

**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА**
№ 3 • 1982

УДК 532.516

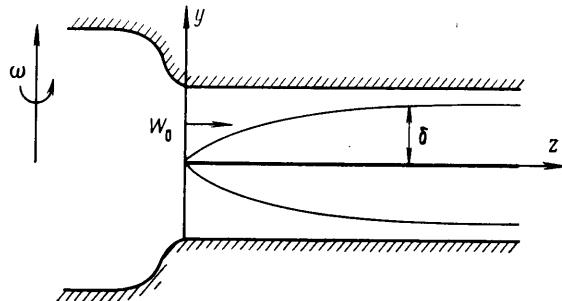
**РАЗВИТИЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПЛАСТИНКЕ
ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЕ**

СМИРНОВ Е. М., ШАТРОВ А. В.

В приближении теории пограничного слоя численным методом исследовано развитие течения вблизи поверхности вращающейся пластины при обтекании ее плоским потоком с прямолинейными, перпендикулярными передней кромке линиями тока во вращающейся системе координат, жестко связанной с пластиной.

Ранее с помощью приближенного метода интегральных соотношений была обнаружена и качественно описана картина перехода от пограничного слоя Блазиуса к слою Экмана в форме пространственных колебаний [1]. Полученное ниже решение подтверждает наличие колебательного характера развития пограничного слоя. Количественные результаты существенно отличаются от представленных в [1].

1. Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в пограничном слое, обращающемся на пластине, которая равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной поверхности пластины. Декартову правую систему коорди-



Фиг. 1

нат xuz жестко связем с пластиной и ориентируем так, чтобы ось z была перпендикулярна к передней кромке и направлена вниз по потоку, а ось y совпадла с нормалью к поверхности пластины. Введем обозначение: u , v , w — проекции относительной скорости на оси координат x , y , z ; v — коэффициент кинематической вязкости; $p^* = p + \frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2)$ — модифицированное давление; ρ — плотность; p — давление; W_0 — скорость потока на входе в канал. Пусть линии тока внешнего однородного потока в системе координат xuz прямолинейны и направлены параллельно оси z . Кроме того, предположим, что распределение скорости в пограничном слое неизменно в направлении оси x . Такое течение реализуется, например, при обтекании пластины, расположенной вблизи входа в быстровращающийся щелевой канал, при однородном распределении скорости во входном сечении и на достаточном удалении от боковых (коротких) стенок канала (фиг. 1). Роль боковых стенок заключается в создании постоянного градиента модифицированного давления в направлении оси x , уравновешивающего действие силы Кориолиса для выбранного внешнего течения: $-(1/\rho) \partial p^*/\partial x = 2\omega W_0$.

Уравнение неразрывности и движения в приближении теории пограничного слоя в выбранной системе координат с учетом принятых предположений и граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$w \frac{\partial w}{\partial z} + v \frac{\partial w}{\partial y} = 2\omega u + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.2)$$

$$w \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega(W_0 - w) + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} y=0: \quad u=v=w=0; \quad y \rightarrow \infty: \quad u \rightarrow 0, \quad w \rightarrow W_0 \\ z=z_0: \quad w=w_0(y), \quad u=u_0(y) \end{aligned} \quad (1.4)$$

тогда z_0 – расстояние от передней кромки пластины, начиная с которого справедливо приближение теории пограничного слоя.

В качестве масштаба толщины пограничного слоя выберем величину

$$\delta_0 = \int_0^\infty \frac{w}{W_0} \left(1 - \frac{w}{W_0} \right)^2 dy \quad (1.5)$$

Обоснование такого выбора приводится ниже. Запишем конвективную производную от выражения $(W_0 - w)^2$, преобразуем ее с учетом уравнений (1.1) и (1.2) и, представив левую часть в дивергентном виде, получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial z} [w(W_0 - w)^2] + \frac{\partial}{\partial y} [v(W_0 - w)^2] = -4\omega u(W_0 - w) - 2v(W_0 - w) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (1.6)$$

Проинтегрируем (1.6) по y от 0 до ∞ , в результате найдем интегральное соотношение, определяющее изменение масштаба δ_0 вдоль пограничного слоя

$$\frac{d}{dz} (\delta_0 W_0^3) = -4\omega \int_0^\infty u(W_0 - w) dy - 2v \int_0^\infty \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dy + 2v W_0 \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (1.7)$$

Введем функцию тока и безразмерные величины

$$\xi = \frac{z\omega}{W_0}, \quad \eta = \frac{y}{\delta_0(z)}, \quad \varphi(\xi, \eta) = \frac{w}{W_0}, \quad \chi(\xi, \eta) = \frac{u}{W_0}, \quad \Phi = \int_0^\eta \varphi d\eta$$

Уравнения (1.2), (1.3), (1.7) и граничные условия (1.4) запишем в безразмерном виде

