

ния сохраняется качественно неизменная конфигурация зон отрыва и структура течения в них. Отметим, что увеличение числа Маха приводит к возникновению зон отрыва на меньших углах атаки. Так, при  $M=8$  на угле атаки  $\alpha=5^\circ$  зарегистрирована развитая зона возвратных течений, хотя аналогичная зона при  $M=3$  отмечена при угле атаки  $\alpha \geq 10^\circ$ . Имеет место несущественное, но вполне заметное влияние числа Маха на геометрические размеры зон отрыва. В частности, при изменении Маха от 3 до 10 при фиксированных  $\alpha$  и  $\beta$  замечено уменьшение  $l^*$  приблизительно на 10%. Видимо, подобное обстоятельство имеет место и для других геометрических размеров ( $\rho^*$ ,  $\theta^\circ$ ), однако точность полученных опытных данных не позволяет пока высказать определенное мнение по этому поводу.

Таким образом, сопоставление и анализ экспериментальных данных, приведенных выше, показывает, что при обтекании тел сегментально-конической формы реализуется сложная картина пространственных отрывных течений. Экспериментальное изучение отдельных аспектов таких течений и установление закономерностей их возникновения и развития представляет определенный интерес для создания расчетных методов обтекания сложных тел.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев Г. Н., Глаголев А. И., Зубков А. И., Лягушин Б. Е., Миносцев В. Б. О структуре течения вблизи боковой поверхности и о формировании отрывных зон на телах сегментально-конической формы. — Докл. АН СССР, 1976, т. 230, № 3, с. 541.
2. Глаголев А. И., Зубков А. И., Лягушин Б. Е. Экспериментальное исследование закономерностей развития зон отрыва на телах сегментально-конической формы, обтекаемых потоком с числом  $M$  от 3 до 10. — В кн.: Струйные и отрывные течения. М.: Изд-во МГУ, 1979, с. 43–50.
3. Андреев Г. Н., Глаголев А. И., Зубков А. И., Лягушин Б. Е., Миносцев В. Б. Исследование структуры течения газа у боковой поверхности тел сегментально-конической формы. — В кн.: Аэродинамика больших скоростей. М.: Изд-во МГУ, 1979, с. 60–75.
4. Чжен П. Отрывные течения. М.: Мир, 1972, 299 с.
5. Кондратьев Г. М. Регулярный тепловой режим. М.: Гостехиздат, 1954. 408 с.
6. Авдудевский В. С., Медведев К. И. Исследование отрыва ламинарного пограничного слоя на конусе под углом атаки. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 3, с. 117–119.

Москва

Поступила в редакцию  
10.VII.1980

УДК 532.526+533.6.011.55–3

### РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОГО ГАЗА В ТОНКОМ ТРЕХМЕРНОМ УДАРНОМ СЛОЕ ОКОЛО ПОВЕРХНОСТИ С МАЛЫМИ КРИВИЗНАМИ

МАРКОВ А. А.

Теории стационарных вязких течений в тонком ударном слое посвящены работы [1–6], где содержатся дальнейшие ссылки на исследования по этой теме. Особенности невязкого гиперзвукового течения около сильно затупленных тел обсуждаются в [7].

В [8, 9] изучались режимы вязкого течения в трехмерном ударном слое около гладкого тела в случае малости параметров  $\alpha$ ,  $\varepsilon$  ( $\alpha^2 = (\gamma - 1)^{-1}(\gamma + 1)$ ,  $\varepsilon^2 = Re_0^{-1}$ ,  $Re_0$  — характерное число Рейнольдса,  $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей). Исследовался случай ударного слоя толщины  $\Delta = O(\alpha^2)$  при условиях, что главные кривизны тела  $K_1, K_2$  удовлетворяют неравенствам  $0 < K_i < \infty$ ,  $i = 1, 2$  при  $\alpha \rightarrow 0$ .

