхности, в первом приближении при сильном нормальном вдуве совпадают с векторными линиями градиента давления, а при интенсивном нормальном отсосе — с линиями тока внешнего невязкого течения на поверхности тела [5, 6]. В случае косо направленного вдува (отсоса) придонные линии тока определяются тангенциальными составляющими вектора скорости вдува (отсоса) и в общем случае не совпадают с векторными линиями напряжения трения на поверхности, которые в первом приближении находятся на основе формул (3.1) и (3.2).

Асимптотические выражения для профилей скоростей и температуры поперек пограничного слоя приведены в [7]. Отметим только, что характер поведения профилей скоростей в пристеночной области пограничного слоя существенно зависит от соотношений между  $u_w$ ,  $w_w$ ,  $T_w$ . Например, наличие касательной составляющей у вектора скорости вдува может привести к появлению локального экстремума в профилях скорости.

**4. Численное решение задачи конечно-разностным способом.** Для численного интегрирования исходная система (1.1) (использовалось уравнение энергии, записанное для температуры) преобразовывалась к новым переменным по формулам, отличавшимся от (1.3) способом введения нормальной координаты, которая имела вид:

$$\xi^0 = \sqrt{\frac{g_0}{g_{11}}} \frac{u_e}{\xi} (\mu_0^{*2} \text{Re}_\infty)^{-1/2} \int_0^{\xi^0} \rho^* d\xi^* \quad (4.1)$$

Граничные условия при этом совпадали по своему виду с (1.5), за исключением условия на поверхности тела для функций тока, которое в данном случае записывалось следующим образом:

$$(\xi^0)' + \left( \xi \alpha \varphi \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}} \right)' = F_w = - \frac{\rho_w^* v_w^*}{\rho_\infty V_\infty} \sqrt{\text{Re}_\infty g_0} \quad (4.2)$$

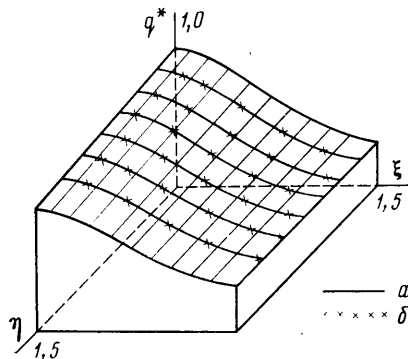
Полученная таким образом система уравнений с граничными условиями (1.5), (4.2) решалась численно на ЭВМ БЭСМ-6. Использовалась неявная четырехточечная

разностная схема с точностью аппроксимации  $O(\Delta\xi)^4 + O(\Delta\eta)^2 + O(\Delta\eta)^2$ , представляющая собой обобщение на пространственный случай схемы Петухова [8], предложенной им для расчета двумерных течений в пограничном слое.

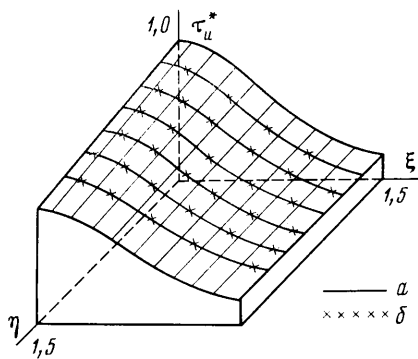
При конкретных расчетах  $\xi$  и  $\eta$  выбирались следующим образом. Пусть  $z = \Phi(x, y)$  — уравнение поверхности обтекаемого тела в декартовой системе координат. Введем следующую параметризацию поверхности:  $x = \xi$ ,  $y = \eta$ ,  $z = \Phi(\xi, \eta)$ . При этом компоненты основного метрического тензора имеют вид

$$g_{11} = 1 + (\Phi'_\xi)^2, \quad g_{22} = 1 + (\Phi'_\eta)^2, \quad g_{12} = \Phi'_\xi \Phi'_\eta$$

Рассматривалось течение однородного сжимаемого газа в ламинарном пограничном слое около эллиптических параболоидов (уравнение  $z = \frac{1}{2}(x^2 + ky^2)$ ), обтекаемых под нулевым углом атаки. В расчетах принималось:  $\gamma = 1,1-1,4$ ;  $\sigma = 0,71$ ;  $\omega = 0,5-0,95$ ;  $-5 \leq F_w = \text{const} \leq 5$ ;  $H_w = 0,01-0,5$ ;  $k = 0,01-1,0$ ;  $0 \leq \xi, \eta \leq 1,5$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

На внешней границе пограничного слоя расчет параметров производился численно конечно-разностным методом с точностью аппроксимации  $O(\Delta\xi)^2 + O(\Delta\eta)^2$ . Давление задавалось по модифицированной формуле Ньютона  $p^*/p_0^* = \cos^2 \varphi$ , где  $p_0^*$  — давление в критической точке,  $\varphi$  — угол между вектором скорости набегающего потока и вектором внешней нормали к телу.

