

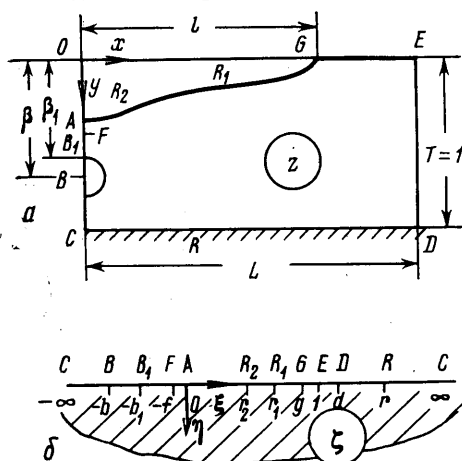
УДК 532.546

СОПОСТАВЛЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОЙ И ТОЧНОЙ МОДЕЛЕЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ ДРЕНАЖНЫХ ПРОМЫВКАХ ПОЧВ С ВОДОУПОРОМ

ЭМИХ В. Н.

В [1] исследована приближенная модель плоской фильтрации при дренажных промывках почвенного слоя с водоупором, когда кривая депрессии заменяется фиксированной горизонтальной границей. Позже задача была решена [2] с учетом и нахождением в процессе решения депрессионной кривой. Ниже для отдельных вариантов по результатам расчетов, предпринятых на основе полученных решений, выполнено сопоставление фильтрационных характеристик течения в приближенной и уточненной постановках.

Рассматривается плоская периодическая безнапорная установившаяся фильтрация грунтовых вод в однородном почвенном слое с горизонтальным водоупором из равноудаленных каналов одинаковой ширины или с затопленных промывных полос к заложенным посередине между ними на одинаковой глубине равнодебитным трубчатым дренам; последние моделируются точечными стоками. Половина одной из периодически повторяющихся междренних областей схематично представлена на фиг. 1, а. Аналитическое решение задачи в уточненной постановке получено путем конформного отображения области комплексного потенциала ω (полуполосы) и двулостной области инверсии годографа скорости фильтрации \bar{w} на полуплоскость $\text{Im } \zeta \geq 0$ (фиг. 1, б). Применительно к интервалу $(0, g)$, соответствующему депрессионной кривой, отображающие функции имеют вид [2]



Фиг. 1

тально к интервалу $(0, g)$, соответствующему депрессионной кривой, отображающие функции имеют вид [2]

$$\begin{aligned} \omega = \varphi + i\psi &= \frac{Q\sqrt{(1+b)(b+g)}}{\pi} \int_{\zeta}^g \frac{d\tau}{(b+\tau)\sqrt{(1-\tau)(g-\tau)}} + iQ = \\ &= \frac{2Q}{\pi} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{(1+b)(g-\zeta)}{(1-g)(b+\zeta)}} + iQ \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{1}{w} = \frac{dz}{d\omega} = \frac{M}{2} \int_{\zeta}^g \frac{P(\tau) d\tau}{\sqrt{\tau^3(g-\tau)(d-\tau)^3}} + i = -M \frac{(f+\zeta)\sqrt{g-\zeta}}{\sqrt{\zeta}(d-\zeta)} - \frac{2}{\pi} KZ(\alpha, k) + i \quad (2)$$

$$\begin{aligned} M > 0, \quad P(\tau) &= (\tau-r_1)(\tau-r_2)(\tau-r) = \tau^3 - (2d+f+aE)\tau^2 + (d+2f+a\Phi)g\tau - dfg \\ a &= \frac{2\sqrt{d}}{\pi M}, \quad \Phi = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}, \quad \alpha = \arcsin \sqrt{\frac{1-\zeta/g}{1-\zeta/d}}, \quad k = \sqrt{\frac{g}{d}} \end{aligned}$$