В настоящей работе анализируются режимы вязкого течения при  $\alpha \ll 1$ ,  $\varepsilon \ll 1$ ,  $\delta \ll 1$  в трехмерном нестационарном ударном слое толщины  $\Delta = O(\alpha)$  в случае  $K_i = -\alpha K_i^*$ ,  $K_i^* \neq 0$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\delta = (\nu - 1)^{-1} M_\infty^{-2}$ . Поверхность тела предполагается достаточно гладкой, области с особенностями типа ньютоновских точек отрыва (см., например, [10]) не рассматриваются. Для ряда нестационарных режимов изменения скорости поверхности тела проведен асимптотический анализ величин в ударном слое, получены и обоснованы универсальные уравнения при  $\varepsilon^2 = O(\alpha^L)$ ,  $1 \leq L < \infty$ , где  $L$  — некоторый параметр. Отмечены отличия от случая  $\Delta = O(\alpha^2)$ .

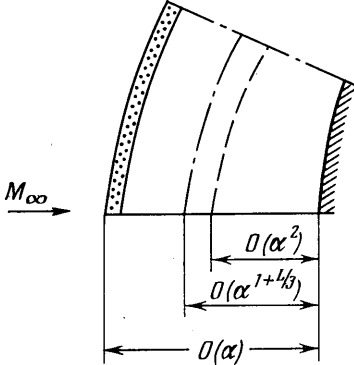
Толщина ударного слоя определяется геометрией тела и параметрами набегающего потока. Оценки [4, 7] для двумерного течения и обобщение [5] на трехмерный случай приводят к результату  $O(k) \leq \Delta \leq O(\sqrt{k})$ ,  $k$  — отношение плотностей на голов-

ной ударной волне. При обтекании сильно затупленных тел  $\Delta = O(\sqrt{k})$ . Далее предполагаем, что  $\Delta = O(\sqrt{k}) = O(\alpha)$ .

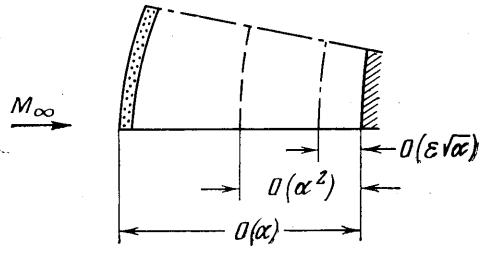
Анализ режимов течения в вязком ударном слое проведем на основе системы уравнений Навье – Стокса, записанной в системе координат  $(q) = (q^1, q^2, q^3)$ , связанной с поверхностью  $\Gamma$  обтекаемого тела, предполагая, что координатные линии  $q^2$  ортогональны  $\Gamma$  и линиям  $q^1, q^2$ . Обозначим  $u^i, v^i$  – контравариантные компоненты скорости газа в системе  $(q)$  и декартовой системе координат  $(x) = (x^1, x^2, x^3)$ , движущейся равномерно со скоростью  $-V_\infty$  движения тела при  $t \leq 0$ . Пусть  $x_w^i(q^1, q^2, t, \alpha)$  – закон движения тела при  $t > 0$  относительно системы координат  $(x)$ , а

$$x^i(q^1, q^2, q^3, t, \alpha) = x_0^i(q^1, q^2, q^3) + x_w^i(q^1, q^2, t, \alpha)$$

формулы связи координат  $(x)$  и  $(q)$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Обозначим  $A_m^i$  [11] компоненты матрицы, обратной к матрице  $a_k^m = \partial x^m / \partial q^k$ , так что  $A_m^i a_k^m = \delta_k^i$  и положим  $\omega^i = A_m^i \partial x^m / \partial t$ ;  $g_{ij}, g^{ij}, \Gamma_{jk}^i$  – компоненты метрических тензоров и символы Кристоффеля,  $g = \det \|g_{ij}\|$ . На поверхности тела  $q^3 = 0$  примем условия с учетом эффектов скольжения в том же виде, как в [8].

