

УДК 532.516.013.4:536.25

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КОМБИНИРОВАННОГО КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ

ЛОБОВ Н. И.

Замкнутое конвективное течение в бесконечном плоском вертикальном слое, подогреваемом сбоку, образовано двумя встречными потоками. Взаимодействие возмущений и основного течения и присутствие в спектре не только гидродинамических (как в случае изотермических течений), но и тепловых мод неустойчивости приводят к сложной картине кризиса [1]. С существованием границы раздела встречных потоков связан гидродинамический механизм неустойчивости, имеющий невязкую природу. Развитием возмущений — вихрей на границе встречных потоков — обусловлен кризис течения при малых и умеренных значениях числа Прандтля; при этом характерные скорости движения жидкости при потере устойчивости невелики. При достаточно больших числах Прандтля проявляется и становится более опасным механизм неустойчивости, связанный с нарастанием в конвективном потоке тепловых волн. Порог устойчивости зависит от тепловых факторов, т. е. от числа Прандтля. Кроме того, имеется вязкая гидродинамическая мода неустойчивости, обусловленная волнами Толмина — Шлихтинга.

Имеется большое количество работ, в которых рассматривается воздействие на устойчивость плоскопараллельного конвективного течения различных факторов [2]. К числу таких факторов можно отнести добавление к конвективному течению какого-либо течения не конвективной природы. При этом получается суперпозиция свободного и вынужденного течений (комбинированная конвекция).

В данной работе рассматривается устойчивость плоскопараллельного течения, вызываемого поперечной разностью температур на границах слоя и продольным градиентом давления. Ранее [3] задача решалась в чисто гидродинамической постановке без учета тепловых факторов; полученные при этом результаты относятся к предельному случаю малых чисел Прандтля. Ниже приводится численное решение задачи в полной постановке.

1. Несжимаемая жидкость с плотностью ρ , кинематической вязкостью ν ; температуропроводностью χ , коэффициентом теплового расширения β находится в слое между бесконечными вертикальными плоскостями $x = \pm h$ (x — горизонтальная координата, h — полуширина слоя). Границы слоя поддерживаются при разных температурах $T = \mp \Theta$. Вынужденное движение будем задавать объемным расходом жидкости Q через поперечное сечение слоя.

Рассматриваемое конвективное течение описывается безразмерными уравнениями в приближении Буссинеска с дополнительными условиями:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + T \gamma \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T = \frac{1}{Pr} \Delta T, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

$$x = \pm 1, \quad \mathbf{v} = 0, \quad T = \mp Gr, \quad \int_{-1}^1 v_x dx = Re$$

$$Gr = \frac{g \beta \Theta h^3}{\nu^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi}, \quad Re = \frac{Q}{\rho \nu}$$

Здесь все обозначения обычные: ось z направлена вертикально вверх, y — орт оси z . Единицы измерения выбраны следующими: h — расстояние, v/h — скорость, $\rho v^2/h^2$ — давление, h^2/v — время, $v^2/g\beta h^3$ — температура. Безразмерными параметрами задачи служат числа Грасгофа Gr , Прандтля Pr и Рейнольдса Re .

При совместном действии бокового нагрева и вынужденного течения в слое возможно стационарное плоскопараллельное движение жидкости в вертикальном направлении с профилями скорости и температуры, зависящими от поперечной координаты x :

$$v_0 = \frac{Gr}{6}(x^3 - x) - \frac{3}{4}Re(x^2 - 1), \quad T_0 = -Grx \quad (1.2)$$

Рассмотрение линейной устойчивости комбинированного течения (1.2) относительно плоских нормальных возмущений приводит к спектральной задаче

$$-\lambda \Delta \varphi + v_0 ik \Delta \varphi - v_0'' ik \varphi = \Delta \Delta \varphi + \vartheta' \quad (1.3)$$

$$-\lambda \vartheta + v_0 ik \vartheta - T_0' ik \varphi = \frac{1}{Pr} \Delta \vartheta$$

