$$E=\frac{h}{\gamma}+\frac{1}{2}g_{ik}u^iu^k,\qquad \Omega^l=A_s{}^l\rho(2V^j+\omega^j)\frac{\partial^2x^s}{\partial t\,\partial q^j},\qquad V^l=u^l-\omega^l,\qquad p=\frac{\gamma-1}{\gamma}\rho h$$

Здесь по повторяющимся индексам суммирование: по j, l, s от единицы до трех, по i, k от единицы до двух. Слагаемые Ω^l, ω^l имеют порядок $O(\alpha^{n-m})$. Второй и третий члены в уравнении (6) существенны для слоя $\Delta=O(\alpha)$ и могут быть опущены в первом приближении в слое $\Delta=O(\alpha^2)$ [8, 9]. Последнее слагаемое в уравнении (7) мало по сравнению с остальными слагаемыми в вязких подслоях ударного слоя толщины $\Delta=O(\alpha)$, но существенно для ряда режимов в ударном слое $\Delta=O(\alpha^2)$ [8, 9].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сычев В. В.* О гиперзвуковых течениях вязкого теплопроводного газа.— ПММ, 1961, т. 25, № 4, с. 600—610.
2. *Cheng H. K.* The blunt-body problem in hypersonic flow at low Reynolds number.— Inst. Aerospace Sci. Paper, 1963, v. 92.
3. *Bush W. B.* On the viscous hypersonic blunt body problem.— J. Fluid Mech., 1964, v. 20, № 3, p. 353—367.
4. *Магомедов К. М.* Гиперзвуковое обтекание тупых тел вязким газом.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2, с. 45—56.
5. *Марков А. А.* Асимптотический анализ уравнений Навье – Стокса для трехмерных течений в тонком ударном слое. М., 1979. 74 с. (Препр. Ин-та пробл. мех. АН СССР, № 124).
6. *Гершбейн Э. А., Юницкий С. А.* Гиперзвуковой пространственный вязкий ударный слой в однородном газе при наличии вдува.— В сб.: Аэродинамика гиперзвуковых течений при наличии вдува. М.: Изд. Моск. ун-та, 1979, с. 111—120.
7. *Лунев В. В.* Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975. 327 с.
8. *Марков А. А.* Исследование стационарного течения вязкого газа в тонком трехмерном ударном слое.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 5, с. 115—126.
9. *Марков А. А.* Нестационарные эффекты в тонком вязком ударном слое около трехмерной критической точки при заданном ускорении и торможении тела.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1981, № 2, с. 100—111.
10. *Баранцев Р. Г., Энгельгарт В. Н.* Асимптотическое решение вблизи точки отрыва ударного слоя при гиперзвуковом обтекании затупленных тел.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1979, № 19, с. 61—66.
11. *Лисейкин В. Д., Яненко Н. Н.* Метод подвижных координат в газовой динамике.— В сб.: Числ. методы механ. сплош. среды, 1976, т. 7, № 2, с. 75—82.
12. *Черный Г. Г.* Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
13. *Богатко В. И., Колтон Г. А.* Пространственное нестационарное движение газа за фронтом сильной ударной волны.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1971, № 1, с. 78—85.

Москва

Поступила в редакцию
26.IX.1980

УДК 532.541.182

О ВЛИЯНИИ ЧАСТИЦ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ ТЕЛ В ДИСПЕРСНОМ ПОТОКЕ

ЮРЬЕВ И. М.

Рассматривается движение дисперсной среды при малой объемной, но значительной по массе концентрации сильно инерционных частиц. Показывается, что в рамках линеаризации уравнений движение такой среды будет безвихревым при невозмущенном на бесконечности набегающем потоке. Предлагаются простые формулы оценки влияния частиц на лобовое сопротивление среды движущемуся телу произвольной формы и на определение скорости течения с помощью трубки Пито – Прандтля.

Пусть некоторое тело характерного размера l обтекается стационарным потоком газа при малой объемной, но значительной по массе концентрации частиц. Если условия задачи позволяют считать частицы двигающимися по закону Стокса, а газ обтекающим тело как идеальная несжимаемая жидкость, то уравнения движения дисперсной среды будут такими:

$$\frac{d\mathbf{W}}{dt}+\frac{\gamma}{\rho}\frac{d\mathbf{V}}{dt}=-\operatorname{grad}P \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{W}=0 \tag{2}$$

$$k\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\mathbf{W}-\mathbf{V} \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\gamma\mathbf{V}=0 \tag{4}$$

