

УДК 532.2.013.4

## УСТОЙЧИВОСТЬ ГЕТЕРОГЕННОГО РАВНОВЕСИЯ В СИСТЕМЕ С ЖИДКИМИ ФАЗАМИ

ГРИНФЕЛЬД М. А.

С помощью метода Дж. В. Гиббса изучается равновесие и устойчивость в гетерогенной системе, состоящей из однокомпонентных жидких фаз. Коэффициент поверхностного натяжения предполагается константой, не зависящей от состояния фаз. Получено выражение второй вариации соответствующего функционала, которое может быть использовано для анализа устойчивости зародышей. Показывается, что в отсутствие внешних силовых полей и сил поверхностного натяжения равновесное состояние замкнутой термодинамической системы, состоящей из однокомпонентных жидких фаз, удовлетворяющих классическим неравенствам Гиббса, всегда устойчиво.

1. Пусть в некотором сосуде с неподвижными стенками содержится жидкое или газообразное вещество, плотность внутренней энергии которого на единицу массы описывается функцией  $e=e(\rho, \eta)$ , где  $\rho$  — плотность, а  $\eta$  — плотность энтропии на единицу массы. Для простоты предположим, что вещество может находиться в двух различных фазах. Величины одного типа, относящиеся к этим фазам, будут различаться метками плюс и минус.

Согласно Дж. В. Гиббсу, устойчивая конфигурация замкнутой термодинамической системы характеризуется условным минимумом полной энергии системы при фиксированной полной энтропии на некотором естественном множестве «допустимых» состояний [1]. При данной массе вещества и полной энтропии таких экстремальных состояний может быть несколько или даже бесчисленное множество. В дальнейшем остановимся на конфигурациях типа гетерогенного равновесия однокомпонентных фаз, существование которых установлено в многочисленных наблюдениях и экспериментах. Гетерогенные равновесия характеризуются наличием двух или нескольких областей значительных размеров, внутри каждой из которых имеется только одна фаза и которые разделены межфазными границами. В отсутствие внешних силовых полей энергия такой системы складывается из внутренних энергий отдельных фаз и энергии поверхностного натяжения. Пренебрегая энергией поверхностного натяжения на стенках сосуда (а также в случае постоянства этой энергии), имеем следующее выражение для полной энергии

$$E = \int_{\Omega} d\Omega \rho e + \alpha \int_{\Sigma} d\Sigma \quad (1.1)$$

Первый интеграл берется по объему замкнутого сосуда  $\Omega$ . Штрих при интеграле здесь и в дальнейшем обозначает сумму интегралов по подобъемам, занимаемым каждой из фаз. Межфазная граница обозначена буквой  $\Sigma$ ,  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения, предполагаемый положительной константой.

Напомним известные термодинамические соотношения

$$e_{\eta}(\rho, \eta) = \theta, \quad \rho^2 e_{\rho}(\rho, \eta) = p \quad (1.2)$$

где  $\theta$  — абсолютная температура,  $p$  — давление (буквы, характеризующие термодинамическое состояние среды, в качестве нижних индексов обозначают частное дифференцирование).

Полная энтропия системы наряду с полной энергией предполагается аддитивной (поверхностную составляющую здесь, однако, учитывать не будем)

$$S = \int_{\Omega} d\Omega \rho \eta \quad (1.3)$$

2. Применение принципа Гиббса сводится к исследованию изопериметрической вариационной задачи для функционала (1.1) при дополнительном условии постоянства полной энтропии (1.3). Использованием метода множителей Лагранжа (см., например, [2]) эта задача приводится к исследованию безусловного экстремума функционала

$$J = \int_{\Omega} d\Omega \rho e + \alpha \int_{\Sigma} d\Sigma + \Lambda \int_{\Omega} d\Omega \rho \eta \quad (2.1)$$

где  $\Lambda$  — неопределенный множитель.