Здесь Q — фильтрационный расход дрены на единицу ее длины, приходящийся на рассматриваемую половину междренной области, K — полный эллиптический интеграл первого рода при модуле k , $Z(\alpha, k)$ — эллиптическая дзета-функция Якоби [3]. Исходя из (2) с последующим интегрированием по частям, приходим к следующей зависимости для $z(\zeta)$:

$$z(\zeta) = z(\zeta_0) + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{1}{w(\tau)} d\omega = z(\zeta_0) + \frac{\omega(\tau)}{w(\tau)} \Big|_{\zeta_0}^{\zeta} - \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{w(\tau)} \right] \omega(\tau) d\tau =$$

$$= z(\xi_0) + \frac{\omega(\xi) - \omega(\xi_0)}{w(\xi_0)} + \frac{M}{2} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{P(\tau) [\omega(\tau) - \omega(\xi)]}{\sqrt{\tau^3 (g - \tau) (d - \tau)^3}} d\tau \quad (3)$$

С вычислительной стороны последнее выражение предпочтительнее представления для $z(\xi)$, полученного в [2] на основе первого равенства (3) с подстановкой в него выражения (2) для $1/w$ и содержащего эллиптические интегралы в подынтегральной функции. Будем рассматривать здесь приведенные безразмерные функции z и ω , связанные с одноименными физическими величинами z_0 и ω_0 соотношениями

$$z = z_0/T, \quad \omega = \omega_0/\kappa T \quad (4)$$

Здесь κ — коэффициент фильтрации, T — мощность почвенного слоя.

Из условия $(1/w)_{\xi=-b}=0$ и выражения для $1/w$ на участке AC найдем

$$M = \frac{\sqrt{b(b+d)}}{(b-f)\sqrt{b+g}} \Lambda_0 \left(\arcsin \sqrt{\frac{d}{b+d}}, k \right) \quad (5)$$

где Λ_0 — стандартизированная лямбда-функция Хоймана [3].

Если расход Q задан, то в решении остаются неизвестными параметры b, d, g и f , которые связываются системой уравнений с основными геометрическими характеристиками модели: междренним расстоянием $2L$, шириной незатопленного участка $2l$, глубиной дренажного стока β и мощностью пласта T (в приведенных величинах (4) имеем $T=1$). В запрограммированном для ЭВМ вычислительном алгоритме реализован полубратный подход: параметры b, d и g некоторым образом задаются соответственно в интервалах $(0, \infty)$, $(1, \infty)$ и $(0; 1)$ (фиг. 1, б), а величины L, l и β вычисляются с предварительным нахождением параметра $f \in (0, b)$ из соотношения, фиксирующего величину $T=1$.

Из (5) и (2) заключаем, что $w \rightarrow 0$ при $f \rightarrow b$, т. е. случай $f=b$ соответствует покою при отсутствии искусственного дренирования. В другом предельном случае, при $f=0$, точка A на кривой депрессии превращается в точку заострения, а давление на всем участке AB , исключая точку A , становится меньшим атмосферного [4] и дальнейшее его понижение должно привести к прорыву в дренажный сток воздуха. Таким образом, в рассматриваемой модели прослеживается связь параметра f с интенсивностью дренирования; более отчетливо она выявляется в схеме одиночной дрены под незатопленной полосой конечной ширины в пласте, неограниченном по мощности и простирацию [5].

При описываемом подходе к расчетам, с фиксированием параметров b, d и g , соотношение для T , используемое для нахождения параметра f , определяет последний как убывающую функцию величины Q . В силу этого и с учетом вышесказанного расход лимитируется некоторой величиной $Q^*(b, d, g)$, которая предвычисляется в каждом конкретном варианте из упомянутого соотношения при $f=0$.

