

МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1982

УДК 533.694.24

К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ НЕСТАЦИОНАРНОГО
ОБТЕКАНИЯ КРЫЛА СО СТРУЯМИ

БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ С. М., ГУЛЯЕВ В. В., ЯКОВЛЕВ В. В.

В настоящее время известен ряд приближенных подходов к исследованию нестационарных аэродинамических характеристик профиля со струйным закрылком [1–3], которые применимы лишь для профиля, малой интенсивности струи и малых частот колебаний.

В данной статье метод дискретных вихрей [4] обобщается на случай нестационарного обтекания крыла произвольной формы в плане со струями. Задача решается в линейной постановке, используются общепринятые условия о непротекании крыла и струи, о конечности скоростей на задних кромках, где нет струи, а также динамическое условие на струе. Крыло и струя считаются тонкими, среда невязкой и несжимаемой.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение крыла произвольной формы в плане в идеальной несжимаемой среде с поступательной скоростью u_0 под нулевым углом атаки, сопровождаемое выдувом струй у задних кромок крыла по всему размаху или по части его, причем угол выдува струй может меняться со временем. Прямоугольную систему координат xuz свяжем с крылом, начало координат поместим в носке корневой хорды, ось x направим назад по хорде, ось y — вверх, ось z — вправо по размаху крыла.

Корневую хорду крыла обозначим b , время — t , скорость истечения струи — V , угол между хордой и вектором скорости — θ в месте выдува струи — θ_0 .

Введем безразмерные величины, положив

$$\xi = \frac{x}{b}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \zeta = \frac{z}{b}, \quad \tau = \frac{u_0 t}{b}, \quad v = \frac{V}{u_0}$$

где τ — безразмерное время.

Деформацию струи будем характеризовать отклонением серединной поверхности от плоскости $y=0$: $\eta_s(\xi, \zeta, \tau)$. Закон изменения угла выдува струи считаем известным

$$\theta_0(\xi, \tau) = f_\theta(\xi) \theta(\tau), \quad \theta_0(\xi, \tau) = -\partial \eta_s / \partial \xi \quad (\xi = \xi^*)$$

Здесь $\theta(\tau)$ — безразмерный параметр угла выдува струи, ξ^* — значение координаты ξ у задней кромки крыла.

Границное условие на поверхности крыла (область D_1) и струи (область D_2) выражает требование о непротекании сквозь крыло и струю и для сформулированной задачи имеет вид (W_v — возмущенная скорость на крыле и струе)

$$\frac{W_v(\xi, \zeta, \tau)}{u_0} = 0 \in D_1, \quad -\theta_s(\xi, \zeta, \tau) + \dot{\eta}_s(\xi, \zeta, \tau) \in D_2$$

$$\theta_s = \frac{\partial \eta_s}{\partial \xi}, \quad \dot{\eta}_s = \frac{\partial \eta_s}{\partial \tau}$$

Отметим, что угол выдува струи входит в граничные условия на струе и на задней кромке $\theta_s = \theta_0(\xi, \tau)$.

Каждый закон изменения угла выдува струи требует решения новой задачи. Линейная постановка задачи позволяет не рассматривать все интересующие нас законы изменения по времени кинематического параметра $\theta(\tau)$ — угла выдува струи, а ограничиться только одним — ступенчатым [4]: $\theta(\tau)/\theta^* = 0$ ($\tau < 0$), 1 ($\tau \geq 0$), где θ^* — не зависящее от времени характерное значение угла выдува струи.

Результатом решения этой базовой задачи является переходная функция, обозначаемая $[C_s(\tau)]$, где $C(\tau)$ — любая линейная аэродинамическая характеристика. Решение задачи при произвольных зависимостях от времени угла выдува струи, а также при расчете частотных характеристик производится методом наложения решений с помощью интеграла Дюамеля [4].

Заметим, что при анализе нестационарных течений со струями следует различать две задачи. Первая, в которой к моменту времени $\tau=0$ (началу изменения угла выдува струи) струя уже выстроена (длина струи $l_s=\infty$) и угол выдува струи $\theta_0=0$. Во второй задаче изучается развитие процесса обтекания с момента начала выдува струи. Здесь в отличие от первой задачи коэффициенты будем снабжать индексом T .