$$\mathbf{W}=\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}_\infty|},\qquad \mathbf{V}=\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}_\infty|},\qquad P=\frac{p}{\rho w_\infty{}^2},\qquad t=\frac{\tau}{l/w_\infty},$$

$$k=\frac{\rho_p d^2 w_\infty}{18\eta l},\qquad \gamma=mn$$

где $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}$ – скорости движения газа и частиц, $\mathbf{w}_\infty=\mathbf{v}_\infty$ – скорость набегающей на тело дисперсной среды, τ – время, ρ и γ – плотность газа и аэрозольной «жидкости», m и n – масса частиц и их численная концентрация, ρ_p и d – плотность и диаметр частицы, η – коэффициент вязкости газа [1, 2].

От уравнений движения аэрозолей ($\gamma\ll\rho$) система (1)–(4) отличается лишь наличием второго члена в уравнении (1), и естественно попытаться применить аналогичные способы решения. С уменьшением размера частиц $k\to 0$ и тогда в пределе получаем известную модель движения утяжеленной жидкости с плотностью $\rho+\gamma$ [2].

Большим значениям k соответствуют сильно инерционные частицы, слабо реагирующие на изменение скорости несущего их потока. Тогда уравнение (3) в порядке приближения можно заменить его линеаризацией

$$k\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x}=\mathbf{W}-\mathbf{V} \tag{5}$$

где невозмущенный вдали перед телом поток параллелен оси X. Сравнение с точными численными расчетами движения аэрозолей показало практическую пригодность линеаризации для определения таких интегральных характеристик, как коэффициент захвата частиц E примерно на интервале $4k_*<k<\infty$, где k_* – критическое значение числа Стокса [3, 4]. На основании (2) и (4) приближению (5) отвечают $\operatorname{div}\mathbf{V}=0$, $\gamma=\gamma_\infty=\text{const}$. Если $\operatorname{rot}\mathbf{W}=0$, то из (5) или из (3) следует $\operatorname{rot}\mathbf{V}=0$ [5]. Движение однофазной идеальной жидкости в области, заполненной линиями тока равномерно поступательного на бесконечности потока, будет безвихревым [6]. Поэтому при пренебрежении влиянием частиц на течение несущей их среды ($\gamma\ll\rho$) можно считать $\operatorname{rot}\mathbf{W}=0$. При бо́льших значениях γ это влияние, представленное в уравнении (1) вторым членом, становится существенным и тогда движения фаз не могут быть, как известно, в общем случае строго безвихревыми. Но в линейном приближении (5) имеем $\operatorname{rot}\mathbf{W}=0$, $\operatorname{rot}\mathbf{V}=0$ и при значениях $\gamma=\gamma_\infty=\text{const}$ сравнимых с ρ. Действительно, из уравнения (1) ввиду

$$\frac{d\mathbf{W}}{dt}=\frac{1}{2}\operatorname{grad}\mathbf{W}^2-\mathbf{W}\times\operatorname{rot}\mathbf{W};\qquad \frac{d\mathbf{V}}{dt}=\frac{1}{2}\operatorname{grad}\mathbf{V}^2-\mathbf{V}\times\operatorname{rot}\mathbf{V}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}(\ )=0,\qquad \frac{\gamma}{\rho}=\text{const}$$

имеем

$$\operatorname{rot}\left[\mathbf{W}\times\operatorname{rot}\mathbf{W}+\frac{\gamma}{\rho}\mathbf{V}\times\operatorname{rot}\mathbf{V}\right]=0$$

или, после замены $\mathbf{W}$ через $\mathbf{V}$ по формуле (5),

$$\operatorname{rot}\left[k^2\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x}\times\operatorname{rot}\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{V}\times\operatorname{rot}\mathbf{V})+\left(1+\frac{\gamma}{\rho}\right)\mathbf{V}\times\operatorname{rot}\mathbf{V}\right]=0 \tag{6}$$

В плоском случае формула (6) принимает вид

$$k^2\left(\frac{\partial^2\psi'}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta\psi'-\frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\Delta\psi'\right)+$$

$$+k\left(\left(1+\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi'-\frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\psi'\right)+$$

$$+\left(1+\frac{\gamma}{\rho}\right)\left(\left(1+\frac{\partial\psi'}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi'-\frac{\partial\psi'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\psi'\right)=0 \qquad (7)$$