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} - k^2, \quad x = \pm 1, \quad \varphi = \varphi' = \vartheta = 0$$

Здесь $\vartheta(x)$ и $\varphi(x)$ — амплитуды возмущений температуры и функции тока, k — волновое число; штрихом обозначено дифференцирование по x . Краевая задача (1.3) определяет декременты $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ как функции параметров задачи Gr , Re , Pr и волнового числа k . При $\lambda_r > 0$ возмущения со временем затухают, при $\lambda_r < 0$ — нарастают. Если ограничиваться рассмотрением нейтральных возмущений ($\lambda_r = 0$), то из задачи (1.3) можно найти нейтральную поверхность в пространстве параметров, а также частоту λ_i нейтральных возмущений. Сечения нейтральной поверхности плоскостями $Re = \text{const}$ и $Gr = \text{const}$ при любом фиксированном значении числа Прандтля дают нейтральные кривые $Gr(k)$ и $Re(k)$ соответственно, а экстремумы нейтральных кривых (проекция складок нейтральной поверхности на плоскость $Gr-Re$) определяют границы устойчивости комбинированного конвективного течения.

Собственные значения краевой задачи (1.3) находились численно методом дифференциальной прогонки со стыковкой в промежуточной точке x_c интервала интегрирования [4]. Получаемая при этом система обыкновенных дифференциальных уравнений интегрировалась по формулам Рунге — Кутты — Мерсона. Положение точки x_c определялось либо координатой точки перегиба профиля скорости, либо координатой одной из критических точек профиля, где совпадают фазовая скорость возмущений $u = \lambda_i/k$ и скорость основного течения v_0 . Расчеты проводились при значениях числа Прандтля $0 \leq Pr \leq 10^3$.

2. Предельный случай малых чисел Прандтля исследован ранее [3]. Область устойчивости смешанного конвективного течения на плоскости $Gr-Re$ ограничена осями координат и двумя пересекающимися кривыми, одна из которых описывает влияние продольного градиента давления на устойчивость течения к возмущениям в виде вихрей на границе встречных потоков, вторая — влияние бокового нагрева на развитие волн Толмина — Шлихтинга (фиг. 1 работы [3]). Кривые пересекаются при $Re = 13\,300$, $Gr = 28\,200$. Суперпозиция двух течений — конвективного течения с кубическим профилем скорости и течения Пуазейля — приводит к их взаимной

стабилизации, причем наиболее эффективно подавляется невязкий конвективный механизм неустойчивости.

С изменением числа Прандтля не происходит существенной деформации области устойчивости. Все количественные характеристики критических возмущений слабо меняются с изменением Pr , что связано с чисто гидродинамической природой неустойчивости. На фиг. 1 приведены зависимости экстремальных критических чисел Грасгофа Gr_m от Pr для различных чисел Рейнольдса. При $Re=7000$ и умеренных числах Pr вязкий механизм не обеспечивает кризиса течения (в данной работе не рассматриваются волны Толмина — Шлихтинга в каждом из встречных потоков; действие вязкого механизма обсуждается только в связи с вынужденным течением вдоль слоя, при этом неустойчивость имеет место, начиная с $Re=7696$). Кривая 1 на фиг. 1 описывает поведение границы устойчивости по отношению к вихрям на границе встречных потоков с изменением Pr для указанного Re .

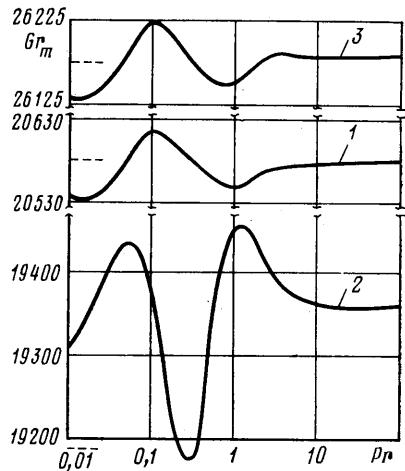
Необходимо отметить, что в данном случае употребление термина «вихри на границе встречных потоков» несколько условно. Из вида профиля (1.2) следует, что только при выполнении условия $Gr > 4,5Re$ в течении действительно имеются встречные потоки. Практически во всей области устойчивости течения его профиль представляет собой искаженный профиль Пуазейля.