Таким образом, на струе следует различать два участка. Первый (будем его называть «новой» струей) — это та часть ее, которая содержит частицы, попавшие в поток в период времени от $\tau=0$ до рассматриваемого момента τ . Безразмерную длину его обозначим $l'_s = l_s/b = \tau$, (он находится непосредственно за крылом). Второй участок (назовем его «старой» струей) — это та часть ее, которая попала в поток до $\tau=0$ (до начала изменения угла выдува струи θ_0). В рассматриваемый момент времени τ , он находится за новой струей и имеет бесконечную длину. Как будет показано ниже, форма струи строится по-разному на новом и старом участках. Очевидно, что в нестационарной задаче, связанной с началом выдува струи, имеет место только «новая» струя.

Рассмотрим элемент струи dS в сечении $z=\text{const}$, радиус кривизны которого равен R . Внутри струи справедливо уравнение Эйлера (массовыми силами пренебрегаем).

Спроектируем его на направление радиуса кривизны сечения струи R и проинтегрируем обе части уравнения по сечению струи

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \int_{R_2}^{R_1} \frac{\rho V_s^2}{R} dR \quad (1.1)$$

Здесь V_s — скорость жидкой частицы струи, перпендикулярная радиусу кривизны R , ρ — плотность струи. Индексами 1 и 2 обозначены нижняя и верхняя стороны струи соответственно. Введем в рассмотрение коэффициент количества движения струи

$$C_\mu = \left(\int_{R_2}^{R_1} \rho V_s^2 dR \right) / q_\infty b' \quad (1.2)$$

где q_∞ — скоростной напор невозмущенного потока, b' — хорда сечения крыла $\xi=\text{const}$.

Соотношение (1.1) с учетом (1.2) в безразмерном виде для бесконечно тонкой струи примет вид

$$\Delta p' = \frac{C_\mu}{R'}, \quad \Delta p' = \frac{p_1 - p_2}{q_\infty}, \quad R' = \frac{R}{b} \quad (1.3)$$

Оно дает связь между перепадом давления на струе, ее радиусом кривизны и коэффициентом количества движения струи в любом сечении $z=\text{const}$.

2. Вихревая модель. Основные уравнения. Идея численного метода решения сформулированной задачи заключается в переходе от непрерывных распределений и процессов к дискретным. Распределенный вихревой слой, заменяющий крыло и струю, аппроксимируется системой дискретных вихрей, пелена свободных вихрей также заменяется дискретными вихрями. Непрерывный процесс изменения граничных условий и циркуляции во времени заменяется ступенчатым. В определенные (расчетные) моменты времени происходит скачкообразное изменение граничных условий и циркуляций, а в промежутки между ними циркуляции не меняются. Соответственно этому свободные вихри сходят с присоединенных в дискретные моменты времени, причем скорость их движения равна u_0 .

В данной задаче дискретными вихрями заменяются суммарный вихревой слой, состоящий из свободных и присоединенных вихрей на крыле и струе, и свободный — за крылом и струей. Положение и обозначения для координат вихрей, контрольных точек на крыле и струе и следе, а также для различных геометрических величин введем аналогично [4]. Напряженность суммарных вихрей Γ_z на крыле и струе зависит от времени, а напряженность сущедших в поток свободных вихрей Γ_- остается неизменной.

