

УДК 532.593.4

О ЦЕНТРАЛЬНОЙ ФОКУСИРОВКЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В МЕЛКОЙ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

КРОНИН Ю. А.

Эффекты, связанные с движением поверхностных кольцевых волн в жидкости к центру, рассмотрены в работах [1, 2]. В работе [3] изучено зарождение и распространение волны с головным фронтом в виде круглой дуги. Отмечается трудность аналитического описания этих явлений. Данная статья посвящена итогам численного исследования формирования и эволюции сфокусированного длинноволнового излучения, создаваемого начальным стационарным возвышением уровня прямолинейного, полукольцевого, кольцевого и вписанного в кольцо правильного пятиугольного видов в плане. Полученные результаты обобщены на случай волнопродуктора любой длины, а выведенные закономерности позволяют оценить эффект кумуляции независимо от начальных условий, если амплитуда в гребне радиально конвергирующей волны в момент, когда движение свободной поверхности начинает происходить исключительно под действием силы тяжести, так или иначе определена. Анализируются особенности моделирования таких волн на гидравлических установках с импульсивным радиально давящим нестационарным источником.

1. Постановка задачи, метод решения. Исследуем особенности центральной фокусировки длинных неустановившихся волн на плоской двумерной гидродинамической модели. Предположим, что лишенный отражающих границ бассейн глубины h на вращающейся Земле заполнен идеальной несжимаемой жидкостью. Движение вызывается распадом имеющего в плане вид полосы начального стационарного возвышения уровня, любое сечение которого вертикальной плоскостью по нормали к его продольной оси задано положительной полусинусоидой единичной амплитуды. Пусть, кроме того, ширина полосы равна $2l_0$.

Рассмотрим прямолинейный, полукольцевой, кольцевой и вписанный в кольцо правильный пятиугольный источники волн. В последнем случае точки излома внутреннего фронта соответствуют проекциям осей, поворот поперечного сечения вокруг которых образует тело очага в зоне искривления. В торцовых частях прямолинейного и полукольцевого возвышений к полосе примыкают идентичные полусинусоидальные полукупола, имеющие в плане вид полуокружностей.

Представление о волнах в мелкой жидкости — так называемых длинных волнах — обычно связывают с существенной неравнозначностью вертикального и горизонтального масштабов движения. Исходя из этого, для построения длинноволновой гидродинамической модели потребуем ее соответствия критерию $2l_0/h=j$, где $j \geq 15$ [4]. С учетом отсутствия дисперсии при конвергенции волн [3] систему модельных уравнений, начальные и краевые условия на границах пространственной области запишем в виде [5]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} - fV + g \frac{\partial \xi}{\partial x} + k \frac{U(U^2 + V^2)^{1/2}}{h + \xi} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + fU + g \frac{\partial \xi}{\partial y} + k \frac{V(U^2 + V^2)^{1/2}}{h + \xi} = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial [(k+\xi)U]}{\partial x} + \frac{\partial [(k+\xi)V]}{\partial y} = 0 \quad (1.3)$$

$$\xi(x, y; 0) = \xi_0(x, y), \quad U(x, y; 0) = U_0(x, y), \quad V(x, y; 0) = V_0(x, y) \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} \pm \sqrt{gh} \frac{\partial \xi}{\partial S} = 0 \quad (1.5)$$

Здесь U, V — осредненные по вертикали скорости течения в направлениях x и y соответственно; ξ — отклонение уровня от равновесного состояния; t — время; g — ускорение силы тяжести; k — коэффициент сопротивления, моделирующий донное трение, $k = 0,26 \cdot 10^{-2}$; f — параметр Кориолиса; S — соответствующая составляющая координатного вектора точек горизонтальной плоскости.

Решение системы (1.1)–(1.5) найдено преобразованием дифференциальных уравнений в конечно-разностную форму с последующей численной реализацией на ЭВМ. Конечно-разностная аппроксимация выполнялась применительно к смешанной явно- неявной схеме переменных направлений на регулярной шахматной сетке точек с двухступенчатым шагом по времени.

Метод является безусловно устойчивым. Точность получения приближенных точных значений решения контролировалась использованием правила Рунге при допустимом несовпадении этих значений в пределах не более 5%.