Соотношения для геометрических характеристик модели, основанные на представлении (3), содержат несобственные интегралы и предварительно преобразуются к расчетному виду. Сущность преобразований поясним на примере выражения для l . Полагая в (3) $\xi_0=g, \xi=0$ и соответственно $z(\xi_0)=l, \omega(\xi_0)=iQ, w(\xi_0)=-i, z(\xi)=iy_A=i\varphi(0), \omega(\xi)=\varphi(0)+iQ$, получим с учетом (1)

$$l = \frac{M}{2} I_l, \quad I_l = \int_0^g F_l(\tau) d\tau, \quad F_l(\tau) = \frac{P(\tau) [\varphi(\tau) - \varphi(0)]}{\sqrt{\tau^3 (g - \tau) (d - \tau)^3}},$$

$$\varphi(\tau) = \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{(1+b)(g-\tau)}{(1-g)(b+\tau)}} \quad (6)$$

Для устранения особенностей подынтегральной функции $F_l(\tau)$ на концах промежутка интегрирования разобьем интеграл I_l на сумму интегралов I_{l1} и I_{l2} по промежуткам $[0, g/2]$ и $[g/2, g]$. В интеграле I_{l1} сделаем замену $\tau=u^2$, а затем доопределим подынтегральную функцию при $u=0$ предельным переходом; в результате получим

$$I_{l1} = 2 \int_0^{\sqrt{g/2}} F_{l1}[\tau(u)] du; \quad F_{l1} = \frac{P(0) \varphi'(0)}{\sqrt{ga^3}} = \frac{Qf \sqrt{(1+b)(b+g)}}{\pi b \sqrt{d}} \quad (u=0)$$

$$F_{11} = \frac{P(\tau) [\varphi(\tau) - \varphi(0)]}{\tau \sqrt{(g-\tau)(d-\tau)^3}}, \quad \tau = u^2 \quad \left(0 < u \leq \sqrt{\frac{g}{2}} \right)$$

Для интеграла I_{12} найдем, прибегнув к замене $g-\tau=u^2$:

$$I_{12} = 2 \int_0^{\sqrt{g/2}} F_{12} [\tau(u)] du; \quad F_{12} = \frac{P(\tau) [\varphi(\tau) - \varphi(0)]}{\sqrt{\tau^3 (d-\tau)^3}}, \quad \tau = g - u^2$$

Аналогично преобразуются формулы для остальных граничных участков области фильтрации.

Положим в (3) $\xi_0 = g$ и соответственно $\omega(\xi_0) = iQ$, $w(\xi_0) = -i$, $z(\xi_0) = l$. Считаем далее $\xi \in (0, g)$, при этом $\omega(\xi) = \varphi(\xi) + iQ$. В результате имеем следующие уравнения для вычисления координат точек депрессионной кривой (свободной поверхности):

$$x_c(\xi) = l - M \int_0^{\sqrt{g-\xi}} \frac{P(\tau) [\varphi(\tau) - \varphi(\xi)]}{\sqrt{\tau^3 (d-\tau)^3}} d\tau, \quad \tau = g - u^2 \quad (7)$$

$$y_c(\xi) = \varphi(\xi) = \frac{2Q}{\pi} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{(1+b)(g-\xi)}{(1-g)(b+\xi)}} + iQ \quad 0 < \xi < g$$

Для каждого расчетного варианта, определяемого заданием параметров b , d , g и расхода $Q < Q^*$, вычисленные геометрические характеристики L , l и β закладываются затем в приближенную модель течения, рассматриваемого в прямоугольнике $OEDC$ [1]; последний отображается на полуплоскость $\operatorname{Im} \xi \geq 0$ формулой

$$\xi = \operatorname{sn}^2(zK_0', k_0) \quad (8)$$

Модуль k_0 эллиптической функции Якоби «sn» находится из уравнения

$$K_0/K_0' = L \quad (K_0 = K(k_0), K_0' = K(k_0'), k_0' = \sqrt{1-k_0^2})$$

Совместно с (1) зависимость (8) составляет приближенное решение задачи. Содержащиеся в нем параметры отображения b и g определяются в результате подстановки в (8) координат $i\beta$ и l точек B и G . Эти параметры, а также все физические характеристики в приближенной постановке, отличающиеся от соответствующих уточненных величин и сравниваемых с ними, будем снабжать индексом градус.