## 5. Сопоставление аналитических и численных решений. Обсуждение результатов расчетов.

1. *Тепловой поток и коэффициенты трения на непроницаемой поверхности.* Сравнение аналитического решения в первом приближении с численным, проведенное для эллиптических параболоидов различной формы в широком диапазоне изменения определяющих параметров задачи, показало, что отличие абсолютных значений коэффициентов трения и теплообмена, подсчитанных по формулам (2.4) и полученных из численного решения, не превышает 20% для всех вариантов расчета; отличие же относительных величин, выраженных формулами (2.6), (2.7), от численных значительно меньше.

Характерные зависимости распределений  $q^*$ ,  $\tau_u^*$  вдоль непроницаемой поверхности эллиптического параболоида ( $k=0,25$ ;  $H_w=0,1$ ) приведены на фиг. 1—2 соответственно. Кривые *a* — численные решения, кривые *b* — расчет по формулам (2.6), (2.7). Сравнение распределений  $q^*$ ,  $\tau_u^*$ ,  $\tau_w^*$ , подсчитанных по приближенным аналитическим формулам, с численным решением показало хорошую точность (менее 5%) полученных формул для всей области поверхности тела, где производились расчеты.

Анализ полученных решений показал, что при заданной форме тела относительные величины теплового потока и компонент напряжения трения слабо зависят от параметров  $\gamma$  и  $\omega$ , а также от температуры поверхности (при  $H_w = \text{const} \leq 0,5$ ). Например, значения  $q^*$ , подсчитанные при  $H_w = 0,1$  ( $k=0,25$ ), изменялись по сравнению с этими же величинами, подсчитанными при  $H_w = 0,01$ , менее чем на 2%, а при  $H_w = 0,5$  это изменение

составляло величину порядка 5%. Изменение  $\omega$  от 0,5 до 0,95 при фиксировании прочих условий обтекания приводило к изменению  $q^*$  на 5—6%, а величины  $\tau_u^*$ ,  $\tau_w^*$  изменялись на 7—8%. Варьирование параметра  $\gamma$  показало, что величины  $q^*$ ,  $\tau_u^*$ ,  $\tau_w^*$  изменяются при этом также слабо.

2. *Тепловой поток к поверхности затупленного трехмерного тела с идеально каталитической активностью, обтекаемого потоком диссоциированного и ионизованного газа.* Ранее в ряде работ было показано [9, 10], что при обтекании затупленных осесимметричных тел потоком химически реагирующего газа распределение теплового потока вдоль непроницаемой идеально каталитической поверхности, отнесенного к своему значению в критической точке, слабо зависит от степени диссоциации и практически совпадает с относительным распределением  $q^*$ , полученным для случая течения однородного сжимаемого газа. Аналогичный результат получен в работе [11] для случая течения ионизованного газа с различной степенью ионизации в пограничном слое на сфере.

Будем полагать, что и в случае обтекания затупленного трехмерного тела с идеально каталитической поверхностью тепловой поток, отнесенный к своему значению в критической точке, слабо зависит от степени диссоциации или ионизации газа. Это предположение косвенно подтверждается результатами численных расчетов настоящей работы, которые показали слабую зависимость относительного теплового потока от  $\gamma$  и  $\omega$ .