Удобно перейти к безразмерным циркуляциям и скоростям, положив

$$\Gamma_z = u_0 b \Gamma, \quad \Gamma_- = u_0 b \delta_-, \quad W_v / u_0 = (\Gamma / 2\pi) w_v$$

Задача о расчете нестационарного обтекания крыла со струей сводится в каждый рассматриваемый момент времени r к решению системы линейных алгебраических уравнений для безразмерных циркуляций. Эта система имеет вид (Δw_v — суммарная безразмерная скорость, вызванная парой симметрично расположенных вихрей)

$$\sum_{k=1}^N \left(\sum_{\mu=1}^{n_k} \Gamma_{\mu k}^{rk-1} \Delta w_{y\mu k}^{k-1 pp-1} + \sum_{s=1}^r \delta_{-k}^{sh-1} \Delta w_{y n+r-s+1, k v}^{k-1 pp-1} \right) = Q \quad (2.1)$$

$$Q = 0 \in D_1, \quad Q = -2\pi (\vartheta_{sv}^{rp-1} - \eta_{sv}^{rp-1}) \in D_2$$

$$\sum_{k=1}^N \left(\sum_{\mu=1}^{n_k} \Gamma_{\mu k}^{rk-1} + \sum_{s=1}^r \delta_{-k}^{sh-1} \right) = 0$$

$$p=1, 2, \dots, N, \quad v=1, 2, \dots, n_p^{p-1}, \quad r=1, 2, \dots$$

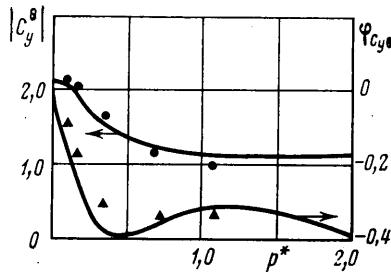
В каждый расчетный момент r неизвестными являются суммарные вихри $\Gamma_{\mu k}^{rk-1}$, моделирующие крыло и струю, и только что сущедшие в поток свободные вихри δ_{-k}^{rk-1} . Последнее уравнение в (2.1), выражающее условие о неизменности циркуляции по замкнутому контуру, охватывающему крыло и след, позволяет получить количество уравнений, равное числу неизвестных. Правые части уравнений содержат неизвестные величины ϑ_{sv}^r и η_{sv}^r , определяющие форму струи и скорость ее деформации.

3. Определение формы струи. Предварительно выразим разность дав-

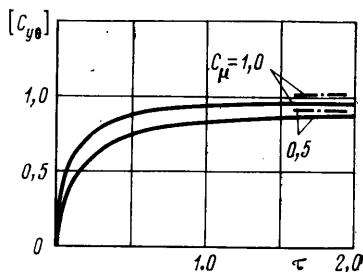
ления на струе в точке v (остальные индексы для простоты будем опускать) через суммарный вихревой слой, моделирующий струю. Линеаризованная форма интеграла Коши — Лагранжа имеет вид [4]

$$\Delta p_v' = 2(\gamma_{\Sigma v} - \partial \Gamma_{lv} / \partial \tau) \quad (3.1)$$

где $\gamma_{\Sigma v}$ — суммарная интенсивность вихревого слоя в точке v , Γ_{lv} — циркуляция по замкнутому контуру l , пересекающему струю в точке v . Пос-



Фиг. 1



Фиг. 2

ле несложных преобразований, перейдя к дискретной схеме и учитывая соотношение (1.3), выразим радиус кривизны через C_μ и циркуляции вихрей

$$\frac{1}{R_v'^r} = \frac{\Delta p_v'^r}{C_\mu} = \frac{2}{C_\mu} \left\{ \frac{\Gamma_\mu}{\Delta \xi_\mu} - \frac{1}{\Delta \tau} \left[\sum_{e=\mu}^n (\Gamma_e^r - \Gamma_e^{r-1}) + \delta_{-r} \right] \right\} \quad (3.2)$$

$$\Delta \xi_\mu = \xi_v - \xi_{v-1}, \quad \Delta \tau = 1/n_{N_k}^{N-1}$$

Здесь $n_{N_k}^{N-1}$ — число панелей в полосе крыла, примыкающей к корневой хорде.