Условимся рассчитывать течение в приближенной постановке при том же значении H потенциала φ в некоторой близкой к стоку B точке B_1 , которое получается в этой точке для уточненной модели. В гидродинамической трактовке такая договоренность означает согласование приближенной и уточненной постановок по принципу одинакового напора на схематизированном контуре дрены — эквипотенциали, проходящей через точку B_1 . При этом вполне можно говорить об одном контуре, поскольку в обеих постановках эквипотенциали вблизи стока близки к полукругам с центром в стоке. Сопоставление приближенной модели с уточненной производится по положению депрессионной кривой, гидродинамическим сеткам и скоростям фильтрации в узлах сетки, рассчитанной для уточненной постановки. Используются безразмерные величины, определенные в соответствии с (4): все линейные характеристики, включая действующий напор H , отнесены к мощности пласта T , величины скорости фильтрации — к коэффициенту фильтрации k , а фильтрационный расход дрены — к kT .

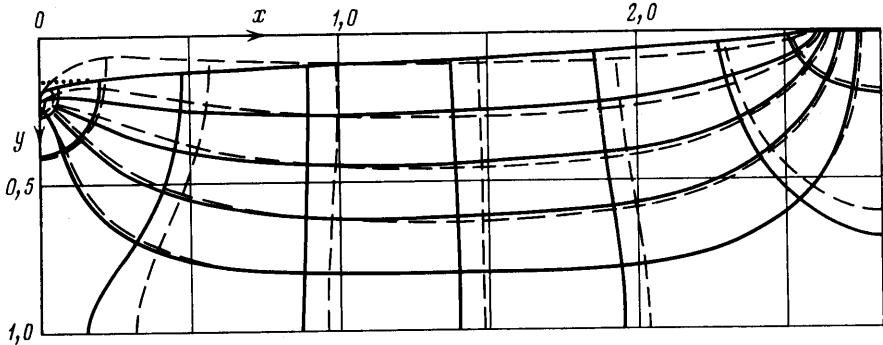
На кривой депрессии выполняется известное равенство $y = \varphi(x, y)$. Заменяя правую часть выражением $\varphi^0(x, 0)$ ($0 \leq x \leq l$) из приближенного решения, будем рассматривать получаемое при этом соотношение как приближенное уравнение депрессионной кривой. Согласно (1) и (8), имеем

$$y_c^0(x_c) = \frac{2Q^0}{\pi} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{(1+b^0)(g^0-\xi^0)}{(1-g^0)(b^0+\xi^0)}}, \quad \xi^0 = \operatorname{sn}^2(x_c K_0', k_0); \quad 0 \leq x_c \leq l \quad (9)$$

Расход Q^0 предварительно вычисляется из вышеупомянутого условия $\varphi^0(B_1) = -\varphi^0|_{\xi=-b_1^0} = H$, причем $b_1^0 = \operatorname{sn}^2(i\beta_1 K_0', k_0)$.

В числовых примерах параметру ξ в уравнениях (7) придается ряд значений ξ_n из $(0, g)$; для каждого из них при найденной абсциссе $x_c(\xi_n)$ соответствующей расчетной точки депрессионной кривой по формуле (9) вычисляется ордината $y_c^0(x_c)$, которая сопоставляется с ординатой $y_c(x_c)$, определяемой согласно (7).

При нахождении координат узлов гидродинамической сетки намечается некоторая совокупность пар (φ, ψ) , для каждой из которых на основе зависимости (2) определяется значение параметра ζ , вообще говоря, комплексное. Далее по формулам (2) и (3) вычисляется комплексная координата $z(\zeta)$ узла сетки и скорость фильтрации в нем $\vec{w}=w_x+iw_y$ при величинах $\zeta_0, z(\zeta_0)$ и $w(\zeta_0)$, найденных для предыдущего расчетного значения ω . На первом шаге отправными служат величины $\zeta_0=1, \omega(\zeta_0)=0, z(\zeta_0)=L$ для точки E ; значение $w(\zeta_0)$ в ней предварительно вычисляется. Правильность расчетов контролируется по точкам, принадлежащим фиксированным участкам границы, для которых одна из координат известна. Для