где $\psi=y+\psi'$ – функция тока фазы частиц. Предположение возможности $\operatorname{rot}\mathbf{V}\neq 0$ $(\Delta\psi'\neq 0)$ приводит к противоречию, что проще показать с помощью формулы (7). Прежде заметим, что ни одно из слагаемых формулы (7) не может быть равно нулю, если на бесконечности имеем невозмущенный поступательный поток. Например, $\partial\psi'/\partial x\ \partial/\partial y\Delta\psi'=0$ означало бы $\psi'=f(y)$, либо $\Delta\psi'=F(x)$, где f и F – произвольные функции, что не дает при $\Delta\psi'\neq 0$ невозмущенного равномерно поступательного движения на бесконечности. Точно так же ни один из членов разложения ψ' и $\Delta\psi'$ в произвольный ряд по степеням $r=\sqrt{x^2+y^2}$ в окрестности $r=\infty$ не обращается при дифференцировании по x или y в нуль. Например, $\partial/\partial x(q(\theta)/r^i)=0$, где $\theta=\operatorname{arctg}(y/x)$, означает $q(\theta)/r^i=\mathrm{const}/y^i$, и тогда не получается при $y=\mathrm{const}$, $x\to-\infty$ равномерно поступательного потока. Порядок малости каждого члена из такого ряда при дифференцировании по x и y повышается на $O(r^{-1})$. Наименьшее число дифференцирований в (7) имеет слагаемое $(1+\gamma/\rho)\partial/\partial x\Delta\psi'$ и поэтому при нем, если $\Delta\psi'\neq 0$, должен находиться член низшего порядка малости, которому не с чем взаимно уничтожиться, чтобы ψ' удовлетворяла уравнению (7) в области течения, а не только в точке $r=\infty$. Из возникшего противоречия следует необходимость $\Delta\psi'=0$, т. е. $\operatorname{rot}\mathbf{V}=0$, в окрестности $r=\infty$, а следовательно,– при аналитичности ψ', и во всей области движения частиц.

Из уравнения (1) при безвихревом движении получаем

$$P-P_\infty=\frac{1}{2}(1-W^2)+\frac{\gamma}{2\rho}(1-V^2) \qquad (8)$$

где первый правый член может изменяться на большом интервале при произвольной форме обтекаемого тела, а второй член равен $(\gamma/2\rho)(1-V^2)\approx-(\gamma/\rho)V_x'$ $(|\mathbf{V}'|=|\mathbf{V}-1|\ll 1$, $\mathbf{V}=(1+V_x')\mathbf{e}_1+V_y'\mathbf{e}_2+V_z'\mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e}_i$ – орты) и дает первую поправку в уравнение Бернулли на влияние частиц, определяемую из решения уравнения (5):

$$\mathbf{V}=\frac{1}{k}\exp\left(-\frac{x}{k}\right)\int_{-\infty}^{x}\mathbf{W}(s,y,z)\exp\left(\frac{s}{k}\right)ds \qquad (9)$$

За кормой тела, где нет частиц, имеем при безотрывном обтекании обычное без второго правого члена в (8) уравнение Бернулли.

Силовое воздействие частиц на переднюю часть обтекаемого несущей средой тела равно

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2$$

где $\mathbf{F}_1$ – часть его за счет инерционного осаждения частиц, а $\mathbf{F}_2$ – за счет влияния частиц в формуле (8) на гидродинамическое давление. Имеем

$$\mathbf{F}_1=\gamma\int|\mathbf{v}|\mathbf{v}\cos(\mathbf{nv})\,dS$$

где $\gamma|\mathbf{v}|\cos(\mathbf{nv})dS$ – масса осаждающихся в единицу времени частиц на элемент поверхности тела dS со скоростью $\mathbf{v}$, $(\mathbf{nv})$ – угол между единичным вектором внутренней к поверхности тела нормали $\mathbf{n}$ и вектором скорости $\mathbf{v}$. С точностью до малых второго порядка

$$|\mathbf{V}|\mathbf{V}\approx(1+2V_x')\mathbf{e}_1+V_y'\mathbf{e}_2+V_z'\mathbf{e}_3$$

$$\cos(\mathbf{nv})\approx\cos(nx)+V_y\cos(ny)+V_z'\cos(nz)$$

и для линеаризированной составляющей силы $\mathbf{F}_1$ на ось X получим

$$F_{1x}=\gamma w_\infty^2\int[(1+2V_x')\cos(nx)+V_y'\cos(ny)+V_z'\cos(nz)]dS$$

Сила $\mathbf{F}_2$ будет определяться только вторым правым членом формулы (8), если допустить независимость от частиц поля скоростей несущей среды $\mathbf{W}$, удовлетворяющего, как и в случае отсутствия частиц, уравнению неразрывности (2) и безвихренности $\operatorname{rot}\mathbf{W}=0$. Линеаризированная составляющая силы $\mathbf{F}_2$ равна

$$F_{2x}=-\gamma w_\infty^2\int V_x'\cos(nx)\,dS$$

В итоге вклад частиц в лобовое сопротивление среды движущемуся телу $F_x=$

$=F_{1x}+F_{2x}$ равен

$$F_x=\gamma w_\infty^2 \int \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

