

УДК 532.5

## **АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В МЕХАНИКЕ ЖИДКОСТИ<sup>1</sup>**

**ДИЕСПЕРОВ В. Н., РЫЖОВ О. С.**

**1. Введение.** Три последние десятилетия характеризуются бурным развитием ЭВМ и их внедрением во все сферы человеческой деятельности. Машины становятся не просто незаменимым помощником исследователя или инженера, поскольку на них возлагается проведение подавляющей части обширных вычислений; они революционизируют само человеческое мышление, изменяют отношение к научным задачам, к понятию их решения. Поэтому в наше время совсем не просто ответить на вопрос, какова роль асимптотических методов в науке вообще и в механике жидкости в частности.

Конечно, в широком смысле слова любая теория является асимптотической, так как лежащая в ее основе математическая модель получается в результате оговоренного или подразумеваемого перехода к пределу по некоторым малым параметрам, который позволяет избежать учета ряда несущественных процессов. Так, систему уравнений Эйлера для идеальной жидкости можно рассматривать в качестве предельной формы более сложной системы уравнений Навье – Стокса при стремящейся к нулю обратной величине числа Рейнольдса. В свою очередь система уравнений Навье – Стокса есть не что иное, как асимптотический предел еще более сложного интегродифференциального уравнения Больцмана, когда к нулю стремится число Кнудсена. Эту иерархическую цепочку можно было бы продолжить и далее.

Опуская вопрос об асимптотическом характере математической модели, будем понимать задачу настоящего обзора более узко, сводя ее к разбору методов приближенного решения уже известных дифференциальных уравнений гидромеханики. Относительно последних условимся считать, что они позволяют с достаточной точностью вычислить все необходимые для приложений параметры потока. В этом случае следует прежде всего определить, какую цель ставит разработка асимптотического подхода к анализу изучаемых явлений.

Естественно, аппроксимирующая система уравнений должна быть проще исходной, причем понятие простоты основывается на таких общих свойствах, как линеаризация модели, расширение группы преобразований, исчезновение малых параметров из формулировки задачи и т. д. Линейные уравнения часто допускают разделение переменных, ведущее к применению мощного аппарата интегральных преобразований. Расширенные группы, относительно которых инвариантны асимптотические уравнения, позволяют установить обобщенные законы подобия и получить класс автомоделных решений. Возможность избавиться в задаче от малых параметров в ряде случаев кардинально облегчает численное интегрирование приближенных уравнений, так как в решениях последних функции изменяются более плавно за счет специального выделения областей пограничного типа. Что очень важно, с наличием малых параметров при старших производных тесно связаны свойства устойчивости как самих дифференциальных уравнений, так и конечно-разностных схем.

С внедрением ЭВМ решение аппроксимирующей системы уравнений стало областью применения методов вычислительной математики, разработка которых является самостоятельной научной дисциплиной. Конечно-разностные схемы пришли на смену многим приближенным приемам, которые имели широкое хождение в механике жидкости, но были лишены надлежащего обоснования. Такое развитие современных методов теоретического исследования означает по существу органический синтез асимптотического анализа и численных методов интегрирования уравнений в частных производных. Цель асимптотического анализа состоит в упрощении исходных уравнений, которое производится по-разному в различных областях. Например, в теории пограничного слоя принимаемые за исходные уравнения Навье – Стокса заменяются в первом приближении уравнениями Эйлера для основной части течения и уравнениями Прандтля – для узкой области, прилегающей

<sup>1</sup> Доклад на V Всесоюзном съезде по механике. Алма-Ата, 1981.

к обтекаемому телу. Численное интегрирование уравнений Эйлера и Прандтля дает возможность найти параметры жидкости в каждой из областей с требуемой точностью. Подобная ситуация в настоящее время типична для любой асимптотической теории.

**2. Линейное приближение.** С разработкой современных асимптотических методов появилась тенденция исключить линейное приближение из их арсенала. Однако линеаризация уравнений движения не только сыграла выдающуюся роль в решении многих задач механики жидкости, но и продолжает оставаться мощным инструментом исследования различных явлений. Сам по себе прием построения асимптотического решения в этом случае весьма прост: он состоит в прямом разложении искомых функций по степеням малого параметра, представляющего амплитуду возмущений. Что касается независимых переменных, то они не подвергаются каким-либо преобразованиям, включающим малый параметр. Рассмотрим линейное приближение в применении к классической задаче об устойчивости вязких течений очень важному вопросу гидродинамики, который тесно связан с возникновением турбулентности.