В работе [3] более общий функционал исследовался при излучении когерентных фазовых переходов в твердом упругом теле. Однако непосредственно воспользоваться результатами работы [3] в рассматриваемом случае невозможно, так как при когерентном фазовом переходе поле перемещений непрерывно на фазовой границе, а фундаментальное свойство жидкостей состоит в способности свободно скользить одна относительно другой. Поэтому при изучении гетерогенного равновесия идеальных жидких фаз следует рассматривать иные «возможные» («допустимые») конфигурации. Перейдем к эйлеровым переменным  $z^i$  ( $i=1, 2, 3$ ). Для получения «возможных» конфигураций, близких к рассматриваемой, будем перемещать частицы жидкостей вдоль траекторий динамической системы

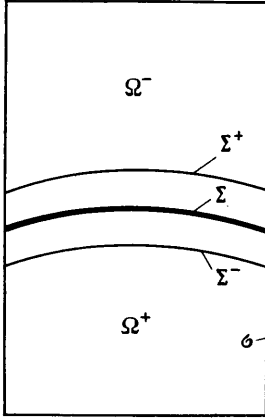
$$\frac{dz^i}{dt} = f^i(z^j), \quad f^i|_{\sigma} n_i = 0, \quad (2.2)$$

где  $f^i(z^j)$  — некоторое векторное поле, а  $n_i$  — поле единичных нормалей к границе  $\sigma$  объема  $\Omega$ .

Чтобы при изменении «допустимых» конфигураций могли варьироваться массы каждой из фаз, поступим следующим образом. Для простоты будем считать, что каждая фаза в рассматриваемом равновесном состоянии занимает одну из двух связанных областей, разделенных замкнутой фазовой границей (которая предполагается достаточно гладкой). Варьирование будем понимать в следующем смысле. Пусть  $f^{i+}(z^j)$  есть некоторое достаточно гладкое векторное поле, которое определено в области  $\Omega^+$  пространства, полностью включающей фазу плюс в равновесной конфигурации (на фигуре область плюс ограничена поверхностями  $\Sigma^+$  и нижней частью  $\sigma$ ). Аналогично определяются поле  $f^{i-}(z^j)$  и область  $\Omega^-$ . «Коридор перекрытия» между поверхностями  $\Sigma^+$  и  $\Sigma^-$  может быть выбран сколь угодно малым; в последующих рассуждениях его ненулевые размеры предполагаются фиксированными. Поля  $f^{i+}$  и  $f^{i-}$  в «коридоре перекрытия» отнюдь не должны совпадать. Продолжим в область  $\Omega^+$  любым достаточно гладким способом поля  $\rho^+(z^j)$ ,  $\eta^+(z^j)$ , соответствующие исследуемой конфигурации; аналогично поступим с полями  $\rho^-(z^j)$ ,  $\eta^-(z^j)$ . Опять-таки поля  $\rho$  и  $\eta$  в «коридоре перекрытия», вообще говоря, не совпадают. Вместе с величинной «коридора» и способом гладкого продолжения полей  $\rho$  и  $\eta$  для дальнейшего рассуждения не играют никакой роли граничные значения полей

$f^+$ ,  $f^-$  на поверхностях  $\Sigma^+$  и  $\Sigma^-$  соответственно; ради определенности и некоторого удобства примем, что на этих границах соответствующие поля обращаются в нуль.

Пусть  $z^{i+} = z_j^{i+}(z^j, t)$  есть решение системы (2.2) (с заменой  $f^i$  на  $f^{i+}$ ), определенное в области  $\Omega^+$  и удовлетворяющее начальным условиям  $z_j^{i+}(z^j, 0) = z^i$ . Поле плотности в области  $\Omega^+$ , соответствующее векторному