Величина $w_\infty \int \mathbf{V}\cdot\mathbf{n} dS$ является объемом поступающей на тело аэрозольной «жидкости» в единицу времени, равным $w_\infty S_*$, где S_* – площадь поперечного сечения той части области невозмущенного потока, из которой частицы попадают на тело.

Поэтому

$$F_x=\gamma w_\infty^2 S_*=\gamma w_\infty^2 S_0 E \tag{10}$$

где S_0 – площадь миделевого сечения тела, $E=S_*/S_0$ – коэффициент захвата частиц, определяемый по известным формулам [3, 4]. При $k=\infty$ получаем $F_x=\gamma w_\infty^2 S_0$.

Скорость набегающего потока после измерения p_0-p_∞, где p_0 и p_∞ – полное и статическое давление, вычисляем по следующей из (8) формуле

$$w=\sqrt{\frac{2(p_0-p_\infty)}{\rho+\gamma(1-V_0^2)}}$$

где $V_0=v_0/v_\infty$ – безразмерная величина скорости частицы в окрестности точки торможения x_0 трубки Пито – Прандтля, определяемая по формуле (9) вычислением интеграла вдоль оси симметрии ($y=z=0$) от $x=-\infty$ до $x=x_0$. Если схематизировать трубку Пито – Прандтля полубесконечным телом вращения

$$r=\sqrt{\frac{1-x^2+x\sqrt{x^2+2}}{2}} \qquad (x_0\leqslant x<\infty)$$

образованным источником и поступательным потоком, то из формулы потенциала этого течения

$$\varphi=x-\frac{1}{4\sqrt{x^2+r^2}}; \qquad W(x)=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{r=0}=1-\frac{1}{4x^2}; \qquad x_0=-\frac{1}{2}$$

и формулы (9) получим

$$V_0=1-\frac{1}{2k}-\frac{\exp(1/2k)}{4k^2}\mathrm{Ei}\left(-\frac{1}{2k}\right) \qquad \mathrm{Ei}=\int\limits_{-\infty}^{-1/2k}\frac{\exp s}{s}\,ds$$

Хотя в пределах удовлетворительной точности линеаризации отношение γ/γ_∞ мало отличается от единицы вплоть до точки торможения и объемная концентрация частиц мала во внешнем потоке, частицы при сравнимых с ρ значениях γ довольно быстро засоряют канал радиуса $\delta\gg d$ трубки Пито – Прандтля. Попавшая в канал частица в первую секунду пройдет путь $x'=v_0\tau_*(1-\exp(-1/\tau_*))$, почти равный при малом времени релаксации $\tau_*=\rho_p d^2/18\eta$ длине ее инерционного пробега $v_0\tau_*$. В объеме $\pi\delta^2x'$ начала канала скапливаются частицы с объемом секундного поступления $\pi\delta^2 w_\infty E_l\gamma/\rho_p$, где E_l – локальный коэффициент захвата, заполняя в секунду

$$\frac{\gamma}{\rho_p}\frac{w_\infty}{x'}E_l\approx\frac{E_l}{V_0}\frac{\gamma}{\rho_p}\frac{1}{\tau_*}$$

часть этого объема.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рахматулин Х. А.* Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред.– ПММ, 1956, т. 20, № 2, с. 184–195.
2. *Saffman P. G.* On the stability of laminar flow of a dusty gas.– J. Fluid Mech., 1962, v. 13, № 1, p. 120–128.
3. *Юрьев И. М.* К теории инерционного осаждения частиц из газа или жидкости.– Докл. АН СССР, 1966, т. 170, № 5, с. 1035–1038.
4. *Волощук В. М.* Введение в гидродинамику грубодисперсных аэрозолей. Л.: Гидрометеоиздат, 1971. 208 с.
5. *Левин Л. М.* Исследования по физике грубодисперсных аэрозолей. § 3. М.: Изд-во АН СССР, 1961. 268 с.
6. *Прандтль Л.* Гидроаэромеханика. Гл. 2, § 9, М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 520 с.

Москва

Поступила в редакцию
18.XII.1979