Рассмотрим нестационарные режимы, для которых при  $t \leq 0$  скорость тела постоянна, а при  $t > 0$  – меняется по закону [9]

$$\begin{aligned} q^3 = 0, \quad \omega^i(q^1, q^2, q^3, t, \alpha) &= \alpha^{n-m} \omega_*^i(q^1, q^2, t/\alpha^m) \\ m \geq 0, \quad n \geq 2m+1, \quad \omega_*^i(q^1, q^2, \tau) &= O(1), \quad \alpha \rightarrow 0 \\ \tau &= t/\alpha^m \end{aligned} \quad (1)$$

Предполагаем, что в ударном слое не возникает при  $t > 0$  внутренних скачков уплотнения. В зависимости от соотношения между  $\alpha$  и  $\epsilon$  в диапазоне  $\epsilon^2 = O(\alpha^L)$ ;  $1 \leq L < \infty$ , ударный слой имеет невязкую часть, ограниченную ударной волной, на которой ставятся соотношения Ренкина – Гюгонио и вязкий подслой около тела, толщина которого отличается от величины  $O(\epsilon)$  классического пограничного слоя.

Внешнее решение изучалось в ряде работ [7, 12, 13]. Величины в ударном слое ищем в виде разложений по  $\alpha$

$$\begin{aligned} u^i - \omega^i &= u_0^i(q^1, q^2, \zeta, t, \alpha) + o(1), \quad i=1, 2 \\ u^3 - \omega^3 &= \alpha(v_0 + o(1)), \quad \rho = \alpha^{-2}(\rho_0 + o(1)) \\ h &= h_0 + o(1), \quad p = p_0 + o(1), \quad \zeta = q^3/\alpha \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\rho, p, h$  – безразмерная плотность, давление и энтальпия [8]; функции с индексом нуль ограничены при  $\alpha \rightarrow 0$ .

Уравнения для касательных составляющих скорости внешнего решения не содержат градиенты давления  $\partial \rho_0 / \partial q^1, \partial \rho_0 / \partial q^2$ , что приводит к обращению в нуль на поверхности тела  $u_0^1$  и  $u_0^2$ .

Изменение давления  $p_0$  поперек ударного слоя существенно зависит не только от ускорения тела [9], но и от нормальной составляющей скорости  $v_0$ . Вблизи поверхности тела  $u_0^1, u_0^2$  порядка  $\zeta$ , а  $v_0$  – порядка  $\zeta^2$  [9].

Из асимптотики внешнего решения при малых  $\zeta$  порядка  $\alpha$  следует, что члены  $\partial(\rho u^i u^k) / \partial q^k$  становятся сравнимыми по порядку величины с отброшенными гра-

диентами давления  $\partial p/\partial q^k$ ,  $k, i=1, 2$  [7]. Кроме того, в тонком слое около тела существенны вязкие эффекты.

Анализ вязких эффектов в ударном слое толщины  $\Delta=O(\alpha)$  проведем для случая, когда толщина головной ударной волны  $\Delta_s$  удовлетворяет соотношению  $\Delta_s \leq O(\Delta)$ . Ограничимся случаем  $\varepsilon^2=O(\alpha^L)$ .

Пусть сначала  $\varepsilon^2=O(\alpha^L)$ ,  $1 \leq L \leq 3$ . Ударный слой (см. фиг. 1) подразделяется на невязкую часть толщины  $\Delta_0=O(\alpha)$  и вязкий подслой толщины  $\Delta_1=O(\alpha^{1+L/3})$ , поглощающий слой толщины  $O(\alpha^2)$ , в котором существенны градиенты давления [7].

В вязком подслое строим внутреннее решение в виде разложения

$$u^{*i} = \omega^i + \alpha^2 (u_0^{*i} + o(1)), \quad u^{*3} = \omega^3 + \alpha^c (v_0^{*3} + o(1))$$

$$p^* = p_0^* + o(1), \quad \rho^* = \alpha^{-2} (\rho_0^* + o(1)), \quad h^* = h_0^* + o(1), \quad a = L/3, \quad c = 2a + 1 \quad (3)$$

Функции с индексом нуль в (3) зависят от аргументов  $q^1, q^2, \xi_1 = q^3/\alpha^{a+1}, t_1 = t \cdot \alpha^a$ . Градиенты давления  $\partial p_0^*/\partial q^i, i=1, 2$  имеют относительный порядок  $O(\alpha^{2-2a})$  и могут быть опущены при  $L < 3$ , но являются существенными при  $L=3$ , когда толщина вязкого подслоя  $\Delta_1=O(\alpha^2)$ .