Производя опыты с течениями в трубах, Рейнольдс обнаружил [1], что их характер существенно изменяется в зависимости от величины некоторого безразмерного параметра или числа, названного впоследствии по его имени. Рейнольдс высказал предположение, что при достижении этим числом некоторого критического значения ламинарный поток теряет устойчивость и становится турбулентным. Если режим турбулентный, то скорость и давление не постоянны в каждой точке канала, а пульсируют случайным образом во времени. Интерес к этому явлению особенно возрос, когда было показано, что течение в пограничном слое также может переходить из ламинарного в турбулентное, причем от его характера в значительной степени зависит силовое воздействие жидкости на обтекаемое тело.

Попытки математически обосновать гипотезу Рейнольдса привели к созданию линейной теории устойчивости, которая служит венцом классических методов возмущений. Для упрощения математической формулировки задачи профиль продольной составляющей  $v_x$  скорости полагается зависящим лишь от поперечной координаты  $y$ , эта зависимость дается функцией  $U(y)$ . Если для течения Пуазейля в безграничном канале скорость действительно не изменяется вдоль его оси  $x$ , то в пограничном слое на плоской пластинке ее компоненты  $v_x$  и  $v_y$  суть функции обеих пространственных переменных. В последнем случае представление основного потока посредством  $v_x=U$ ,  $v_y=0$  является приближенным. На асимптотический характер этого приближения недавно обратил внимание Смит [2].

При наложении на основное течение малых возмущений членами, пропорциональными квадрату и более высоким степеням амплитуды, в исходных уравнениях Навье — Стокса пренебрегают. Если ввести для возмущенного поля скоростей в несжимаемой жидкости безразмерную функцию тока

$$\psi(t, x, y) = \varphi(y) e^{i(\nu t + \alpha x)} \quad (2.1)$$

то  $\varphi$  будет удовлетворять знаменитому уравнению Орра — Зоммерфельда [3]

$$(U-c) \left( \frac{d^2 \varphi}{dy^2} - \alpha^2 \varphi \right) - \frac{d^2 U}{dy^2} \varphi = - \frac{i}{\alpha R} \left( \frac{d^4 \varphi}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \alpha^4 \varphi \right) \quad (2.2)$$

где фазовая скорость  $c = -\nu/\alpha$ . Для течения в плоском канале краевые условия гласят

$$\varphi = d\varphi/dy = 0 \text{ при } y = \pm 1 \quad (2.3)$$

Нетривиальное решение задачи (2.2), (2.3) существует, если число Рейнольдса  $R$ , частота  $\nu$  и волновое число  $\alpha$  связаны вековым уравнением

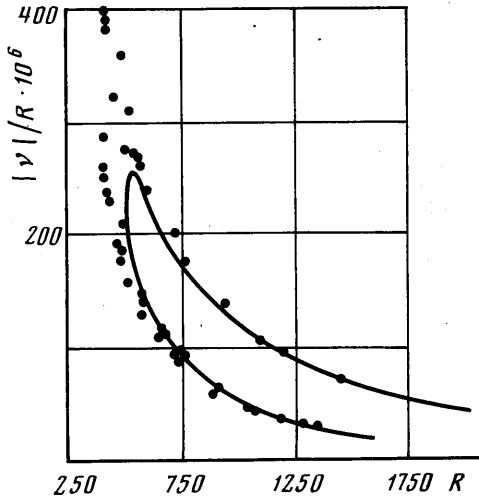
$$F(R, \nu, \alpha) = 0 \quad (2.4)$$

Для каждой пары вещественных чисел  $R$  и  $\alpha$  уравнение (2.4) дает целый спектр (дискретный) комплексных собственных значений  $\nu_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ). Интегрирование уравнения Орра — Зоммерфельда позволяет найти принадлежащие им собственные функции  $\varphi_n$ . Определяемые при помощи этих функций возмущения (2.1) принято называть волнами Толлмина — Шлихтинга. Ответ на вопрос об устойчивости вязкого потока зависит от того, имеется ли у векового уравнения (2.4) хотя бы единственный корень  $\nu_j$  с  $\text{Im } \nu_j = 0$  при вещественных  $R$  и  $\alpha$ . Условие  $\text{Im } \nu_j = 0$  фиксирует в плоскости  $R, \alpha$  нейтральную кривую устойчивости.