С линейной точностью можем записать

$$\frac{1}{R'} \approx \eta_s'' = \frac{d^2 \eta_s}{d \xi^2}$$

Проинтегрировав это уравнение на участке $\Delta \xi_\mu$, получим

$$\left(\frac{d \eta_s}{d \xi} \right)_v = \int_{\xi_{v-1}}^{\xi_v} \frac{1}{R'} d \xi + \left(\frac{d \eta_s}{d \xi} \right)_{v-1}$$

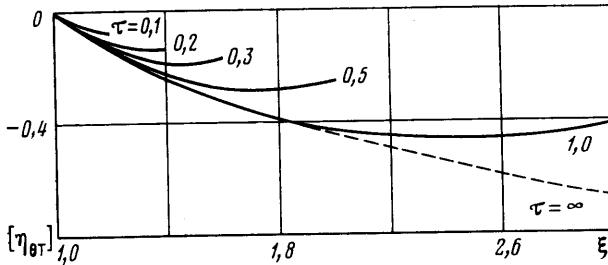
Принимая на участке $\Delta \xi_\mu$ величину $1/R' = \text{const}$, находим

$$\theta_{sv} = \theta_{sv-1} - \Delta \xi_\mu / R'_{v-1} \quad (3.3)$$

Последовательно применяя формулу (3.3), с учетом (3.2) получим связь местного угла наклона струи с напряженностью вихрей

$$\theta_{sv} = \theta_0 - \frac{2}{C_\mu} \sum_{k=1}^v \left\{ \Gamma_k^r - \frac{\Delta \xi_k}{\Delta \tau} \left[\sum_{e=k}^n (\Gamma_e^r - \Gamma_e^{r-1}) + \delta_{-r} \right] \right\}$$

Эта связь имеет место при рассмотрении «новой» струи, когда $\xi_v' \leq \xi^* + v \tau_r$. Отметим, что на новой струе в любой расчетный момент известны условия слева, т. е. угол выдува струи из задней кромки крыла



Фиг. 3

При рассмотрении старой струи, т. е. точек $\xi_v^r > \xi^* + v\tau_r$, воспользуемся тем, что при любых τ имеем (условие справа)

$$\partial \eta_s / \partial \xi = 0 \quad (\xi \rightarrow \infty)$$

При последовательном применении формулы (3.3) получаем рекуррентную формулу, идя от конца струи ($\xi = \infty$) к задней кромке крыла:

$$\Theta_{sv}^r = \frac{2}{C_\mu} \left\{ \sum_{k=v+1}^n \Gamma_k^r - \frac{1}{\Delta\tau} \sum_{k=v+1}^n \Delta \xi_k \left[\sum_{e=k}^n (\Gamma_e^r - \Gamma_e^{r-1}) + \delta_{-e}^r \right] \right\}$$

4. Решение системы уравнений. Чтобы построить метод численного решения уравнений (2.1), представим циркуляции суммарных и свободных вихрей, местные углы наклона струи и скорости деформации в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu^r &= \Gamma_\mu^{*r} + \Delta \Gamma_{\mu \dot{\eta}_s^*}^r + \Delta \Gamma_{\mu \Delta_1 \eta_s}^r + \Delta \Gamma_{\mu \Delta_2 \dot{\eta}_s}^r + \dots \\ \delta_{-}^r &= \delta_{-}^{*r} + \Delta \delta_{-\dot{\eta}_s^*}^r + \Delta \delta_{-\Delta_1 \dot{\eta}_s}^r + \Delta \delta_{-\Delta_2 \dot{\eta}_s}^r + \dots \\ \Theta_{sv}^r &= \Theta_{sv}^{*r} + \Delta \Theta_{sv \dot{\eta}_s^*}^r + \Delta \Theta_{sv \Delta_1 \dot{\eta}_s}^r + \Delta \Theta_{sv \Delta_2 \dot{\eta}_s}^r + \dots \\ \dot{\eta}_{sv}^r &= \dot{\eta}_{sv}^{*r} + \Delta_1 \dot{\eta}_{sv}^r + \Delta_2 \dot{\eta}_{sv}^r + \dots \end{aligned} \quad (4.1)$$

После подстановки (4.1) в систему уравнений (2.1) в силу ее линейности приходим к ряду самостоятельно решаемых систем. Уравнения при этом получаются непротиворечивые, что доказывает правомерность подобного разделения.