Фиг. 2

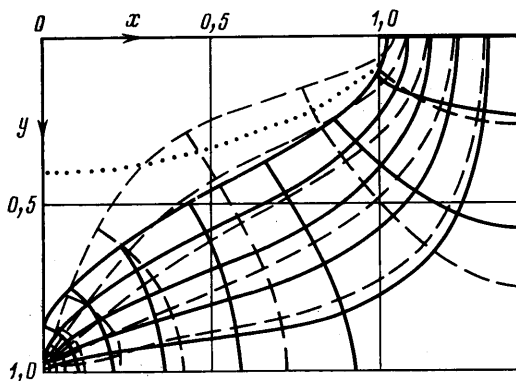
величины w в приближенной постановке имеем в силу (1) и (8)

$$w = w_x - iw_y = - \frac{d\omega}{dz} = - \frac{2Q^0 K_0' \sqrt{(1+b^2)(b^2+g^2)}}{\pi} \frac{\sqrt{\zeta(k_0^2 \zeta - 1)}}{(b^2 + \zeta) \sqrt{\zeta - g^2}}$$

Проиллюстрируем результаты сопоставления моделей на двух примерах. Для первого из них при $b=0,01, d=1,001, g=0,9999$ и $Q=0,5Q^*=0,0379$ найдено в уточненной постановке $L=2,8178, l=2,5921, \beta=0,2228$. Точка B_1 , представительная для контура дрены, задавалась на участке AB своим аффиксом $\zeta=-b_1$ при $b_1=0,9, b=0,009$; для нее получено $\beta_1=0,2206, H=0,2116$. При вышеуказанном принципе согласования моделей в приближенной постановке вычислено $Q^0=0,0426$.

φ/H	$\psi/Q=0$		0,2		0,4		0,6		0,8		1,0	
0	0,112	1,048	0,118	1,048	0,137	1,050	0,182	1,056	0,300	1,084	1,000	∞
	0,555	0,924	0,569	0,933	0,611	0,966	0,688	1,046	0,809	1,280		
0,2	0,019	1,045	0,033	1,045	0,045	1,047	0,054	1,049	0,060	1,054	0,062	1,061
	0,261	0,822	0,305	0,818	0,382	0,807	0,458	0,788	0,530	0,758	0,596	0,721
0,4	0,040	1,017	0,040	1,018	0,041	1,021	0,042	1,026	0,043	1,032	0,043	1,039
	0,465	0,825	0,469	0,820	0,479	0,807	0,488	0,784	0,490	0,751	0,484	0,705
0,6	0,013	0,932	0,034	0,932	0,047	0,931	0,054	0,932	0,058	0,939	0,059	0,961
	0,966	1,033	0,957	1,035	0,928	1,039	0,879	1,046	0,808	1,051	0,725	1,044
0,8	0,309	0,342	0,305	0,937	0,292	0,922	0,271	0,889	0,245	0,820	0,226	0,688
	2,345	1,231	2,637	1,236	3,092	1,248	3,407	1,266	3,559	1,286	3,598	1,295
1,0	5,762	1,102	5,724	1,095	5,617	1,098	5,474	1,111	5,347	1,131	5,295	1,148
	43,04	1,274	43,53	1,275	44,71	1,270	46,05	1,261	47,05	1,252	47,41	1,246

Гидродинамическая сетка с интервалами $\Delta\varphi=0,1H, \Delta\psi=0,2Q$ построена на фиг. 2 сплошными линиями для точной и штриховыми для приближенной постановки; отсутствует лишь эквипотенциаль $\varphi=H$, моделирующая контур дрены. Точечной линией изображена приближенная депрессионная кривая, отклонение которой от уточненной улавливается на графике лишь в зоне стока; здесь замена свободной границы фиксированной значительно искажает и саму структуру течения. Расхождение между точной и приближенной кривыми депрессии оказывается наибольшим в точке A (фиг. 1, а): $y_A=0,1836, y_A^0=0,1579$; с ростом x оно быстро сглаживается и уже при $0,1 < x < l$ имеем $|1-y^0/y| < 0,0521$. В описываемом примере при-