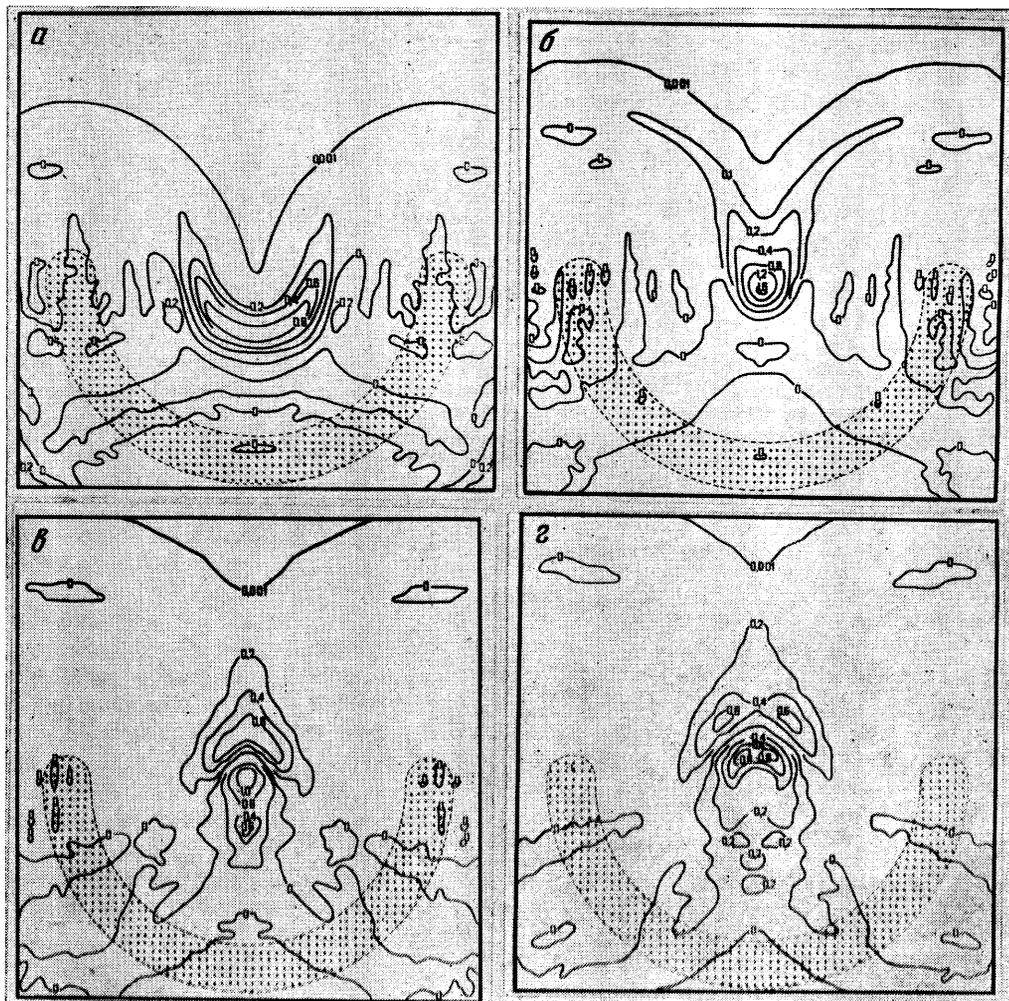
Каждый из рассмотренных вариантов движения будем характеризовать следующими параметрами: порядковым номером максимальной волны, начиная с головной; скоростью перемещения профилей максимальной волны и первого экстремума; наибольшими отклонениями свободной поверхности от положения равновесия $A_{m+}' = A_{m+}/A_0$ в гребне и $A_{m-}' = A_{m-}/A_0$ в ложбине максимальной волны, а также соответствующими значениями A_{1+}' и A_{1-}' для головного возмущения. Здесь A_0 — амплитуда приращения уровня при $t=0$.