Рассмотрим теперь режимы течения  $\varepsilon^2=O(\alpha^L), L=3+r, r>0$ , предполагая при этом что  $n \geq 2m+2$ , (см. соотношения (1)). Ударный слой подразделяется на невязкую внешнюю часть  $G_1$  толщины  $O(\alpha)$ , невязкую переходную часть  $G_2$  толщины  $\Delta_2=O(\alpha^2)$  и вязкий внутренний подслой  $G_3$  толщины  $\Delta_3=O(\varepsilon\sqrt{\alpha})$  (фиг. 2). В области  $G_1$  градиенты давления  $\partial p/\partial q^i, i=1, 2$  не существенны в первом приближении, а изменение давления поперек слоя зависит от геометрии поверхности и ускорения тела. В области  $G_2$  величины  $\partial p/\partial q^i$  необходимо учитывать, но вязкими эффектами еще можно пренебречь. В области  $G_3$  существенна вязкость газа. Давление поперек областей  $G_2$  и  $G_3$  в первом приближении не меняется. Решение в  $G_2$  и  $G_3$  назовем соответственно переходным и внутренним.

Переходное решение, отмеченное штрихами, ищем в виде

$$u''^i = \omega^i + \alpha (u''^i + o(1)), \quad i=1, 2; \quad u''^3 = \omega^3 + \alpha^3 (v_0'' + o(1))$$

$$\rho'' = \alpha^{-2} (\rho_0'' + o(1)), \quad p'' = p_0'' + o(1), \quad h'' = h_0'' + o(1) \quad (4)$$

Функции с индексом нуль зависят от аргументов  $q^1, q^2, \xi_2 = q^3/\alpha^2, t_2 = t\alpha$ . Функции внутреннего решения (отмечены звездочкой) ищем в виде [3, 8, 9]

$$u^{*i} = \omega^i + \alpha (u_0^{*i} + o(1)), \quad i=1, 2; \quad u^{*3} = \omega^3 + \varepsilon \alpha \sqrt{\alpha} (v_0^{*3} + o(1))$$

$$\rho^* = \alpha^{-2} (\rho_0^* + o(1)), \quad p^* = p_0^* + o(1), \quad h^* = h_0^* + o(1) \quad (5)$$

Здесь функции с индексом ноль зависят от аргументов  $q^1, q^2, \xi_3 = q^3 \varepsilon^{-1} \alpha^{-1/2}, t_3 = \varepsilon \alpha \cdot t$ .

Указанное переходное решение (4) сопрягается с внешним решением (2) и с внутренним решением (5).

Проведенный асимптотический анализ позволяет получить композитную систему уравнений тонкого ударного слоя толщины  $\Delta, O(\alpha^2) \leq \Delta \leq O(\alpha)$  [8, 9], содержащую все члены, существенные для рассмотренных выше режимов и нестационарных эффектов (1). Уравнение приведем в безразмерных переменных [9]

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial q^j} (\rho V^j \sqrt{g}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho V^i \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial q^j} [(\rho V^i V^j + p g^{ij}) \sqrt{g}] - \text{Re}_0^{-1} \frac{\partial}{\partial q^3} \left( \mu \sqrt{g} \frac{\partial u^i}{\partial q^3} \right) +$$

$$+ \sqrt{g} \left( \Gamma_{ik}{}^i \rho V^k V^l + p g^{lk} + \rho \frac{\partial \omega^i}{\partial t} + \Omega^i \right) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial q^3} (p \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho V^3 \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial q^j} (\rho V^3 V^j \sqrt{g}) + \rho \sqrt{g} \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^3} V^l V^k + \frac{\partial \omega^3}{\partial t} + \Omega^3 \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial q^j} [(\rho E V^j + p u^j) \sqrt{g}] - \text{Re}_0^{-1} \frac{\partial}{\partial q^3} \left[ \mu \sqrt{g} \text{Pr}^{-1} \frac{\partial h}{\partial q^3} \right] -$$

$$- \text{Re}_0^{-1} \frac{\partial}{\partial q^3} \left[ \mu \sqrt{g} g_{ik} u^k \frac{\partial u^i}{\partial q^3} \right] = 0 \quad (7)$$

$$E = \frac{h}{\gamma} + \frac{1}{2} g_{ik} u^i u^k, \quad \Omega^l = A_s^l \rho (2V^j + \omega^j) \frac{\partial^2 x^s}{\partial t \partial q^j}, \quad V^l = u^l - \omega^l, \quad p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho h$$