Фиг. 3

$\beta=0,9645$, $y_A=0,8691$. Для точки B_1 с аффиксом $\xi=-b_1=-9$ получено $\beta_1=0,9628$, $H=1,2434$, т. е. гидродинамическое давление оказывается здесь отрицательным. Обращаясь к фиг. 3, видим, что в рассматриваемом случае при глубоком заложении дрена и значительной (близкой к предельно допустимой) интенсивности дренирования понижение свободной поверхности велико, а представленное точечной кривой распределение потенциала вдоль отрезка OG (фиг. 1, а) уже не может служить приближением ординаты кривой депрессии. Замена фактической области фильтрации прямоугольником приводит к большему, чем в предыдущем варианте, расхождению между моделями и по другим характеристикам, в том числе и по значениям $|w|$ (см. таблицу). Тем не менее и в описываемом случае в пределах выделенной части $\{0 \leq \varphi \leq H, 0 \leq \psi \leq Q\}$ приближенной области фильтрации (при $Q^*=0,3216$) сохраняется сходство между течениями в сравниваемых постановках.

Если во второй расчетной комбинации положить $d=10$, сохранив $b=10$, $g=0,9999$, и принять $Q=0,99Q^*=0,2124$, то получим течение с параметрами $L=0,2350$, $l=0,0224$, $\beta=0,8781$, $\beta_1=0,8733$, $H=1,0344$, $y_A=0,7230$ (точка B_1 , как и в предыдущем случае, задается параметром $b_1=9$). В этом примере дрена также заглублена, но из-за малой протяженности незатопленного участка кривая депрессии близка к вертикали $x=0$, а степень взаимного согласования гидродинамических сеток и поля скоростей в точной и приближенной моделях та же, что и в первом из вышеописанных вариантов; при этом в верхней части слоя примерно до глубины $y=0,7$ течение близко к одномерному по вертикали.

Подытоживая результаты сопоставления приближенной и уточненной моделей безнапорной фильтрации в дренируемом почвенном слое с водоупором, можем заключить, что погрешности приближенной постановки определяются степенью отклонения депрессионной кривой от аппроксимирующего ее участка фиксированной границы в масштабах области фильтрации. На практике дрена закладываются, как правило, в верхней части почвенного слоя; глубина залегания свободной поверхности при этом относительно невелика, так что типичным для реальных ситуаций является первый из рассмотренных выше примеров расчета, когда приближенная модель обеспечивает достаточную точность вычисления основных фильтрационных характеристик потока. Особенно важен обнаруживаемый при сравнении моделей факт согласования скоростей, поскольку возможность существенной (в десятки и сотни раз) интенсификации процесса вытеснения грунтовых вод промывными на удалении от дрена была выявлена ранее в рамках приближенной модели [1] именно в результате анализа поведения скорости фильтрации.

Автор благодарит Н. С. Колодея за помощь при расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эмих В. Н. Фильтрация грунтовых вод при дренажных промывках почвенного слоя с непроницаемым основанием. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 2, с. 53.
2. Эмих В. Н. Решение задачи о плоской безнапорной установившейся фильтрации при дренажных промывках с непроницаемым основанием. — Докл. АН СССР, 1975, т. 220, № 6, с. 1289.
3. Byrd P. F., Friedman M. D. Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists. Berlin, 1971. 358 p.

ближенная постановка обеспечивает в целом вполне удовлетворительную точность и при вычислении основной гидродинамической характеристики потока — скорости фильтрации: это видно из таблицы значений $|w|$ и $|w^0/w|$ в узлах сетки течения для уточненной постановки. Подобное согласование приближенной модели с уточненной обнаружилось и для других расчетных комбинаций с относительно малой глубиной заложения дренажного стока ($\beta \sim 0,1-0,25$).