полю  $f^{i+}$  и параметру  $t$ , получим, поместив частицу с координатой  $z^i$  в исходном состоянии в точку пространства с координатами  $z_j^{i+}(z^j, t)$ . Аналогично варьируется поле плотности  $\rho^-$ . На поля плотности энтропии  $\eta^+(z^j, t)$  и  $\eta^-(z^j, t)$  в областях  $\Omega^+$ ,  $\Omega^-$  в конфигурации с параметром  $t$  налагаем лишь условия достаточной гладкости по всем переменным и обращения в опорные поля при  $t=0$ . Для задания «допустимой» конфигурации с параметром  $t$  остается лишь указать положение фазовой границы  $\Sigma(t)$ , выше которой следует взять поля  $\rho^-(z^j, t)$ ,  $\eta^-(z^j, t)$ , а ниже —  $\rho^+(z^j, t)$ ,  $\eta^+(z^j, t)$ . Положение этой поверхности выберем, исходя из условия сохранения массы системы. Нетрудно видеть, что выбор полей  $f^{i\pm}$  однозначно определяет поля плотности  $\rho^\pm(z^j, t)$  и скорости фазовой границы  $C(\xi^\alpha, t)$  ( $\xi^\alpha$  — координаты на межфазной поверхности; греческие индексы всюду пробегают

значения 1, 2), если принять во внимание следующие соотношения:

$$\frac{\partial \rho^\pm}{\partial t} = -\nabla_i(\rho^\pm f^{i\pm}), \quad C[\rho]^\pm = [\rho f^i]^\pm N_i \quad (2.3)$$

Здесь  $N_i(\xi, t)$  — поле единичных нормалей к поверхности  $\Sigma(t)$ ; символ  $[a]^\pm$  обозначает скачок величины  $a$  на этой поверхности;  $\nabla_i$  — символ ковариантного дифференцирования на базе метрического тензора системы отсчета (с помощью этого тензора осуществляется также поднятие и опускание латинских индексов).

Согласно вышесказанному, в равновесном опорном состоянии при любом выборе полей  $f^{i\pm}$ ,  $\eta^\pm$  должно выполняться соотношение  $dI(t)/dt=0$  при  $t=0$ .

При дифференцировании функционала  $J$ , задаваемого соотношением (2.1), воспользуемся следующей формулой дифференцирования интеграла по переменной области и движущейся замкнутой поверхности:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} d\Omega A(z, t) = \int_{\Omega(t)} d\Omega \frac{\partial A(z, t)}{\partial t} + \int_{\chi(t)} d\chi C A \quad (2.4)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma(t)} d\Sigma P(\xi, t) = \int_{\Sigma(t)} d\Sigma \left( \frac{\delta P}{\delta t} - C b_{\circ} \circ P \right) \quad (2.5)$$

Здесь  $\chi(t)$  — граница переменного объема  $\Omega(t)$ ,  $C$  — скорость этой границы в направлении внешней к объему  $\Omega$  нормали. При выводе соотношения (2.4) предполагается, что поле величины  $A$  непрерывно дифференцируемо внутри  $\Omega$  — это условие выполняется для полей  $\rho$ ,  $\eta$  внутри переменных областей, занимаемых каждой из фаз. В соотношении (2.5) символ  $\delta/\delta t$  обозначает ковариантное дифференцирование по параметру на движущейся поверхности, понимаемое так же, как в работах [4, 5].

В обозначениях работы [5] дифференцирование скалярного поля производится по формуле

$$\frac{\delta P(\xi, t)}{\delta t} = \frac{\partial P(\xi, t)}{\partial t} - v^\omega \frac{\partial P(\xi, t)}{\partial \xi^\omega} \quad (2.6)$$

В соотношении (2.5)  $b_{\alpha\beta}(\xi, t)$  — тензор коэффициентов второй квадратичной формы поверхности  $\Sigma$ ; поднятие и опускание греческих индексов осуществляется с помощью метрического тензора поверхности  $\Sigma$  —  $\xi_{\alpha\beta}(\xi, t)$ ,  $\xi^{\alpha\beta}(\xi, t)$ ; на базе того же тензора осуществляется ковариантное дифференцирование, обозначаемое греческим индексом после точки с запятой.