Тем не менее представляется удобным сохранить прежнее название этого механизма неустойчивости, имея в виду происхождение возмущений при малых Re , а также существование точки перегиба при $Gr > 1,5Re$.

При $Re=11\,000$ для течения опасны обе моды неустойчивости, как вязкая, так и невязкая. Соответствующие нейтральные линии на плоскости Gr_m-Pr изображены на фиг. 1 кривыми 2 и 3; область устойчивости заключена между этими кривыми. Критическое волновое число k_m и фазовая скорость возмущений u_m при изменении числа Прандтля практически не меняются. При $Re=7000$ критическое волновое число и критическая фазовая скорость имеют значения: $k_m=1,119$, $u_m=1630$; при $Re=11\,000$ соответственно $k_m=1,079$, $u_m=2299$ для верхней границы области устойчивости и $k_m=0,879$, $u_m=1939$ для нижней границы. При числах Прандтля $Pr > 20$ все характеристики критических возмущений (Gr_m , k_m , u_m) остаются неизменными в пределах точности вычислений. Штриховыми линиями отмечены значения Gr_m при $Pr=0$.

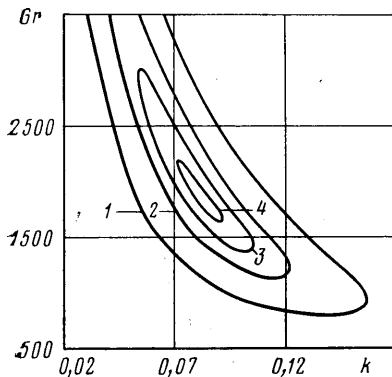
Результаты численного счета показывают, что при любых значениях числа Pr с увеличением Re происходит непрерывная деформация нейтральных кривых конвективной моды неустойчивости. При $Re > 4000$ на нейтральных кривых в области малых волновых чисел появляются дополнительные экстремумы. Минимальное критическое число Gr_m для локального минимума связано с Re линейной зависимостью $Gr_m = aRe$; коэффициент a слабо зависит от числа Прандтля и меняется в пределах $5,41 \leq a \leq 5,48$. Локальные минимумы не становятся глобальными ни при каких Pr .

3. При достаточно больших числах Прандтля ($Pr > Pr^*$) в подогре-

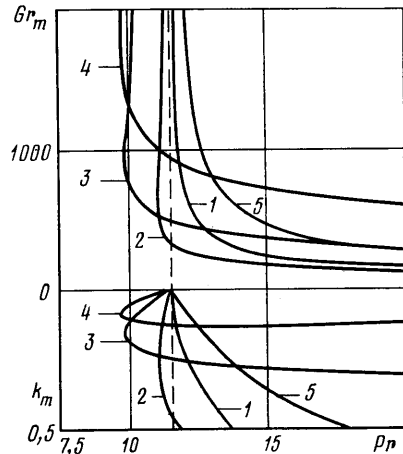


Фиг. 1

ваемом сбоку вертикальном слое появляется новая мода неустойчивости, связанная с нарастанием температурных волн [1]. Свойства симметрии основного течения и возмущений приводят к вырождению: критические числа Грасгофа одинаковы для тепловых волн, бегущих как вверх, так и вниз (волны локализованы в восходящем и нисходящем потоках). Нейтральные кривые имеют вид петель, на плоскости $G\Gamma-k$ ось $G\Gamma$ является общей асимптотой. При стремлении $Pr \rightarrow Pr^*$ справа устойчивость течения к тепловым волнам повышается. При $k \rightarrow 0$ число Грасгофа неограниченно растет по закону k^{-1} [5]. Таким образом, произведение kGr остается конечным на всей нейтральной кривой при любом возможном Pr .