С учетом этого можно предложить следующую формулу для определения теплового потока к непроницаемой идеально каталитической поверхности затупленного тела при пространственном его обтекании потоком химически реагирующего газа:

$$q = q^* q_0 q^\circ \quad (4.1)$$

Здесь  $q^\circ$  — тепловой поток в критическую точку осесимметричного тела, определяемый, например, по формуле Фэя и Ридделла [12]

$$q^\circ = 0,76 \sigma^{-0,8} L_w^{0,4} (h_e - h_w) (\rho_e \mu_e u_{e\tau})^{1/2} \left[ 1 + \frac{h_d}{h_e} (L_e^{\alpha^*} - 1) \right] \quad (4.2)$$

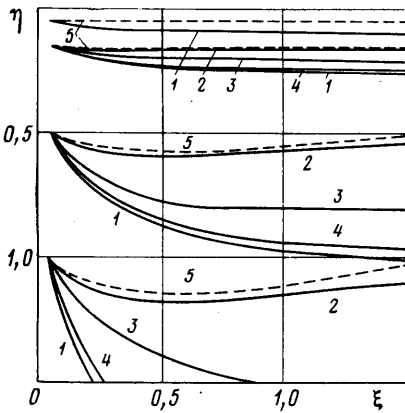
где  $h_d$  — теплота диссоциации,  $L_e$  — число Льюиса,  $\alpha^* = 0,63$  и  $0,52$  для замороженного и равновесного течений в пограничном слое соответственно. При тении ионизованного газа величина  $q^\circ$  определяется по формуле (2.2) работы [11]. Величина  $q_0$ , представляющая собой отношение теплового потока в критическую точку осесимметричного тела, определяется по формуле (2.11) работы [13], а величина  $q^*$  находится по формуле (2.6) настоящей работы.

3. *Ламинарный пограничный слой на проницаемой поверхности.* Анализ полученных решений показал, что, так же как и в случае течения на непроницаемой поверхности, относительные величины слабо меняются в зависимости от параметров  $\omega$ ,  $\gamma$ ,  $T_w$ , причем при сильном отсосе это изменение особенно мало. Максимум  $q^*$ ,  $\tau_u^*$ ,  $\tau_w^*$  при любых значениях параметра отсоса и умеренных вдувах ( $F_w = \text{const} > -2$ ) достигается в критической точке. При сильном вдуве характер поведения  $\tau_u^*$  и  $\tau_w^*$  остается таким же, в то время как относительный тепловой поток имеет минимум в критической точке. Это объясняется тем, что при сильном вдуве тепловой поток в критической точке имеет экспоненциальную зависимость от параметра вдува, в то время как на боковой поверхности эта зависимость является степенной.

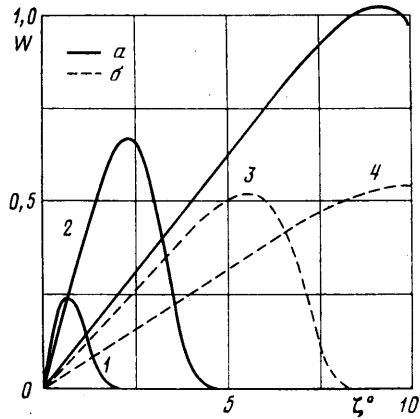
Расчеты также показали, что форма тел и касательные составляющие вектора скорости вдува могут существенно изменять относительные характеристики течения.



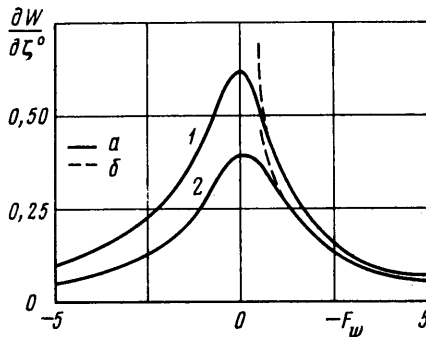
Некоторые результаты расчетов течения в пограничном слое на проницаемой поверхности приведены на фиг. 3—5. На фиг. 3 для  $k=0,25$ ,  $u_w=w_w=0$ ,  $T_w=0,5$  приведены предельные линии тока на поверхности тела при  $F_w=-3; 0; 3$  (кривые 2—4 соответственно). Здесь же приведены линии тока внешнего невязкого течения на поверхности тела (кривая 1) и векторные линии градиента давления (кривая 5). Видно, что, как и следует из асимптотического решения, предельные линии тока стремятся к линиям тока внешнего невязкого течения на поверхности тела при сильном отсосе и к векторным линиям градиента давления при сильном вдуве.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Характер вторичных течений в пограничном слое хорошо виден на фиг. 4, где приведены профили безразмерной скорости  $W=W*V_e/(u_e w_e \times \sin \psi)$  поперек пограничного слоя ( $V_e$  — модуль вектора скорости на внешней границе пограничного слоя,  $W*$  — проекция вектора скорости на нормаль к линии тока внешнего невязкого течения на поверхности тела). Здесь  $k=0,25$ ,  $\xi=1,45$ ,  $\eta=0,3$ ; кривые  $a$  и  $b$  —  $u_w=w_w=0$  и  $0,2$ ; кривые 1—4 —  $F_w=0, -1, -3, -5$  соответственно. Данные профили позволяют оценить влияние вдува на характер вторичных течений внутри пограничного слоя. Видно, что при сильном вдуве ( $-F_w=3$ ) интенсивность вторичных течений возрастает и по сравнению с непроницаемой поверхностью максимум  $W$  увеличивается более чем в 3 раза. С увеличением отсоса вторичные течения для данного случая задания граничных условий ослабевают (максимальное значение  $W=0,01$  при  $F_w=3$ ) и в пределе при  $F_w \rightarrow \infty$  исчезают. На фиг. 5 приведена зависимость  $\partial W/\partial \zeta^\circ$  на поверхности тела

