4. *Ведерников В. В.* Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. М.– Л.: Госстройиздат, 1939. 247 с.
5. *Эмих В. Н.* О нескольких гидродинамических моделях дренажа.– ПММ, 1979, т. 43, вып. 6, с. 1046.

Новосибирск

Поступила в редакцию 1.X.1980

УДК 532.546

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

ОДИШАРИЯ М. Г.

Цель данной работы – построение напорных и безнапорных течений при законе фильтрации с предельным градиентом. Было показано, что рассмотрение таких течений сводится к решению в плоскости годографа некоторой краевой задачи. При этом использовался вариационно-разностный метод конечных элементов, основанный на минимизации функционала и являющийся расширением метода Рэлея – Ритца.

Для оценки точности метода было построено решение задачи о напорном течении, создаваемом цепочкой скважин, для которой известно точное решение, полученное с помощью интегрального преобразования в [1]. Сопоставление этих решений, указанное в [2], дает точность порядка 3–5%.

С помощью метода конечных элементов в [2] была решена также безнапорная задача о так называемом «оросителе бороздового типа». Сравнение полученных функций тока ψ и вида линий депрессии и границ «застойных зон» с точными, указанными в [3] для случая нулевого относительного предельного градиента давления, также подтверждает хорошую точность рассматриваемого метода. Сказанное выше позволяет решать достаточно сложные задачи напорной и безнапорной фильтрации при нелинейном законе сопротивления.

В данной работе были решены две задачи нелинейной фильтрации с предельным градиентом давления: 1) о напорном течении под плотиной в слое грунта конечной мощности; 2) об одиночном источнике, помещенном в слой грунта бесконечной глубины (безнапорная фильтрация). В обоих случаях для уравнения

$$w(w+\lambda)\psi_{ww}+(w-\lambda)\psi_w+\psi_{\theta\theta}=0 \tag{1}$$

записанного в переменных годографа скорости $(w,\ \theta)$, выписывался функционал

$$F(\psi)=\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{N}(\lambda+\sqrt{\eta})\left[\frac{1}{2\eta\sqrt{\eta}}\psi_\theta^2+2(\lambda+\sqrt{\eta})\psi_\eta^2\right]d\eta\,d\theta \tag{2}$$

где w – модуль скорости фильтрации, θ – угол между осью x и вектором скорости фильтрации, $\eta=w^2$, а $N=W^2$ отвечает некоторому достаточно большому значению скорости фильтрации W. Функционал (2) минимизировался с учетом соответствующих граничных условий. С этой целью области решения покрывались системой треугольных элементов, вершины которых образуют прямоугольную сетку. Разбиение областей осуществлялось подобно приведенным на фиг. 3, 4 в [2], а также в [4]. В каждом из элементов искомая функция ψ аппроксимировалась линейной функцией

$$\psi=A+B\eta+C\theta \tag{3}$$

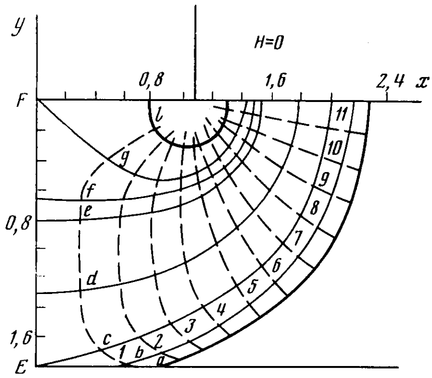
Предварительно для большей точности в зоне малых скоростей осуществлялось преобразование $\eta=w^2$.

Из условия минимума функционала (2) получалась система линейных уравнений для определения значений функции тока в узлах элементов. Эта система решалась методом релаксации при некотором распределении $\psi(\eta,\ \theta)$ в узлах. В задаче 1) областью решения является полубесконечная полоса $(0\leqslant\eta<\infty,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2)$. В случае задачи 2) имеем криволинейную область $\eta\geqslant(-\lambda-\sin\theta)^2$, $-\pi/2\leqslant\theta\leqslant 0$, $0\leqslant\eta<\infty$. В обоих случаях для различных значений λ построены эквипотенциалы и линии равного напора, а также изовелы и изоклины.

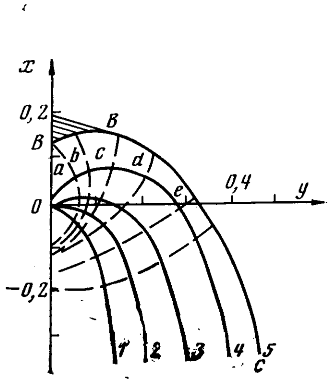
На фиг. 1 (в связи с геометрической симметрией задач рассматривалась только первая часть картин течений) построены изовелы (w=const) и изоклины (θ=const) для значений a=0,16, b=1,0 и H=3,4. Здесь a и b – характерные скорости в точках

E и F соответственно, а H – напор вдоль линии симметрии плотины FE. Штриховым линиям *1–11* отвечают значения угла θ=0,13; 0,26; 0,39; 0,52; 0,65; 0,78; 0,91; 1,04; 1,17; 1,30; 1,43 соответственно, а сплошным линиям *a, b, c, d, e, f, g, l* отвечают значения скорости w=0,002; 0,06; 0,16; 0,38; 0,75; 0,86; 1,00; 1,48 соответственно.

На фиг. 2 для задачи 2) в случае, когда относительный предельный градиент давления λ=0,13, сплошными линиями *1–5* изображены эквипотенциалы, отвечающие значениям функции тока ψ=0,3; 0,5; 0,7; 0,9; 1,0 соответственно. Штриховые линии равного напора *a, b, c, d, e, f* отвечают значениям H=0,45; 0,5; 0,6; 0,75; 0,95; 1,1 соответственно.



Фиг. 1



Фиг. 2

В случае задачи 1) было замечено, что изменение величины a практически не сказывается на картине течения вблизи основания плотины, так что при расчете течения в этой области можно использовать решение задачи для пласта бесконечной мощности. Анализ решений задач безнапорной фильтрации обнаруживает два качественных эффекта, связанных с наличием относительного предельного градиента λ. Во-первых, это то, что во всех случаях с увеличением λ область фильтрации увеличивается. Это связано с тем, что в задачах безнапорной фильтрации при постоянном расходе потока Q в случае фильтрации с предельным градиентом с увеличением λ скорость на бесконечности уменьшается. Во-вторых, так же как и в напорной фильтрации, здесь возможно образование застойных зон. Так, на фиг. 2 она может находиться в заштрихованной области, причем участок BB соответствует границе застойной зоны, а BC – линии депрессии.

Счет выполнялся на ЭВМ типа М-220 и занимал 10–15 мин на вариант.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ентов В. М.* Об одной задаче фильтрации с предельным градиентом, допускающей точное решение.– ПММ, 1968, т. 32, вып. 3, с. 487–492.
2. *Ентов В. М., Одишария М. Г.* Применение метода конечных элементов к решению задач нелинейной фильтрации со свободной поверхностью.– Сообщ. АН ГССР, 1974, т. 75, № 1, с. 157–160.
3. *Аравин В. И., Нумеров С. Н.* Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: Гостехиздат, 1953. 616 с.
4. *Одишария М. Г.* Двухпараметрические задачи безнапорной нелинейной фильтрации и их решение методом конечных элементов.– В кн.: Конф. молодых ученых по мат. и мех. Ин-т прикл. мат. Тбилисск. ун-та: Сб. докл. Тбилиси, 1976, с. 111–114.

Тбилиси

Поступила в редакцию 26.VI.1980