Для течения Пуазейля  $U$  — четная функция  $y$ . Поэтому  $\varphi$  можно представить в виде суммы четной и нечетной функций, каждая из которых является, в свою очередь, собственной в задаче Орра — Зоммерфельда. Четная собственная функция дает антисимметричное относительно оси канала распределение возмущенного давления, для нечетной собственной функции профиль давления получается симметричным. Оказывается, что весь спектр волн Толлмина — Шлихтинга с симметричным распределением давления и частотами  $\nu_{sn}$  всегда устойчив. В колебаниях с антисимметричным профилем возмущенного давления и набором собственных частот  $\nu_{an}$  терять устойчивость способна только первая мода. Условие  $\text{Im } \nu_{a1} = 0$  фиксирует нейтральную кривую устойчивости для течения Пуазейля. По этой кривой находится критическое значение  $R_*$  числа Рейнольдса. При  $R < R_*$  бесконечно малые возмущения, распространяющиеся в плоском канале, затухают со временем. В пределе  $R \rightarrow \infty$  характерная длина симметричных волн Толлмина — Шлихтинга оценивается по порядку величины как  $R$ . Асимптотическое поведение верхней и нижней ветвей нейтральной кривой устойчивости при  $R \rightarrow \infty$  установил Линь [3]. Верхняя ветвь характеризуется соотношением  $\alpha \sim R^{-1/4}$ , для нижней ветви справедлива формула  $\alpha \sim R^{-2/3}$ .

Строгое обоснование линейного подхода принадлежит Юдовичу [4]. Используя методы функционального анализа, он показал, что стационарное решение уравнений Навье — Стокса будет устойчиво по отношению к возмущениям с достаточно малой амплитудой, если оно устойчиво по линейному приближению. Ответвление предельных циклов от нейтральной кривой устойчивости обсуждается в обзоре Стюарта [5]. Современное состояние некоторых математических вопросов нелинейной теории изложено Джозефом [6].

Первое экспериментальное подтверждение линейная теория устойчивости нашла в измерениях амплитуд и фаз волн Толлмина — Шлихтинга, проведенных Шубауэром и Скрэмстедом для пограничного слоя на пло-



Фиг. 1

ской пластинке [7]. На фиг. 1 показано сравнение результатов вычислений и опытов для нейтральных колебаний. Форма рассчитанной в рамках линейного приближения сплошной петли хорошо согласуется с изображенными кружками данными более поздних экспериментов [8].

**3. Методы деформированных координат и сращения внешних и внутренних асимптотических разложений.** При разложении искомого решения в ряд по степеням амплитуды возмущений в линейном приближении (или одном из следующих за ним) может появиться особенность. Часто ее нельзя избежать, если даже главные члены разложения удовлетворяют нелинейным уравнениям. Например, в данном Седовым [9] решении задачи о сильном взрыве температура в центре обращается в бесконечность. Помимо нелинейных и диссипативных членов в уравнениях Навье — Стокса источником сингулярностей служит пренебрежение частью граничных условий в исходной формулировке задачи. С возникновением особенности разность между точным и приближенным решениями перестает стремиться по выбранной норме к нулю во всей рассматриваемой области при неограниченном уменьшении амплитуды возмущений.

Чтобы на простом примере показать характерные черты методов сингулярных возмущений, обратимся, следуя Ван Дайку [10], к классической задаче о бесциркуляционном обтекании эллиптического профиля равномерным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Пусть образующая профиля дается формулой  $y = \pm \varepsilon \sqrt{1-x^2}$ ,  $x \in [-1, 1]$ . Полагая  $\varepsilon \rightarrow 0$ , запишем асимптотическое разложение

$$\varphi = x + \varepsilon \varphi_1(x, y) + \varepsilon^2 \varphi_2(x, y) + \dots \quad (3.1)$$

для потенциала скорости  $\varphi$ . Для отыскания функций  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  имеем последовательность внешних задач Неймана. Все они сингулярны, так как граничные условия обладают особенностями в критических точках  $x = \pm 1$ ,  $y = 0$ , причем порядок особенностей растет вместе с порядком аппроксимации по  $\varepsilon$ . Как следствие в выражении

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 1 + (\varepsilon + \varepsilon^2) \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} \right) + \dots, \quad z = x + iy \quad (3.2)$$