Для доказательства инвариантного соотношения (2.5) требуется следующая формула для изменения величины  $\sqrt{\Sigma}(\xi, t) = |\xi_{\alpha\beta}|^{1/2}$ , подробный вывод которой имеется в работах [4, 6]:

$$\frac{\partial \sqrt{\Sigma}}{\partial t} = \sqrt{\Sigma}(v^\omega{}_{;\omega} - C b_{\omega\omega}) \quad (2.7)$$

Комбинируя (2.6), (2.7) и используя теорему о дивергенции, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} d\Sigma P(\xi, t) &= \frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\Sigma} P(\xi, t) = \\ &= \iint_{\Sigma} d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\Sigma} \left[ \frac{\partial P(\xi, t)}{\partial t} + P(v^\omega{}_{;\omega} - C b_{\omega\omega}) \right] = \\ &= \int_{\Sigma} d\Sigma \left[ \frac{\partial P(\xi, t)}{\partial t} - v^\omega P_{;\omega} - P C b_{\omega\omega} + (P v^\omega)_{;\omega} \right] = \int_{\Sigma} d\Sigma \left( \frac{\delta P}{\delta t} - C b_{\omega\omega} P \right) \end{aligned}$$

Комбинируя (2.1) — (2.5), используя теорему о дивергенции, учитывая неподвижность поверхности сосуда  $\sigma$  и замкнутость межфазной границы, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dJ(t)}{dt} \Big|_{t=0} &= \int_{\sigma^0} d\Omega \left\{ [(\rho e)_\rho + \Lambda \eta] \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho (e_\eta + \Lambda) \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\} \Big|_{t=0} + \\ &+ \int_{\Sigma^0} d\Sigma C ([\rho e + \Lambda \rho \eta]_-^+ - \alpha b_{\omega\omega}) \Big|_{t=0} = \\ &= \int_{\sigma^0} d\Omega \left\{ \rho^\circ (e_\eta^\circ + \Lambda) \frac{\partial \eta}{\partial t} \Big|_{t=0} + \rho^\circ f^i \nabla_i [(\rho e)_\rho^\circ + \Lambda \eta^\circ] \right\} + \\ &+ \int_{\Sigma^0} d\Sigma \{ C^\circ [\rho^\circ (e^\circ + \Lambda \eta^\circ)]_-^+ - \alpha C^\circ b_{\omega\omega}^\circ - N_i^\circ [\rho^\circ f^i ((\rho e)_\rho^\circ + \Lambda \eta^\circ)]_-^+ \} = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь градусом помечены объекты, характеризующие исходную конфигурацию;  $N_i$  — единичная нормаль к фазовой поверхности  $\Sigma$ , внешняя по отношению к фазе плюс,  $C$  — скорость поверхности  $\Sigma$  в направлении той же нормали.

Используя (1.2), (2.8) и имеющийся произвол в выборе «допустимых» полей  $f^i$ , заключаем, что параметры равновесного состояния вне фазовой границы удовлетворяют соотношениям

$$e_\eta^\circ = -\Lambda = \theta^\circ = \text{const}; \quad \nabla_i \varphi^\circ = 0, \quad \varphi = e - \theta \eta + \frac{p}{\rho} \quad (2.9)$$

Согласно (2.9), в состоянии равновесия абсолютная температура постоянна во всей системе, а плотность удельного потенциала Гиббса  $\varphi$  постоянна в пределах каждой фазы. Вместе с абсолютной температурой  $\theta^\circ$  и удельным потенциалом Гиббса  $\varphi^\circ$  в пределах каждой фазы остаются постоянными все термодинамические функции и, в частности, давление  $p$ .