Отфильтровывание кумулятивных эффектов, связанных с действием источников колебаний, достигалось выполнением требования о постоянстве глубины жидкого слоя. Значение параметра Кориолиса соответствовало широте 60° . В качестве масштаба для расстояний в горизонтальной плоскости была выбрана величина l_0 — полуширина начального возвышения свободной поверхности, в качестве единичного времени — величина $t^0 = l_0/(gh)^{1/2}$. Безразмерное время, таким образом, вводилось при помощи выражения $t' = t[(2/j)(g/l_0)]^{1/2}$. Безразмерный начальный радиус r_0' поднятия уровенной поверхности по гребню имел величину 7,805. Длина $L_0' = L_0/l_0$ полосы в случае прямолинейного исходного возмущения, привлекаемого для уточнения некоторых особенностей волновых картин, задавалась равной 8.

2. Полукольцевой источник. Отметим сразу, что первая волна, являющаяся одновременно и максимальной, в процессе перемещения к фокусу нигде не перестраивается так, чтобы граница возбужденного ею движения утрачивала признаки регулярной кривой. Соответствующую такому виду указанной границы совокупность свойств волнового фронта (отсутствие изломов и самопересечений фронтальной поверхности, кроме, быть может, кратных точек по линии смыкания) принято определять как его непрерывность.

Оценку эффекта фокусировки дадим для радиального направления, относительно которого вид рассматриваемого очага в плане симметричен.

Определяя момент окончательного формирования головной волны как момент появления первого отрицательного экстремума в эпицентре, отождествляемом с положением горизонтальной проекции вершины начального поднятия, получим, что в момент $t' = 1,420$ образовавшийся головной гребень, находясь на эпицентральной удалении $r' = 1,48$, имел амплитуду



Фиг. 1

$A_{1+}'=0,566$. В случае прямолинейного очага формирование головного гребня заканчивалось в тот же момент времени и на том же расстоянии, однако соответствующее значение A_{1+}' оказалось равным 0,538.

При распространении к центру амплитуда головного гребня нарастала. Закон нарастания с погрешностью, не превышающей 3% относительно результатов счета, может быть описан зависимостями вида

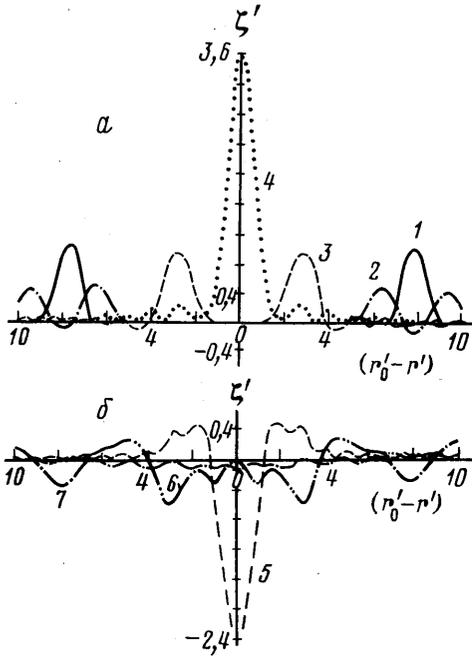
$$A_{1+}'=(2,076-1,63s)^{-1}, \quad 0,103 \leq s \leq 0,829 \quad (2.1)$$

$$A_{1+}'=3,86-2,04s^{-1}, \quad 0,829 < s \leq 1, \quad s=r'/r_0'.$$

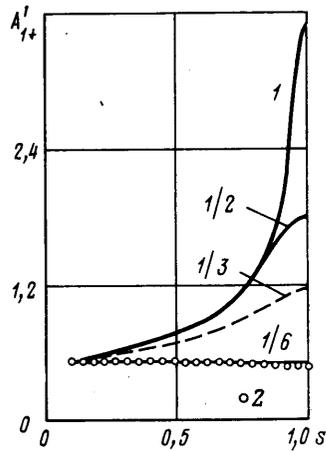
В момент схлопывания в центре амплитуда возвышения составляет 1,803. Это в 3,2 раза больше амплитуды в гребне в момент его окончательного формирования. Отклонение полученного результата от данных работы [3] равно 7,1%, что свидетельствует о слабой зависимости относительной высоты всплескового пика от начальных параметров сформировавшейся полукольцевой волны и механизма ее образования.

Целесообразно оценить эффект фокусировки излучения волн на стадии, когда деформация свободной поверхности, определяемая первоначально совместным действием вызвавшего ее физического источника и силы тяжести, происходит исключительно под влиянием гравитационного поля.