для комплексной скорости также возникают особенности в критических точках. При надлежащем определении класса функций решение в первых двух приближениях получается единственным. Начиная с третьего приближения, теория потенциала приводит к расходящимся интегралам в выражении для комплексной скорости, поэтому, строго говоря, представление  $\varphi$  при помощи ряда (3.1) теряет смысл. Для преодоления указанной трудности применяются различные искусственные приемы, имеющие целью сгладить нарастание особенностей в краевых условиях. Такая процедура не позволяет опираться на теоремы, гарантирующие единственность решений задач Неймана. К высшим приближениям для комплексной скорости можно прибавить как саму гармоническую функцию  $-C/[\pi \cdot (z^2 - 1)]$ , так и любую ее производную по  $x$ . Возникающие собственные решения соответствуют источникам, диполям, квадруполям и т. д., которые помещаются на обеих кромках профиля.

Разложение (3.1) несправедливо в круговых окрестностях критических точек с радиусом порядка  $\varepsilon^2$ . Для эллиптического профиля известно точное решение задачи о бесциркуляционном обтекании. Оно показывает, что причина неоднородности кроется в условии  $|z^2 - 1| > \varepsilon^2$ , обеспечивающем существование рассматриваемого ряда для потенциала. Появление собственных функций в высших приближениях объясняется незнанием деталей

поля скоростей в  $\varepsilon^2$  — окрестностях критических точек. Возникает вопрос, каким образом построить равномерно пригодное разложение для потенциала во всей плоскости  $x, y$ .

Изложим два метода. Истоки одного из них, называемого методом деформированных координат, восходят к исследованию Пуанкаре предельных циклов нелинейных колебаний [11]. Идеи Пуанкаре обобщил Лайтхилл в поисках положения конической ударной волны, исходящей из носка заостренного тела в равномерном сверхзвуковом потоке [12]. В методе деформированных координат разложению в асимптотические ряды по малому параметру  $\varepsilon$  подвергаются не только искомая функция  $u$ , но и независимые переменные  $x_i$ , именно

$$u = u_0(\xi_1, \dots, \xi_m) + \sum_{n=1}^N \varepsilon^n u_n(\xi_1, \dots, \xi_m) + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (3.3)$$

$$x_i = \xi_i + \sum_{n=1}^N \varepsilon^n \eta_n^i(\xi_1, \dots, \xi_m) + O(\varepsilon^{N+1}), \quad i=1, \dots, m$$

При отыскании деформационных функций  $\eta_n^i$  провозглашается принцип, чтобы приближения высших порядков имели не большую особенность, чем первое. В результате решение  $N$ -го порядка оказывается равномерно пригодным во всей рассматриваемой области. Равенства  $\eta_n^i = 0$  ведут к классическому методу возмущений. Уравнение для главного члена  $u_0$  получается заменой независимых переменных  $x_i$  на  $\xi_i$  в исходном линейном приближении.

Доказательство сходимости метода деформированных координат для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений дал Вазов [13]. Строгое обоснование метода применительно к некоторым системам уравнений в частных производных гиперболического типа принадлежит Линю [14]. В обоих случаях особенность, предсказываемая линейным (или следующим за ним) приближением действительно существует, но ее положение в пространстве оказывается слегка смещенным. Адекватность формализма метода деформированных координат физическим процессам, которые управляются уравнениями гиперболического типа, поясняется в следующем разделе.

Использование разложений вида (3.3) для построения асимптотических решений эллиптических задач гидромеханики наталкивается на серьезные трудности. Поле течения идеальной несжимаемой жидкости около профиля с закругленными кромками исследовал Лайтхилл [15]. Однородное решение второго порядка для комплексной скорости получается из (3.2) заменой  $z$  на переменную  $\zeta$  посредством формулы

$$z = \zeta - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \zeta + \dots$$

Введение деформации здесь диктуется условием, чтобы третье приближение имело особенность не более сильную, чем первые два, при  $\zeta = \pm 1$ . Собственные функции при таком подходе не появляются. Долгое время результат Лайтхилла не удавалось улучшить, так как вклад всех высших приближений в комплексную скорость оказывался порядка  $\varepsilon^2$  в окрестности критических точек профиля. Этот недостаток устранен в недавней работе [16]. Однако и сейчас успешное применение метода деформированных координат к приближенному интегрированию уравнений параболического типа остается проблемой.

ческого и эллиптического типов граничит с искусством, причем формально написанные асимптотические последовательности могут вести к ошибочным заключениям.