от параметра вдува для двух случаев задания касательных составляющих вектора скорости вдуваемого газа. Здесь кривые 1 и 2  $u_w = w_w = 0$  и 0,2; кривые  $a$  и  $b$  — численное и асимптотическое решения соответственно. Отметим, что в данном случае максимальное значение  $\partial W / \partial \xi^\circ$  принимает на непроницаемой поверхности, а при  $|F_w| \rightarrow \infty$   $\partial W / \partial \xi^\circ \rightarrow 0$ .

Таким образом, сравнение численных и асимптотических решений пространственного ламинарного пограничного слоя показывает, что полученные асимптотические формулы имеют удовлетворительную точность при  $|F_w| \geq 3-5$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Брыкина И. Г., Гершбейн Э. А., Пейгин С. В. Ламинарный пограничный слой на стреловидных крыльях бесконечного размаха, обтекаемых под углом атаки.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 3, с. 27–39.
2. Брыкина И. Г., Гершбейн Э. А., Пейгин С. В. Ламинарный пространственный пограничный слой на проницаемой поверхности в окрестности плоскости симметрии.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 5, с. 37–48.
3. Шевелев Ю. Д. Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя. М.: Наука, 1977. 223 с.
4. Тирский Г. А. Метод последовательных приближений для интегрирования уравнений ламинарного многокомпонентного пограничного слоя с химическими реакциями, включая реакции ионизации. М.: Ин-т механ. МГУ. Отчет, 1970, № 1016. 51 с.
5. Гершбейн Э. А. Асимптотическое решение уравнений трехмерного ламинарного многокомпонентного пограничного слоя при сильном вдуве.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 2, с. 47–56.
6. Гершбейн Э. А. Асимптотическое решение уравнений трехмерного ламинарного многокомпонентного пограничного слоя при интенсивном отсосе.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 4, с. 41–45.
7. Гершбейн Э. А., Пейгин С. В. О численных и асимптотических решениях уравнений пространственного пограничного слоя на проницаемой поверхности.— В кн.: Гиперзвуковые пространственные течения при наличии физико-химических превращений. М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 52–71.
8. Пегузов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое.— В кн.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1964, с. 304–325.
9. Kemp N., Rose P., Detra R. Laminar heat transfer around blunt bodies in dissociated air.— J. Aerospace S., 1959, v. 26, № 7, p. 421–430.
10. Мурзинов И. Н. Ламинарный пограничный слой на сфере в гиперзвуковом потоке равномерно диссоциирующего воздуха.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 2, с. 184–188.
11. Сулов О. Н. Многокомпонентная диффузия и теплообмен при обтекании тела химически равновесным ионизованным газом.— ПМТФ, 1972, № 3, с. 53–59.
12. Фэй, Ридделл. Теоретический анализ теплообмена в передней критической точке, омываемой диссоциированным воздухом.— В кн.: Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций. М.: Изд-во иностр. лит., 1962, с. 190–224.
13. Тирский Г. А. Определение тепловых потоков в окрестности критической точки двойной кривизны при обтекании тела диссоциирующим газом произвольного химического состава.— ПМТФ, 1965, № 1, с. 45–56.

Москва

Поступила в редакцию  
3.XII.1980