Фиг. 2



Фиг. 3

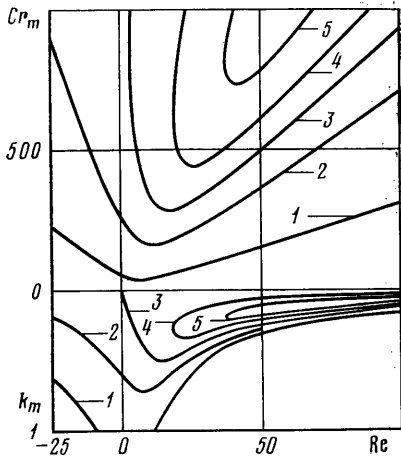
Уравнения (1.3) позволяют производить вычисления при $k=0$, так как число Грасгофа присутствует в них только в необходимой комбинации с волновым числом. В отсутствие вынужденного течения ($Re=0$) нейтральные кривые критических возмущений в координатах $kGr-k$ имеют вид полуovalов, внутри которых находится область неустойчивости. При любом значении числа Прандтля $Pr > Pr^*$ соответствующие нейтральные кривые пересекаются с осью kGr ($k=0$) в двух точках. Их положение зависит от Pr . Соответствующая зависимость $Pr(kGr)$ изображается вогнутой кривой, ее минимум определяет величину Pr^* . Вычисления дают: $Pr^*=11,562$, $kGr^*=178,3$, $\lambda_i^*=10,56$. При этом определяются асимптотические зависимости ($k \rightarrow 0$) для обеих ветвей нейтральных кривых $G\Gamma(k)$ для различных Pr . Так, при числах Прандтля, близких к Pr^* , параметры критических возмущений хорошо аппроксимируются для верхних и нижних ветвей нейтральных кривых соответственно формулами

$$Gr = (178,3 + 46,7b)k^{-1}, \quad u = (10,56 + 2,48b)k^{-1}, \quad b = (Pr - Pr^*)^{1/2} \quad (3.1)$$

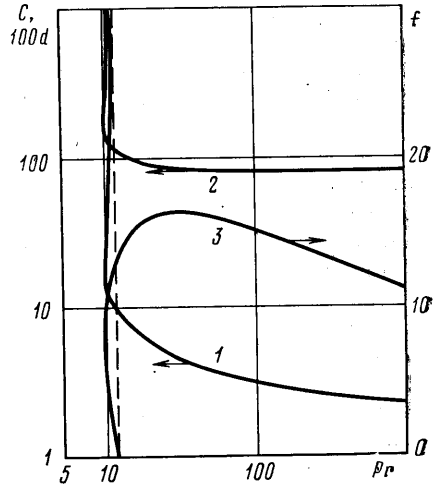
$$Gr = (178,3 - 35,9b)k^{-1}, \quad u = (10,56 - 2,37b)k^{-1}$$

Наличие вынужденного течения снимает вырождение, связанное с равноправием возмущений, бегущих вверх и вниз. При этом наиболее опасными оказываются возмущения, бегущие в направлении вынужденного течения жидкости. На фиг. 2 приведены нейтральные кривые $G\Gamma(k)$ таких возмущений при $Re=100$ для следующих значений числа Прандтля: $Pr=13$; $10,5$; 10 ; $9,8$ (кривые 1-4 соответственно). Нейтральные кривые тепловых волн, бегущих навстречу вынужденному течению, лежат в области больших чисел Грасгофа и здесь не приводятся. Области неустой-