Совершенно другой подход к устранению особенностей и построению равномерно пригодного решения заложен в методе сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений, который ведет свое начало от классической теории пограничного слоя Прандтля [17]. Рассмотрим в области  $\bar{D}$  граничную задачу, приводящую к сингулярным возмущениям. Предположим, что ее решение единственно. Представим искомую функцию  $u$  в некоторой подобласти  $D_\epsilon \subset \bar{D}$  при помощи регулярного асимптотического разложения

$$u = \sum_{n=0}^M \delta_n^{(\epsilon)}(\epsilon) u_n^{(\epsilon)}(x_1, \dots, x_m) + o(\delta_M^{(\epsilon)}) \quad (3.4)$$

которое будем считать внешним; главный член  $u_0^{(\epsilon)}$  в нем может удовлетворять как линейному, так и нелинейному уравнениям. Пусть внутренняя подобласть  $D_s = \bar{D} \setminus D_\epsilon$  является малой окрестностью  $(m-l)$ -мерного многообразия  $S \subset \bar{D}$ . Зададим  $S$  уравнениями  $x_1 = \dots = x_l = 0$ ,  $1 \leq l \leq m$ . Если продолжить аналитически ряд (3.4) в  $D_s$ , то разность между ним и точным решением перестает стремиться к нулю при  $\epsilon \rightarrow 0$ ; в частности,  $S$  может быть носителем возрастающих особенностей у функций  $u_n^{(\epsilon)}$ . В противоположность основной идее метода деформированных координат, где эти особенности подлежат сглаживанию, сохраним их порядок, но в окрестности  $S$  введем растянутые координаты

$$\xi_i = x_i / \Delta_i^{(s)}(\epsilon), \quad \Delta_i^{(s)} = o(1) \quad \text{для } i=1, \dots, l; \quad \xi_i = x_i \quad \text{для } i=l+1, \dots, m$$

и представим искомую функцию посредством другого асимптотического ряда

$$u = \sum_{n=0}^N \delta_n^{(s)}(\epsilon) u_n^{(s)}(\xi_1, \dots, \xi_m) + o(\delta_N^{(s)}) \quad (3.5)$$

Задачи для нахождения последовательных членов в разложениях (3.4), (3.5) оказываются, как правило, не полностью поставленными из-за потери части краевых условий. Поэтому функции  $u_n^{(\epsilon)}$  и  $u_n^{(s)}$  определяются ими неоднозначно. Однако оба разложения служат различными асимптотическими формами одного и того же решения и должны быть согласованными. В основе процесса согласования рядов, называемого сращиванием, лежит гипотеза, что область  $D_i$ , где справедлива формула (3.5), шире области  $D_s$ . Тогда должна существовать область перекрытия  $D_0 = D_i \cap D_\epsilon$ , в которой сохраняют силу обе рассматриваемые асимптотические последовательности. Отсюда вытекает требование, сформулированное Каплуном и Лагерстромом [18], чтобы переписанные с одинаковой точностью в одних и тех же промежуточных переменных ряды (3.4), (3.5) совпадали в  $D_0$ . При исследовании задач механики жидкости, как правило, применяется более простой принцип сращивания Ван Дайка, который не оперирует с промежуточными пределами [10]. Сращивание обеспечивает недостающие условия для функций  $u_n^{(\epsilon)}$  и  $u_n^{(s)}$ .

Вернемся к задаче о бесциркуляционном обтекании эллипса. Внутренние переменные в ней необходимо ввести в  $\epsilon^2$ -окрестностях обеих критических точек. Выбор их тривиален, например вблизи передней кромки

$x_s = (1+x)/\varepsilon^2$ ,  $y_s = y/\varepsilon^2$ . Хотя потенциал подвергается аналогичному аффинному растяжению  $\varphi_s = \varphi/\varepsilon^2$ , он по-прежнему удовлетворяет уравнению Лапласа. В результате возникает последовательность задач Неймана для тел,

форма которых получается из разложения 
$$y_s = \pm \sqrt{2x_s} \left( 1 - \frac{1}{4} \varepsilon^2 x_s + \dots \right)$$

образующей эллипса с учетом требуемого числа членов по  $\varepsilon$  (главный член определяется заменой эллипса на соприкасающуюся параболу). Сращивание разложений исключает появление собственных функций в решениях любого порядка. Аналогично рассматривается окрестность задней критической точки. Строгое обоснование метода применительно к задаче обтекания произвольного профиля с двумя закругленными кромками дано в работе Ильина [19], в которой доказана сходимость внешнего и обоих внутренних асимптотических разложений, а также возможность их сращивания в любом порядке.