Используя (2.9), приводим (2.8) к виду

$$\int_{\Sigma^\circ} d\Sigma \{ C^\circ [\rho^\circ (e^\circ + \Lambda \eta^\circ)]_-^+ - \alpha C^\circ b_{\omega^\circ} - N_i^\circ [\rho^\circ f^i \varphi^\circ]_-^+ \} = 0 \quad (2.10)$$

Используя второе из соотношений (2.3), исключим из (2.10) величину  $f^{i-}$ :

$$\int_{\Sigma^\circ} d\Sigma \{ N_i^\circ \rho^{\circ+} f^{i+} [\varphi^\circ]_- + C^\circ ([\rho^\circ (e^\circ - \theta^\circ \eta^\circ)]_-^+ - \alpha b_{\omega^\circ} - [\rho^\circ]_-^+ \varphi^{\circ-}) \} = 0 \quad (2.11)$$

Учитывая, что существуют «возможные» поля с любыми значениями  $C(\xi, 0)$  и предельными значениями поля  $f^{i+}$  на  $\Sigma^\circ$ , из соотношения (2.11) немедленно заключаем, что в равновесной конфигурации на межфазной границе должны выполняться соотношения

$$[\varphi^\circ]_-^+ = 0, \quad [p^\circ]_-^+ = \alpha b_{\omega^\circ} \quad (2.12)$$

Соотношения (2.12) ранее и другим способом были получены в работе [1]. Комбинируя (2.12), получаем

$$[\rho^\circ (e^\circ - \theta^\circ \eta^\circ)]_-^+ = \varphi^{\circ+} [\rho^\circ]_-^+ + \alpha b_{\omega^\circ} \quad (2.13)$$

3. Исследование устойчивости равновесия базируется на проведении процедуры, использованной в работе [7]. Комбинируя соотношения (2.1), (2.4), (2.5), получаем

$$\left. \frac{d^2 I}{dt^2} \right|_{t=0} = \int_{\Omega^\circ} d\Omega \frac{\partial^2 \rho(e + \Lambda \eta)}{\partial t^2} + \int_{\Sigma^\circ} d\Sigma \left\{ C^\circ \left[ \frac{\partial \rho(e + \Lambda \eta)}{\partial t} \right]_-^+ - \right. \quad (3.1)$$

$$\left. - C^2 b_{\omega^\circ} [\rho(e + \Lambda \eta)]_-^+ + \alpha C^2 b_{\pi^\circ} b_{\omega^\circ} + \frac{\delta C [\rho(e + \Lambda \eta)]_-^+}{\delta t} - \alpha \frac{\delta C b_{\omega^\circ}}{\delta t} \right\} \Big|_{t=0}$$

Используя соотношение (2.3) и постоянство плотности в состоянии равновесия внутри каждой фазы, получаем

$$\left. \frac{\partial^2 \rho^\pm}{\partial t^2} \right|_{t=0} = \nabla_i (f^{i\pm} \nabla_j (\rho^\pm f^{j\pm})) \Big|_{t=0} = \rho^{\circ\pm} \nabla_i (f^{i\pm} \nabla_j f^{j\pm}) \quad (3.2)$$

Далее, используя свойства  $\delta/\delta t$ -производной [4, 5], соотношения (2.3), а также постоянство параметров в состоянии равновесия, получаем при  $t=0$

$$\frac{\delta \rho^\pm}{\delta t} = -\rho^{\circ\pm} \nabla_i f^{i\pm}, \quad \frac{\delta f^{i\pm}}{\delta t} = C^\circ N^{\circ j} \nabla_j f^{i\pm}, \quad \frac{\delta N_i}{\delta t} = -C^\circ_{; \omega} z_i^{\circ \omega}. \quad (3.3)$$