Здесь по повторяющимся индексам суммирование: по  $j, l, s$  от единицы до трех, по  $i, k$  от единицы до двух. Слагаемые  $\Omega^l, \omega^l$  имеют порядок  $O(\alpha^{2-m})$ . Второй и третий члены в уравнении (6) существенны для слоя  $\Delta = O(\alpha)$  и могут быть опущены в первом приближении в слое  $\Delta = O(\alpha^2)$  [8, 9]. Последнее слагаемое в уравнении (7) мало по сравнению с остальными слагаемыми в вязких подслоях ударного слоя толщины  $\Delta = O(\alpha)$ , но существенно для ряда режимов в ударном слое  $\Delta = O(\alpha^2)$  [8, 9].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сычев В. В. О гиперзвуковых течениях вязкого теплопроводного газа.— ПММ, 1961, т. 25, № 4, с. 600–610.
2. Cheng H. K. The blunt-body problem in hypersonic flow at low Reynolds number.— Inst. Aerospace Sci. Paper, 1963, v. 92.
3. Bush W. B. On the viscous hypersonic blunt body problem.— J. Fluid Mech., 1964, v. 20, № 3, p. 353–367.
4. Магомедов К. М. Гиперзвуковое обтекание тупых тел вязким газом.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2, с. 45–56.
5. Марков А. А. Асимптотический анализ уравнений Навье – Стокса для трехмерных течений в тонком ударном слое. М., 1979. 74 с. (Препр. Ин-та пробл. мех. АН СССР, № 124).
6. Гершбейн Э. А., Юницкий С. А. Гиперзвуковой пространственный вязкий ударный слой в однородном газе при наличии вдува.— В сб.: Аэродинамика гиперзвуковых течений при наличии вдува. М.: Изд. Моск. ун-та, 1979, с. 111–120.
7. Лунев В. В. Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975. 327 с.
8. Марков А. А. Исследование стационарного течения вязкого газа в тонком трехмерном ударном слое.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 5, с. 115–126.
9. Марков А. А. Нестационарные эффекты в тонком вязком ударном слое около трехмерной критической точки при заданном ускорении и торможении тела.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1981, № 2, с. 100–111.
10. Баранцев Р. Г., Энгельгарт В. Н. Асимптотическое решение вблизи точки отрыва ударного слоя при гиперзвуковом обтекании затупленных тел.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1979, № 19, с. 61–66.
11. Лисейкин В. Д., Яненко Н. Н. Метод подвижных координат в газовой динамике.— В сб.: Числ. методы механ. сплош. среды, 1976, т. 7, № 2, с. 75–82.
12. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
13. Богатко В. И., Колтон Г. А. Пространственное нестационарное движение газа за фронтом сильной ударной волны.— Вестн. Ленингр. ун-та, 1971, № 1, с. 78–85.

Москва

Поступила в редакцию  
26.IX.1980

УДК 532.541.182

### О ВЛИЯНИИ ЧАСТИЦ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ ТЕЛ В ДИСПЕРСНОМ ПОТОКЕ

ЮРЬЕВ И. М.

Рассматривается движение дисперсной среды при малой объемной, но значительной по массе концентрации сильно инерционных частиц. Показывается, что в рамках линеаризации уравнений движение такой среды будет безвихревым при невозмущенном на бесконечности набегающем потоке. Предлагаются простые формулы оценки влияния частиц на лобовое сопротивление среды движущемуся телу произвольной формы и на определение скорости течения с помощью трубки Пито – Прандтля.

Пусть некоторое тело характерного размера  $l$  обтекается стационарным потоком газа при малой объемной, но значительной по массе концентрации частиц. Если условия задачи позволяют считать частицы двигающимися по закону Стокса, а газ обтекающим тело как идеальная несжимаемая жидкость, то уравнения движения дисперсной среды будут такими:

$$\frac{dW}{dt} + \frac{\gamma}{\rho} \frac{dV}{dt} = - \text{grad } P \quad (1)$$