Приведем выражение, описывающее кумуляцию инвариантно относительно параметров и природы полукольцевого в плане очага. Обозначая $s^* = (r - r_i) / (r_0 - r_i) \equiv (r' - r_i') / (r_0' - r_i')$, где r_i — эпицентрального удаления окончательно сформировавшегося головного гребня, амплитуда которого A_{1+}° так или иначе определена с точностью, указанной для уравнений (2.1),



Фиг. 2



Фиг. 3

получим

$$A_{1+} = A_{1+}^\circ (0,995 - 0,73s^*)^{-1}, \quad 0 \leq s^* \leq 0,790 \quad (2.2)$$

$$A_{1+} = A_{1+}^\circ [6,04 - 2,81(s^*)^{-1}], \quad 0,790 < s^* \leq 1$$

При дальнейшем перемещении волны вдоль рассматриваемого направления величина A_{1+}' монотонно убывает.

Наибольшее сопутствующее головному гребню понижение поверхности также отмечается в центре полукругности, однако монотонность его последующего убывания с расстоянием нарушается скачкообразным взбросом уровня, связанным со сменой знака кривизны контура волны (ее выворачиванием). Этот процесс хорошо прослеживается на фиг. 1, дающей виды свободной поверхности для ряда моментов времени, и может трактоваться как образование вторичной волны на заднем склоне гребня. На фиг. 1 фрагменты а, б, в, г соответствуют значениям $t' = 5,428; 7,516; 9,186; 10,021$; оцифровка изолиний выполнена по величине $\zeta' = \zeta / A_0$; штриховая линия ограничивает область начального возмущения.

3. Кольцевой источник. В этом случае, как и при распаде полукольцевого начального возвышения, показательно отсутствует перестройки фронта круговой волны: во все время движения ее контуры в плане имеют вид

концентрических окружностей. Сечения свободной поверхности по диаметру кольца для некоторых характерных значений безразмерного времени (цифры у кривых) приведены на фиг. 2 (a — стадия фокусировки, b — стадия распада всплескового пика. Кривые 1—7 соответствуют моментам времени $t' = 0; 1,503; 5,261; 7,683; 9,019; 11,775; 16,869$).

Первый эпицентральный минимум достигается при $t' = 1,420$. В этот момент головной гребень, находясь на удалении $r' = 1,48$, имеет амплитуду $A_{1+}' = 0,566$. Видно, что процесс его окончательного формирования в точности соответствует ранней стадии распада очага с горизонтальной проекцией полукольцевой формы. К указанному моменту времени головной гребень, распространяющийся во внешнюю область, имеет меньшую амплитуду; в самом деле, $A_{1+}' = 0,463$.

Движущееся к центру возмущение монотонно усиливается. Кумуляция имеет вид

$$\begin{aligned} A_{1+}' &= (2,082 - 1,65s)^{-1}, & 0,103 \leq s \leq 0,872; \\ A_{1+}' &= 16,267s - 12,53, & 0,872 < s \leq 1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} A_{1+} &= A_{1+}' (1,02 - 0,79s^*)^{-1}, & 0 \leq s^* \leq 0,842; \\ A_{1+} &= A_{1+}' (23,3s^* - 16,8), & 0,842 < s^* \leq 1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Первое выражение (2.3) и второе (2.4) соответствуют результатам численного эксперимента с отклонением не более 6%, первое выражение (2.4) — 5% и второе (2.3) — не более 8%.

Для кольцевого и полукольцевого возмущений кумуляция одинакова вплоть до $s^* \approx 0,87$, т. е. влияние подпора при кольцевом источнике начинает сказываться только с момента прихода фронта волны в центр кольца. На фиг. 2 этот момент соответствует значению $t' = 5,261$ (кривая 3).