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{F\Phi}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + 2f\chi = f \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} + \frac{F\Phi}{2} \frac{\partial \chi}{\partial \eta} + 2f(1-\varphi) = f \left(\varphi \frac{\partial \chi}{\partial \xi} - \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) \quad (1.9)$$

$$\frac{df}{d\xi} = F, \quad f = \frac{\delta_0^2 \omega}{v}, \quad F = -8f \int_0^\infty \chi(1-\varphi) d\eta - 4 \int_0^\infty \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 d\eta + 4 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \quad (1.10)$$

$$\eta=0: \quad \varphi=\chi=0; \quad \eta \rightarrow \infty: \quad \varphi \rightarrow 1, \quad \chi \rightarrow 0 \quad (1.11)$$

$$\xi=\xi_0: \quad \varphi=\varphi_0(\eta), \quad \chi=\chi_0(\eta), \quad f=f_0 \quad (1.12)$$

Отдавая себе отчет в непригодности уравнений (1.8)–(1.10) для описания течения в окрестности передней кромки пластины, положим, однако, в дальнейшем $\xi_0 = 0$ и $\delta_0(\xi_0) = 0$. Так как последнее условие влечет за собой равенство $f_0 = 0$, то из системы (1.8)–(1.9), (1.11) следует, что $\varphi_0(\eta)$ будет соответствовать решению Блазиуса для пограничного слоя на пластине, а $\chi_0(\eta) = 0$.

Система уравнений (1.8), (1.9) и (1.10) с граничными (1.11) и начальными (1.12) условиями интегрировалась численным методом. Было использовано преобразование координат, переводящее полубесконечную полосу (ξ, η) в единичную полосу (ξ', η')

$$\xi' = \xi, \quad \eta' = 1 - \exp(-k\eta) \quad (1.13)$$

В результате отладочных вычислений величина k в преобразовании (1.13) была выбрана равной 0,0307.

В качестве аппроксимирующей разностной схемы выбрана неявная шеститочеч-

ная схема Кранка – Николсона [2] с погрешностью аппроксимации второго порядка. Для решения конечно-разностной задачи использован алгоритм матричной прогонки. Решение на новом слое по ξ находилось посредством организации итерационного цикла. Норма сходимости итераций определялась соотношением

$$\|\delta f_i\| = \left[\sum_{i=1}^M (f_i^{k+1} - f_i^k) \right] / \sum_{i=1}^M f_i^{k+1}$$

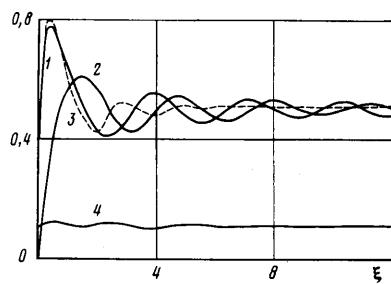
с условием выхода из итераций $\|\delta f_i\| \leq \varepsilon$. Здесь k – номер итерации, f_i – значение вычисляемой величины в i -й точке по η' . Решение задачи получено при следующих значениях параметров:

$$\Delta\eta' = 10^{-2}, \quad \Delta\xi = 0.5 \cdot 10^{-1}, \quad \varepsilon = 10^{-5}$$

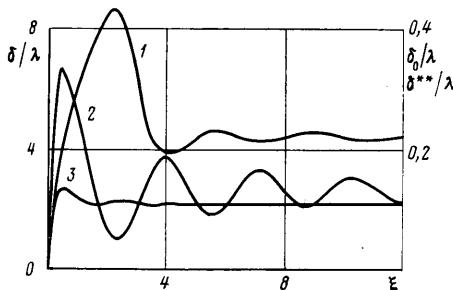
2. На фиг. 2 кривыми 1 и 2 изображены графики изменения величин δ^*/λ и q/λ , характеризующих соответственно толщину вытеснения основного течения и расход, переносимый вторичным поперечным течением:

$$\delta^* = \int_0^\infty (1-\varphi) dy, \quad q = \int_0^\infty \chi dy, \quad \lambda = \sqrt{\frac{v}{\omega}} \quad (2.1)$$

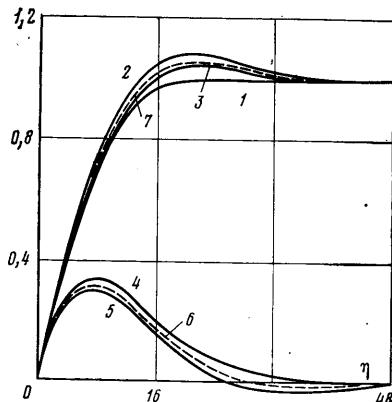
Величина λ является масштабом толщины слоя Экмана [3]. Вблизи точки $\xi=0$ в соответствии с решением Блазиуса $\delta^*/\lambda = 1.72\sqrt{\xi}$. При увеличении ξ зависимость величин δ^*/λ и q/λ от ξ приобретает характер пространственных затухающих колебаний вокруг асимптотических значений, равных 0,5. Отклонения этих величин от асимптотических значений, начиная с $\xi=20$, составляют



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

не более 1%. Значения $\delta^*/\lambda = q/\lambda = 0,5$ следуют из решения Экмана [3], являющегося решением системы (1.8)–(1.11) при $\partial/\partial\xi = 0$. Отметим, что колебания δ^*/λ и q/λ сдвинуты по фазе и при $\xi > 10$ период колебаний близок к π . Штриховая линия 3 на фиг. 2 показывает изменение величины δ^*/λ , полученное приближенным интегральным методом [1]. Это решение дает лишь качественную характеристику течения в области перехода от слоя Блазиуса к слою Экмана.