чивости течения находятся внутри соответствующих нейтральных кривых. При $Pr > Pr^*$ (кривая 1 на фиг. 2) нейтральные кривые комбинированного течения $Gg(k)$ подобны кривым при $Re=0$. Ось Gg по-прежнему является общей асимптотой для нижней и верхней ветвей нейтральных кривых; для малых волновых чисел выполняются асимптотические зависимости (3.1). При $Pr = Pr^*$ верхние и нижние ветви нейтральных кривых комбинированного течения при любом значении числа Рейнольдса (подчеркнем, что речь идет о возмущениях, бегущих в направлении вынужденного движения жидкости) смыкаются на бесконечности. При дальнейшем уменьшении числа Прандтля (кривые 2, 3, 4 на фиг. 2) области неустойчивости



Фиг. 4



Фиг. 5

ограничены замкнутыми линиями и уменьшаются с убыванием Pr . Для любого Re имеется некоторое характерное число Прандтля Pr_a , при котором нейтральные кривые стягиваются в точку (например, $Pr_a = 9,767$ для $Re = 100$). При $Pr < Pr_a$ комбинированное течение устойчиво к тепловым волнам. Подчеркнем, что наличие вынужденного течения делает опасным вязкий конвективный механизм и при $Pr < Pr^*$. При любой интенсивности вынужденного движения нейтральные кривые встречных возмущений с изменением числа Прандтля ведут себя обычным образом, т. е. при $Pr \rightarrow Pr^*$ кривые поднимаются вверх на плоскости $Gg-k$ и при $Pr < Pr^*$ течение устойчиво к встречным тепловым волнам.

На фиг. 3 сверху изображены границы областей устойчивости комбинированного течения к тепловым волнам с положительной фазовой скоростью (бегущие вверх возмущения) при $Re = 0, 10, 50, 100, -10$ (кривые 1–5 соответственно). Области неустойчивости течения расположены правее кривых. Внизу приведены зависимости от числа Прандтля волновых чисел, при которых реализуются экстремумы нейтральных кривых. Штриховой линией отмечено положение Pr^* .

Присутствие вынужденного течения не меняет асимптотического характера положения Pr^* . Действительно, значение Pr^* определяется положением точек пересечений нейтральных кривых $kGg(k)$ с осью kGg . Этим точкам соответствуют бесконечно большие числа Грасгофа, и при любой интенсивности вынужденного течения не меняется конвективный характер профиля течения (1.2). Однако только кривые устойчивости для встречных волн (кривая 5) асимптотически приближаются к прямой

$Pr = Pr^*$ со стороны больших чисел Прандтля, как это было в случае $Re = 0$ (кривая 1). Кривые устойчивости для «попутных» волн заходят в область меньших чисел Pr и асимптотически приближаются к Pr^* , оставаясь в этой области. Нижние части границ устойчивости образованы минимумами нейтральных кривых, верхние — максимумами. Левая граница области неустойчивости определяет значение Pr_a . Глубина проникновения кривых устойчивости в область $Pr < Pr^*$ различна; величина Pr_a монотонно убывает с ростом Re , приближаясь к некоторому пределу. Его численное значение приводится ниже.

В области $Pr > Pr^*$ продольный градиент давления может дестабилизировать течение. Видно, что кривые 2, 3, 4 на фиг. 3 ($Re = 10, 50, 100$) в некотором интервале чисел Прандтля проходят ниже кривой 1 ($Re = 0$). В соответствии со сказанным выше при обсуждении нейтральных кривых граница устойчивости течения к возмущениям, бегущим навстречу вынужденному движению жидкости, проходит в области больших чисел Грасгофа, нежели граница устойчивости к попутным возмущениям (кривые 2 и 5) во всем интервале чисел Прандтля. Зависимости $u_m(Pr)$ ведут себя подобным образом и здесь не приводятся.