Второй пример расчета характеризует иную ситуацию. При тех же, что и в первом варианте, значениях параметров d, g и для значений $b=10$, $Q=0,99Q^*=0,2554$ вычислено $L=1,4127$, $l=1,0299$,

4. Ведерников В. В. Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. М.—Л.: Госстройиздат, 1939. 247 с.
 5. Эмих В. Н. О нескольких гидродинамических моделях дренажа.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 6, с. 1046.

Новосибирск

Поступила в редакцию
1.X.1980

УДК 532.546

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

ОДИШАРИЯ М. Г.

Цель данной работы — построение напорных и безнапорных течений при законе фильтрации с предельным градиентом. Было показано, что рассмотрение таких течений сводится к решению в плоскости годографа некоторой краевой задачи. При этом использовался вариационно-разностный метод конечных элементов, основанный на минимизации функционала и являющийся расширением метода Рэлея — Ритца.

Для оценки точности метода было построено решение задачи о напорном течении, создаваемом цепочкой скважин, для которой известно точное решение, полученное с помощью интегрального преобразования в [1]. Сопоставление этих решений, указанное в [2], дает точность порядка 3–5%.

С помощью метода конечных элементов в [2] была решена также безнапорная задача о так называемом «оросителе бороздового типа». Сравнение полученных функций тока ψ и вида линий депрессии и границ «застойных зон» с точными, указанными в [3] для случая нулевого относительного предельного градиента давления, также подтверждает хорошую точность рассматриваемого метода. Сказанное выше позволяет решать достаточно сложные задачи напорной и безнапорной фильтрации при нелинейном законе сопротивления.

В данной работе были решены две задачи нелинейной фильтрации с предельным градиентом давления: 1) о напорном течении под плотиной в слое грунта конечной мощности; 2) об одиночном источнике, помещенном в слой грунта бесконечной глубины (безнапорная фильтрация). В обоих случаях для уравнения

$$w(w + \lambda)\psi_{ww} + (w - \lambda)\psi_{w\theta} + \psi_{\theta\theta} = 0 \quad (1)$$

записанного в переменных годографа скорости (w, θ) , выписывался функционал

$$F(\psi) = \int_0^{\pi/2} \int_0^N (\lambda + \bar{\eta}) \left[\frac{1}{2\eta\bar{\eta}} \psi^2 + 2(\lambda + \bar{\eta})\psi_{\eta} \right] d\eta d\theta \quad (2)$$

где w — модуль скорости фильтрации, θ — угол между осью x и вектором скорости фильтрации, $\eta = w^2$, а $N = W^2$ отвечает некоторому достаточно большому значению скорости фильтрации W . Функционал (2) минимизировался с учетом соответствующих граничных условий. С этой целью области решения покрывались системой треугольных элементов, вершины которых образуют прямоугольную сетку. Разбиение областей осуществлялось подобно приведенным на фиг. 3, 4 в [2], а также в [4]. В каждом из элементов искомая функция ψ аппроксимировалась линейной функцией

$$\psi = A + B\eta + C\theta \quad (3)$$

Предварительно для большей точности в зоне малых скоростей осуществлялось преобразование $\eta = w^2$.

Из условия минимума функционала (2) получалась система линейных уравнений для определения значений функции тока в узлах элементов. Эта система решалась методом релаксации при некотором распределении $\psi(\eta, \theta)$ в узлах. В задаче 1) область решения является полубесконечная полоса ($0 \leq \eta < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$). В случае задачи 2) имеем криволинейную область $\eta \geq (-\lambda - \sin \theta)^2$, $-\pi/2 \leq \theta \leq 0$, $0 \leq \eta < \infty$. В обоих случаях для различных значений λ построены эквипотенциалы и линии равного напора, а также изовели и изоклины.

На фиг. 1 (в связи с геометрической симметрией задач рассматривалась только первая часть картин течений) построены изовели ($w = \text{const}$) и изоклины ($\theta = \text{const}$) для значений $a = 0,16$, $b = 1,0$ и $H = 3,4$. Здесь a и b — характерные скорости в точках