Получаем следующий порядок последовательности решения задачи. В первом приближении пренебрегаем скоростью деформации струи, т. е. в левых частях (2.1) удерживаем только члены Γ_μ^{*r} , δ_{-}^{*r} , а в правых — Θ_{sv}^{*r} . Определяем деформации струи и по ним — скорости деформации струи в расчетных точках для каждого расчетного момента времени:

$$\dot{\eta}_{sv}^{*r} = (\eta_{sv}^{r-1} - \eta_{sv}^{r+1}) / 2\Delta\tau \quad (4.2)$$

Затем рассматриваем систему, в которой в левых частях содержатся члены $\Delta \Gamma_{\mu \dot{\eta}_s^*}^r$, $\Delta \delta_{-\dot{\eta}_s^*}^r$, а в правых — $\Delta \Theta_{sv \dot{\eta}_s^*}^r$ и η_{sv}^{*r} , и далее по (4.2) определяем $\Delta_1 \eta_{sv}^r$. После этого делаем следующий шаг и так далее, пока не будет достигнута практическая сходимость процесса.

Определив значения циркуляций суммарных вихрей, используем интеграл Коши — Лагранжа (3.1) и, учитывая (3.2), определяем аэродинамические нагрузки, действующие в каждом сечении крыла Δp_{vp}^{rp-1} .

Затем нетрудно найти характеристики сечений и аэродинамические коэффициенты крыла в целом.

5. Примеры. Изложенным методом произведены расчеты переходных функций для профиля и крыльев различной формы в плане с выдувом струй по всему размаху или его части. Местный коэффициент импульса струи по размаху крыла принимался постоянным.

На фиг. 1 представлено сравнение результатов расчета амплитудно-частотных $|C_y^\theta|$ и фазо-частотных $\varphi_{y\theta}$ характеристик подъемной силы профиля со струей ($C_\mu=0,383$; $v=V/u_0=10$), угол выдува которой менялся по гармоническому закону, с данными экспериментов статьи [5]. Частотные характеристики получены следующим образом: определялась переходная функция $[C_{y\theta}]$ — реакция системы (профиль — струя) на ступенчатое отклонение угла выдува струи, затем с помощью интеграла типа свертки [4] рассчитывались частотные характеристики. Через $p^*=\omega b/u_0$ обозначено число Струхalia (ω — круговая частота колебаний).

Фигура 2 содержит данные об изменении во времени коэффициента подъемной силы $[C_{y\theta}(\tau)]$ равностороннего треугольного крыла ($\chi=60^\circ$) при мгновенном отклонении угла выдува струи. Относительная скорость выдува струи $v=V/u_0=10$, $C_\mu=-0,5$ и 1; выдув струи осуществлялся по всему размаху крыла. Штрихпунктирными линиями показаны стационарные значения.

На фиг. 3 представлены некоторые результаты изучения формы струи при решении нестационарной задачи, в которой в момент времени $\tau=0$ начала выдуваться струя под углом θ со скоростью $v=V/u_0=2$ с коэффициентом импульса струи $C_\mu=0,8$. Здесь показаны формы струи в различные моменты времени для центрального сечения прямоугольного крыла $\lambda=5$. Струя выдувается в центральной части крыла размахом $l_c=0,8l$ (l — размах крыла). Штриховой линией приведено стационарное положение струи ($\tau=\infty$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Spence D. A. The theory of the jet — flap for unsteady motion.— J. Fluid Mech., 1961, v. 10, № 2, p. 237—258.
2. Spence D. A. The flow past a thin wing with an oscillating jet flap.— Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1965, ser. A, v. 257, № 1085, p. 445—477.
3. Simmons J. M., Platzer M. F. A quasisteady theory for incompressible flow past airfoils with oscillating jet flaps.— AIAA Journal, 1978, v. 16, № 3, p. 237—241.
4. Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971, 767 с.
5. Simmons J. M. Measured pressure distributions on airfoil with oscillating jet flap.— AIAA Journal, 1976, v. 14, № 9, p. 1297—1302.

Москва

Поступила в редакцию
8.VIII.1980