Как следует из приведенных нейтральных кривых, их максимумы лежат в области более длинных волн, чем минимумы. Поэтому нижним частям границ областей устойчивости на фиг. 3 соответствуют нижние ветви зависимостей экстремального волнового числа k_m от Pr . Все кривые $k_m(Pr)$ выходят из одной точки Pr^* . На фиг. 3 приведены результаты вычислений для небольшого интервала чисел Прандтля. С увеличением Pr все зависимости $k_m(Pr)$ проходят через экстремум, в дальнейшем величина k_m постепенно уменьшается. Для $Re = 100$ (кривая 4) максимальное значение k_m достигается уже при $Pr = 12$.

На фиг. 4 приведены зависимости экстремальных по волновому числу чисел Грасгофа от Re для различных чисел Прандтля: $Pr = 100; 15; 11,562; 10,5; 10$ (кривые 1–5). Внизу изображены соответствующие кривые $k_m(Re)$. При этом рассматриваются только возмущения с положительной фазовой скоростью. Кривая 3 ($Pr = Pr^*$) делит плоскость $G_r - Re$ на две части. При $Pr > Pr^*$ кривые $G_{r_m}(Re)$ являются нижними границами областей неустойчивости. Вынужденное движение, как отмечалось выше, приводит к некоторой дестабилизации течения при $Re > 0$, причем интервал чисел Рейнольдса ΔRe , при которых происходит понижение устойчивости, может быть приближенно определен по формуле $\Delta Re = 52/\sqrt{Pr - Pr^*}$. С увеличением интенсивности вынужденного движения устойчивость течения повышается, причем встречные тепловые волны менее опасны, чем попутные.

При $Pr < Pr^*$ области неустойчивости ограничены сверху и снизу по числам Грасгофа; при конкретном значении Re течение неустойчиво лишь в определенном интервале G_r .

Зависимости экстремальных волновых чисел от Re показывают, что при $Pr > Pr^*$ добавка вынужденного течения сдвигает нейтральные кривые в область больших волновых чисел; на кривых $k_m(Re)$ имеются четко выраженные экстремумы. С дальнейшим ростом Re кризис течения обеспечивается возмущениями со все большей длиной волны; это же происходит и в области $Re < 0$. При $Pr < Pr^*$ кривые $k_m(Re)$ двузначны, что соответствует существованию двух экстремумов на нейтральных кривых (фиг. 2).

4. Как показывают расчеты, при достаточно больших скоростях вынужденного течения параметры критических возмущений выходят на асимптотические зависимости $G_{r_m} = c Re$, $u_m = d Re$, $k_m = f/Re$, где коэффициенты c, d, f зависят от числа Прандтля. Для определения этих коэффициентов необходимо преобразовать ампли-

тудную задачу (1.3) в предельном случае $Re \gg 1$. На фиг. 5 представлены асимптотические характеристики критических возмущений s (кривая 1), $100d$ (кривая 2) и f (кривая 3). Нейтральные кривые позволяют найти минимальное из возможных значений $Pr_{a \min} = 9,723$. При этом $s = 18,38$, $d = 1,586$, $f = 8,31$. Таким образом, наличие вынужденного движения расширяет область неустойчивости течения к тепловым волнам. Приведенные зависимости от числа Прандтля для s , d , f относятся к попутным возмущениям. Как и в случае конечных чисел Рейнольдса, эти возмущения наиболее опасны.

Автор выражает благодарность Г. З. Гершуни за руководство работой, а также М. А. Гольдштику и В. Н. Штерну за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость— В кн.: Итоги науки и техники. ВИНТИ АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа, 1978, т. 11, с. 66—154.
3. Лобов Н. И. Об устойчивости смешанного конвективного течения в плоском вертикальном слое.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 6, с. 130—132.
4. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.
5. Бирх Р. В., Рудаков Р. Н. Применение метода ортогонализации в пошаговом интегрировании при исследовании устойчивости конвективных течений.— Гидродинамика. Вып. 5. Пермь, 1974, с. 149—158 (Уч. зап. Перм. ун-та, № 316).

Пермь

Поступила в редакцию
3.X.1980