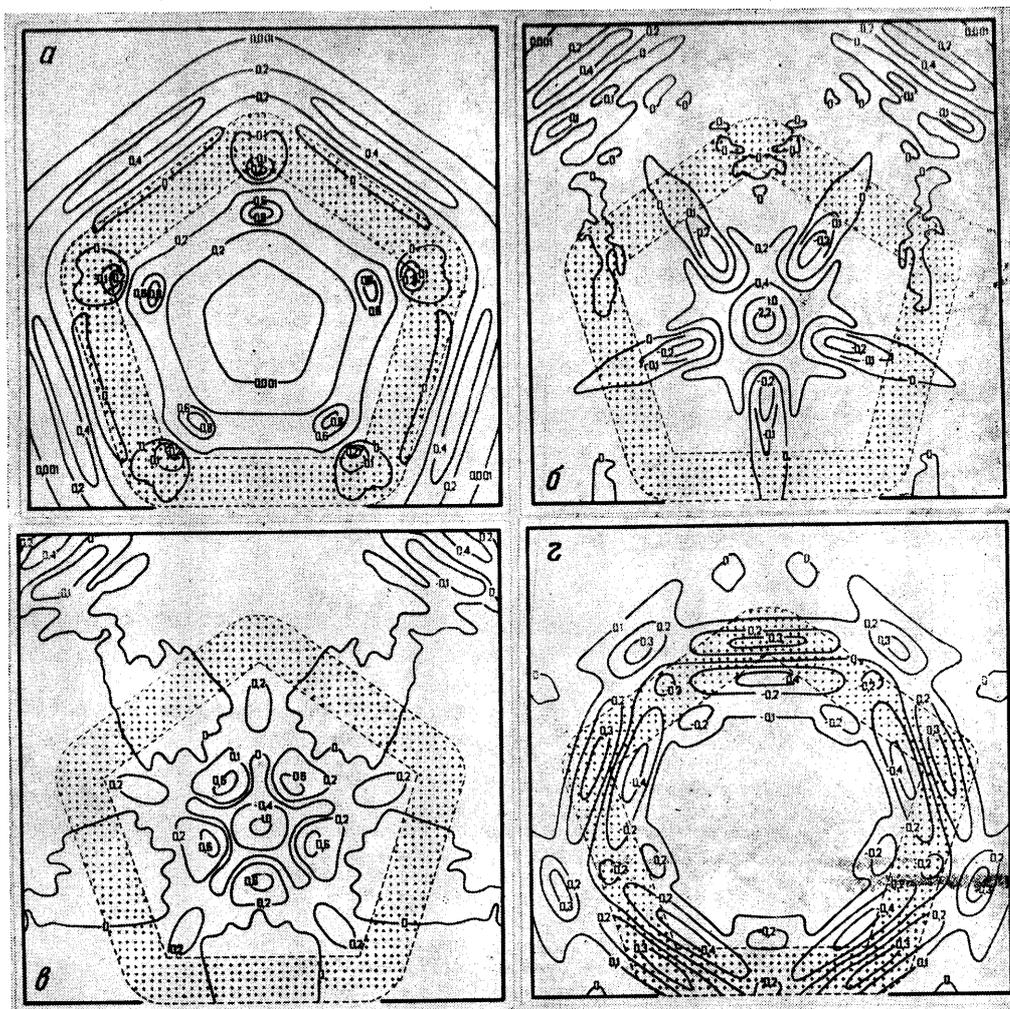
Если считать, что наибольшее возвышение во всех случаях должно наблюдаться в фокусе, то оказывается, что уменьшение длины очага наиболее сильно повлияет на уменьшение ординат кривой $A_{1+}' = A_{1+}'(r')$, $r' \leq r_0'$, именно в прифокусной зоне. Эта зона будет иметь тенденцию к расширению такую, что указанная кривая в конце концов вырождается в прямую.

На основании полученных здесь данных можно утверждать, что это произойдет, когда длина дугового очага составит примерно $1/6$ полной длины окружности. Характер его излучения при этом должен приближаться к излучению прямолинейного источника соответствующих размеров. Расчеты показывают, что это действительно имеет место.

Таким образом, оценка кумуляции для промежуточных значений длины очага может быть произведена путем интерполирования между имеющимися зависимостями, как это сделано, например, на фиг. 3 (штриховая линия). Цифры у кривых — относительная (к полной длине окружности) длина источника возмущения. Значками 2 дана зависимость A_{1+}' от s при распаде поднятия уровня прямолинейной в плане конфигурации с длиной $L_0' = 8$.