Здесь  $z_{;\alpha}^i(\xi) = \partial z^i(\xi, 0) / \partial \xi^\alpha$ , где  $z^i(\xi^\alpha, t)$  — уравнение фазовой поверхности в конфигурации с параметром  $t$ . Используя соотношения (2.3), (3.3), получаем при  $t=0$

$$\begin{aligned} \frac{\delta C[\rho(e+\Lambda\eta)]_{-}^{+}}{\delta t} - \alpha \frac{\delta C b_{\omega}^{\circ}}{\delta t} = & -([\rho^{\circ} \varphi^{\circ} f^i]_{-}^{+} z_i^{\circ \circ} C^{\circ})_{;\omega} + \\ & + C^{\circ 2} [\rho^{\circ} \varphi^{\circ}]_{-}^{+} b_{\omega}^{\circ} + [\rho^{\circ} \varphi^{\circ} \nabla_i f^i]_{-}^{+} C^{\circ} - [\rho^{\circ} \varphi^{\circ} f^i \nabla_j f^j]_{-}^{+} N_{0i} - \\ & - \alpha C^{\circ} (C^{\circ}_{;\omega} + C^{\circ} b_{\omega}^{\circ \pi} b_{\pi}^{\circ \omega}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

При получении (3.4) следует воспользоваться соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\delta C}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t} \left( \frac{[\rho f^i]_{-}^{+}}{[\rho]_{-}^{+}} N_i \right) = & - \frac{[\rho f^i]_{-}^{+}}{[\rho]_{-}^{+}} z_i^{\circ} C_{;\omega} + C N_i N^j \frac{[\rho \nabla_j f^i]_{-}^{+}}{[\rho]_{-}^{+}} + \\ & + \frac{C [\rho \nabla_i f^i]_{-}^{+}}{[\rho]_{-}^{+}} - \frac{[\rho f^i \nabla_j f^j]_{-}^{+}}{[\rho]_{-}^{+}} N_i \\ \frac{\delta N_i}{\delta t} = & - C_{;\omega} z_i^{\circ}, \quad z_{\omega}^j z_i^{\circ} = \delta_i^j - N^j N_i \\ \frac{\delta b_{\omega}^{\pi}}{\delta t} = & C_{;\omega} + C b_{\omega}^{\pi} b_{\pi}^{\omega} \end{aligned}$$

$$[\varphi^{\circ} \rho^{\circ}]_{-}^{+} \frac{[\rho^{\circ} f^i]_{-}^{+}}{[\rho^{\circ}]_{-}^{+}} z_i^{\circ \circ} C^{\circ}_{;\omega} = [\rho^{\circ} \varphi^{\circ} f^i]_{-}^{+} z_i^{\circ \circ} C^{\circ}_{;\omega} =$$

$$\begin{aligned} = & ([\rho^{\circ} \varphi^{\circ} f^i]_{-}^{+} z_i^{\circ \circ} C^{\circ})_{;\omega} - C^{\circ} [\rho^{\circ} \varphi^{\circ} \nabla_j f^j]_{-}^{+} (\delta_i^j - N^j N_{0i}) - C^{\circ 2} [\rho^{\circ} \varphi^{\circ}]_{-}^{+} b_{\omega}^{\circ \omega} \\ C \left[ \frac{\partial \rho(e+\Lambda\eta)}{\partial t} \right]_{-}^{+} = & - C^{\circ} (\rho^{\circ} \varphi^{\circ} \nabla_i f^i)_{-}^{+} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Комбинируя соотношения (2.13), (3.1), (3.4), (3.5) и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 I}{dt^2} \Big|_{t=0} = \int_{\Omega^{\circ}} d\Omega \left\{ (\rho e)_{\rho\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)^2 + 2\rho e_{\rho\eta} \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \rho e_{\eta\eta} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 \right\} - \\ - \alpha \int_{\Sigma^{\circ}} d\Sigma C^{\circ} (C^{\circ}_{;\omega} + C^{\circ} b_{\omega}^{\circ \pi} b_{\pi}^{\circ \omega}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