На фиг. 3 представлены графики изменения величин δ/λ , δ^*/λ и δ_0/λ (кривые 1, 2 и 3). Здесь δ – условная толщина пограничного слоя, равная расстоянию от пластины, начиная с которой отличие скорости w составляет менее 0,5% от W_0 ; δ^* – толщина потери импульса, часто используемая в качестве характеристического масштаба толщины пограничного слоя. Из графиков можно определить интервалы изме-

нения толщины слоя δ в масштабах δ^{**} и δ_0 :

$$9 < \delta/\delta^{**} < 173, \quad 26 < \delta/\delta_0 < 78 \quad (2.2)$$

Из соотношений (2.2) следует, что использование δ^{**} как масштаба толщины слоя при численном решении приводит к неоправданно большим затратам машинного времени из-за необходимости, сохраняя достаточно малый шаг (для получения решения при $\delta/\delta^{**}=9$), задавать очень большие значения поперечной координаты (для получения решения при $\delta/\delta^{**}=173$). Использование в качестве масштаба толщины пограничного слоя величины δ_0 , приводит не только к сокращению затрат машинного времени на одной итерации, но и к существенному уменьшению числа итераций, что является следствием быстрого установления δ_0 в отличие от δ^{**} .

На фиг. 4 приведены профили скоростей основного и поперечного потоков при различных значениях ξ . Первоначально профиль скорости основного потока соответствует профилю Блазиуса на пластине в инерциальной системе координат (кривая 1). Поперечное течение, развивающееся вследствие нарушения баланса силы Кориолиса и градиента давления в направлении оси x , которое обусловлено торможением потока вблизи стенки, оказывает через появление проекции кориолисовой силы на ось z обратное воздействие на профиль основного потока. В свою очередь изменение профиля скорости основного потока отражается на развитии поперечного течения. Таким образом, процесс имеет колебательный характер.

Кривая 4 соответствует профилю поперечной скорости при максимуме расхода q ($\xi=1,5$). Кривая 2 иллюстрирует наиболее заполненный профиль φ ($\xi=2,35$). В точке $\xi=3,0$ расход уменьшается до минимального, отличного от нуля значения, этому соответствует профиль $\chi(\eta)$, представленный кривой 5. Уменьшение компоненты силы Кориолиса $| -2\omega u |$ сопровождается снижением интенсивности воздействия на основной поток, что вновь приводит к менее заполненному профилю φ (кривая 3 при $\xi=3,95$). Колебания совершаются вокруг асимптотических значений, соответствующих профилям решения Экмана (кривые 6 и 7). График изменения напряжения трения вдоль пластины $\zeta = (\partial\varphi/\partial\eta'')/\eta'' = 0$, где $\eta'' = y/\lambda$, представлен кривой 4 на фиг. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kurosaka M. The oscillatory boundary layer growth over the top and bottom plates of a rotating channel.— Trans. ASME, Ser. D, 1973, v. 95, № 1. (Рус. перев.: Куросака. Колебательный характер развития пограничного слоя на верхней и нижней стенах врачающегося канала.— Тр. амер. об-ва инж.-мех. Теорет. основы инж. расчетов. 1973, т. 95, № 1, с. 139—146).
2. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
3. Бэтчелор Д. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
5.III.1981

УДК 532.517.2

ЗАКОНОМЕРНОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ЗОН ОТРЫВА НА ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛ СЕГМЕНТАЛЬНО-КОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

ГЛАГОЛЕВ А. И., ЗУБКОВ А. И., ЛЯГУШИН Б. Е.

При обтекании тел сегментально-конической формы, расположенных под углом атаки, сверхзвуковым и гиперзвуковым потоками на их поверхности образуется сложная система зон отрыва, характер течения в которых существенным образом зависит от геометрических параметров обтекаемого тела и от его положения относительно набегающего потока. В ряде работ, посвященных этому вопросу [1—3], на основе экспериментальных исследований приводится анализ пространственных картин течения вблизи и на поверхности тел. Полученные и проанализированные в этих работах картины отрыва частично согласуются с результатами аналогичных исследований, обзор которых представлен в [4]. Однако наряду с этим обнаружен целый ряд особенностей, касающихся изменения режимов обтекания затупленных тел при изменении углов атаки.

В настоящей работе приводятся закономерности изменения основных геометрических размеров отрывных областей на поверхности тел сегментально-конической формы, а также некоторые данные по распределению давления и удельных тепловых потоков вдоль образующей его конической части. Модель, на которой проводи-