По окончании схлопывания высота всплеска становится равной 3,491, что в 6,1 раза больше высоты в гребне головной волны при его образовании. Вместе с тем всплесковый пик примерно вдвое превышает всплеск, обусловленный схлопыванием полукольцевой волны. Небольшое отклонение от указанной величины может быть связано с тем, что отношение масс жидкости, первоначально вовлеченных в движение, при кольцевом и полукольцевом очагах несколько меньше, чем 2 : 1, по-видимому, за счет принятого способа задания конечностей полукольца.

Всплесковый пик представляет собой своеобразный точечный источник, на деформацию которого в поле силы тяжести оказывают сильное влия-



Фиг. 4

ние сходящиеся и вновь образованные расходящиеся кольцевые волны.

В интервале значений параметра $0 < s^* < 0,5$ движение конвергирующего кольцевого гребня происходит неравномерно замедленно, тогда как в интервале $0,5 < s^* < 1$ оно становится неравномерно ускоренным. При этом скорость перемещения, определяемая по времени прихода гребня в данную точку и равная \sqrt{gh} лишь при $s^* = 0$ и 1 , всюду остается меньше указанного теоретического значения для длинных волн. Это отклонение максимально при $s^* = 0,5$ и составляет здесь 10% . Важно, что для первоначально круговой волны отношение $|A_{1-}'|/|A_{1+}'|$ в процессе фокусировки весьма близко к нулю.

4. Пятиугольный источник. Исследование распада пятиугольного очага имело целью выявление и объяснение искажений, накладываемых на деформацию сходящихся кольцевых волн в поле силы тяжести возмущающим их воздействием типа сильного радиально приложенного нестационарного импульса. В этих условиях [2] круговая первоначально волна принимает ярко выраженную многоугольную форму, в частном слу-

чае — форму пятиугольника. Перед головным гребнем отмечается серия более мелких концентрических волн той же формы. Однако приведенных в цитируемой работе данных недостаточно для того, чтобы составить обоснованное суждение о деталях развития волновой картины после перестройки фронта круговой волны.

Процесс распада пятиугольного очага, воссозданный по результатам счета, показан на фиг. 4 ($a - t' = 2,505$; $b - t' = 6,681$; $c - t' = 8,351$; $e - t' = 14,196$; остальные обозначения аналогичны фиг. 1).

Видно, что нарушение непрерывности волнового фронта влечет за собой появление ярко выраженной избирательности излучения волн вдоль биссектрис внутренних углов пятиугольника. Высота всплеска в центре начального возвышения составляет 2,599, что всего лишь в 4,8 раза больше амплитуды в гребне головной волны в момент ее формирования. Более мелких концентрических волн, распространяющихся перед первым гребнем, не отмечается.

В случае, когда физическую интерпретацию процесса оказывается возможным провести в рамках предположения о несжимаемой жидкой среде, начальная стадия развития волновых движений под действием горизонтального импульса, приложенного к ее тонкому кольцевому слою, качественно может быть описана следующим образом.

Радиальный импульс в условиях несжимаемости приводит к выталкиванию частиц в вертикальном направлении, причем поле скоростей мгновенно создается повсюду в жидкости. В реальных средах [2, 6] вызванное импульсным воздействием движение поверхности на своей ранней стадии отмечается лишь в некоторой окрестности возникшего возмущения. Для весьма мало сжимаемой жидкости [6] эту окрестность можно определить десятикратной шириной зоны приложения импульса. Естественно, что с указанной зоной, размеры которой уменьшаются по мере роста сжимаемости среды, связано и наибольшее отклонение поверхности от равновесного состояния.

Пусть теперь длительность нестационарного импульса, как это имело место в [2], и время, необходимое для перестройки метаемого в радиальном направлении тонкого непосредственно прилегающего к кювете жидкого слоя, на один-два порядка меньше длительности механических процессов, обусловленных тяжестью. В этом случае можно считать, что распад первичного возвышения, образовавшегося в результате вытеснения жидкости при сжатии, начнется уже после принятия им многоугольной формы.