В силу соотношений (2.3) вторая вариация (3.6) является квадратичным функционалом поля  $f^i$ . Для устойчивости конфигурации необходимо, чтобы этот функционал был неотрицательным при любом выборе кусочно-гладкого поля. Легко видеть, что в отсутствие поверхностного натяжения это необходимое условие устойчивости заведомо выполняется, если параметры жидких фаз удовлетворяют классическим термодинамическим неравенствам [1, 7]

$$e_{vv} \geq 0, \quad e_{\eta\eta} \geq 0, \quad e_{vv} e_{\eta\eta} - e_{v\eta}^2 \geq 0 \quad (3.7)$$

где  $v=1/\rho$  — удельный объем жидкой фазы. Действительно, в отсутствие поверхностного натяжения, переходя к термодинамическим переменным  $v, \eta$ , вторую вариацию (3.6) можно представить в виде

$$\left. \frac{d^2 J}{dt^2} \right|_{t=0} = \int_{\Omega} d\Omega \frac{1}{v^{\circ}} \left\{ e_{vv}^{\circ} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + 2e_{v\eta}^{\circ} \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + e_{\eta\eta}^{\circ} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 \right\} \quad (3.8)$$

Но неравенства (3.7) суть условия неотрицательной определенности квадратного трехчлена, входящего в выражение (3.8).

При учете поверхностного натяжения вопрос об устойчивости термодинамического равновесия становится значительно сложнее. Однако по-прежнему он может быть сведен к исследованию неотрицательности спектра линейного оператора, подобно тому, как это было ранее проделано в [7].

Ради простоты приведем соответствующую спектральную задачу для чисто механической ситуации, когда плотность внутренней энергии каждой из фаз дается формулой  $e=e(\rho)$ , а для исследования равновесия и устойчивости вместо принципа Гиббса используется принцип минимума полной механической энергии. В этом случае для устойчивости равновесия необходима неотрицательность спектра собственных значений  $\lambda$  линейной однородной системы

$$\rho^{\circ 2} (\rho e)_{\rho\rho}^{\circ} \nabla_j \nabla_i f^i + \lambda f_j = 0 \quad (3.9)$$

Система (3.9) дополняется граничными условиями

$$[\rho^{\circ} f^i]_{-}^{+} N_i^{\circ} = 0, \quad [\rho^{\circ} (\rho e)_{\rho\rho}^{\circ} \nabla_i f^i]_{-}^{+} = 0, \quad (3.10)$$

$$[\rho^{\circ 2} (\rho e)_{\rho\rho}^{\circ} \nabla_i f^i]_{-}^{+} = \alpha (C; \cdot_{\omega}^{\circ\omega} + C^{\circ} b_{\omega}^{\circ\pi} b_{\pi}^{\circ\omega}) \quad (3.11)$$

$$f^i n_i = 0$$

При этом условия (3.10) выставляются на фазовой границе, а (3.11) — на границе сосуда.

Используя соотношения (3.9) — (3.11), можно доказать, что спектральные значения  $\lambda$  заведомо являются вещественными числами.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гиббс Дж. В. Термодинамические работы. М.—Л.: Гостехиздат, 1950. 492 с.
2. Лаврентьев М., Люстерник Л. Основы вариационного исчисления. М.—Л.: ОНТИ. Гл. ред. общетехн. лит. и номогр., 1935.
3. Гринфельд М. А. Об условиях термодинамического равновесия фаз нелинейно-упругого материала. — Докл. АН СССР, 1980, т. 251, № 4, с. 824.
4. Гринфельд М. А.  $\delta/\delta t$ -производная и ее свойства. Деп. ВИНТИ, № 1255-76. М., 1976. 19 с.
5. Гринфельд М. А. Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в нелинейно-упругом материале. — ПММ, 1978, т. 42, № 5, с. 883.
6. Гринфельд М. А. Отражение — преломление волновых фронтов на границе нелинейно-упругих сред. — Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 5, с. 109.
7. Гринфельд М. А. О термодинамической устойчивости материала. — Докл. АН СССР, 1980, т. 253, № 6, с. 1349.

Москва

Поступила в редакцию  
13.V.1980