Указанные соображения представляются приемлемым основанием для использования при сравнительном анализе результатов, полученных численным методом для источника в виде начального стационарного возвышения. Кроме того, упоминаемый здесь механизм импульсивного создания поля скоростей в сжимаемой жидкости является, по-видимому, хорошим объяснением мелких концентрических волн, наблюдавшихся на описываемой в [2] гидравлической модели перед первым гребнем. Таким образом, перестройка фронта первоначально круговой волны является чисто модельным эффектом, присутствующим предложенному в [2] конкретному конструктивному решению моделирующей установки.

5. Заключение. Для источника возмущения с формой горизонтальной проекции в виде полосы, очерченной дугами концентрических окружностей внутри равного φ радианам центрального угла, время и расстояние, на протяжении которых происходит формирование головного гребня, не зависят от длины $r_0\varphi$ источника колебаний при условии $\pi/3 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Радиальная кумуляция волн в поле силы тяжести происходит без нарушения непрерывности волнового фронта, характерного для очагов с изломами. Наличие на фронте волны указанных особенностей ухудшает условия фокусировки и для волн с замкнутым фронтом приводит к потерям в высоте всплеска примерно в 1,3 раза. В то же время сравнительно более высокая эффективность обеспечивающих радиальную конвергенцию кумулятивных волновых излучателей дуговой формы (в плане) ограничена снизу величиной отношения длины стягивающей их хорды к радиусу дуги; пороговое значение этого отношения равно единице.

В отличие от сходящейся кольцевой волны, развитие которой происходит исключительно под действием гравитационного поля, волны, возбужденные импульсом, радиально приложенным к слою жидкости, сопоставимому по толщине с ее общей глубиной, принимают многоугольную форму, если сжимаемостью среды при волнообразовании пренебречь нельзя. Именно такая совокупность условий задавалась в ходе экспериментов с волнопродуктором, предложенным в [2]. Если же импульс прикладывается к некоторому слою жидкости вблизи ее поверхности, то явления перестройки фронта образовавшейся кольцевой волны не наблюдается. Свидетельством этому, с учетом замечаний, относящихся к влиянию сравнительно малой сжимаемости рабочей среды, служат результаты экспериментальных исследований кольцевых волн, образующихся при поперечно распределенном импульсе [1].

Явление перестройки фронта должно зависеть и от горизонтальной протяженности зоны приложения импульса. В первом приближении критическим для его наличия можно считать, по-видимому, значение длины $r_{0\phi}$ волнового излучателя при $\phi = \pi/3$.

Нормированная к A_{1+}° величина A_{1+} в процессе фокусировки слабо зависит от механизма волнообразования и начального отклонения динамических характеристик жидкой среды от равновесных значений. При этом относительная высота всплескового пика прямо пропорциональна отношению длины источника волн к полной длине окружности и изменяется от 1 до 6 при изменении указанного отношения от $1/6$ до 1. Учитывая, что амплитуда в гребне головной волны много больше амплитуды в ее впадине, оценки радиальной кумуляции, выполненные по значению A_{1+} , можно считать достаточно репрезентативными.

В случаях, когда начальный радиус кольцевого возмущения по тем или иным соображениям представляется значительным, игнорирование неравномерности перемещения волнового профиля способно привести к серьезным ошибкам в определении его местоположения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 416 с.
2. *Бережной И. А., Ивлев Д. Д., Логвинова Р. Н.* О некоторых экспериментах со сходящимися кольцевыми волнами на поверхности тяжелой жидкости. — Докл. АН СССР, 1975, т. 223, № 4, с. 810–811.
3. *Lavrentyev M. A., Savarensky E. F.* On the results of investigations of tsunamis in the USSR. — In: 10th Pacif. Sci. Assoc., Honolulu, S. 1, S. a., 1961, p. 36–38.
4. *Черкесов Л. В., Кныш В. В.* Численное исследование нелинейных волн цунами в бассейне переменной глубины. — В кн.: Теоретические и экспериментальные исследования по проблеме цунами. М.: Наука, 1977, с. 64–73.
5. *Вольцингер Н. Е., Пясковский Р. В.* Теория мелкой воды. Л.: Гидрометеоздат, 1977. 208 с.
6. *Whalin R. W.* Water waves produced by underwater explosions: propagation theory for regions near explosion. — J. Geophys. Res., 1965, v. 70, № 22, p. 5541–5549.

Ленинград

Поступила в редакцию
16.IX.1980