**4. Нелинейные волны в неоднородной атмосфере.** Чтобы продемонстрировать реальные возможности метода деформированных координат, когда он используется для решения гиперболических задач газовой динамики, рассмотрим распространение слабых ударных волн в неоднородной атмосфере. В основу рассуждений будет положена физическая аргументация, которую легко перевести на формальный язык асимптотических разложений.

Пусть в исходном состоянии плотность  $\rho_0$ , давление  $p_0$  и компоненты  $v_{i0}$  вектора  $\vec{v}_0$  скорости частиц являются функциями декартовых координат  $x_i$ . Требуется определить асимптотические законы затухания ударных волн на больших расстояниях от породившего их источника. Для плоских волн в трубах задача была решена Крюссаром [20], характер убывания амплитуды цилиндрически- и сферически-симметричных фронтов установил Ландау [21].

Анализ в этих простейших случаях основан на предположении, что ширина зоны возмущенного движения газа много меньше расстояния от ударного фронта до источника. Рассматривая небольшие перемещения волны, порядка нескольких ее длин, можно считать избыточные плотность, давление и скорость связанными соотношениями Римана, поскольку прирост энтропии при ударном сжатии газа пропорционален кубу изменения любой из названных величин. Но при прохождении волной значительных расстояний следует принимать во внимание вырождение возмущений, диктуемое геометрическими факторами. Описанная процедура есть не что иное, как приближение геометрической акустики, в котором положение ударного фронта, отождествляемого с характеристической поверхностью, предсказывается неверно вдали от источника. Отсюда проистекает неоднородность в разложениях для избыточных параметров газа, причем во втором приближении появляются секулярные члены.

Чтобы учесть нелинейные эффекты, Крюссар и Ландау воспользовались зависимостью скорости распространения возмущений от избыточного давления. Ударный фронт движется со скоростью, также определяемой его амплитудой. Отсюда получается простое правило, задающее положение разрыва в волне Римана. Нелинейный характер исходных уравнений Эйлера приводит в конечном счете к неограниченному росту ширины возмущенной области. Асимптотические законы затухания ударных волн, естественно, отличаются от предсказываемых теорией звука. Таким образом, рассматриваемый прием построения решения состоит в вычислении параметров газа по приближению геометрической акустики, однако они приписываются не значениям координаты, соответствующим названному прибли-

жению, а задаются в слегка смещенных точках, положение которых определяется нелинейными эффектами. Здесь налицо все типичные черты метода деформированных координат, поэтому рассуждения Крюссара и Ландау дают надежную основу для его формализма, развитого Уитэмом [22].

При решении общей задачи предположение об узости зоны возмущенного движения сохраняется: длина волны предполагается малой по сравнению с главными радиусами кривизны ударного фронта и с характерным размером неоднородностей атмосферы. Описание полей избыточных параметров газа остается прежним, изменение их амплитуды находится в результате интегрирования уравнений геометрической акустики вдоль лучей, или бихарактеристик, определяемых в пространстве как

$$\frac{dx_i}{dt} = a_0 n_i + v_{i0}, \quad \frac{dn_i}{dt} = (n_i n_j - \delta_{ij}) \left( \frac{\partial a_0}{\partial x_j} + n_k \frac{\partial v_{k0}}{\partial x_j} \right) \quad (4.1)$$

Здесь  $a_0$  — скорость звука в исходной атмосфере,  $n_i$  — компоненты единичного вектора нормали к фронту волны,  $\delta_{ij}$  — компоненты единичного тензора, под повторяющимися индексами  $j, k$  подразумевается суммирование от 1 до 3.

Уравнениям геометрической акустики Рыжов и Шефтер придали вид закона сохранения звуковой энергии при распространении коротких волн малой амплитуды в движущихся средах [23]. Применение этого закона к некоторому объему внутри элементарной лучевой трубки ведет к простой формуле

$$p' = p_0' \frac{a_0 u_{n00}}{a_{00} u_{n0}} \sqrt{\frac{\rho_0 a_0 \sigma_0}{\rho_{00} a_{00} \sigma}} \quad (4.2)$$

для избыточного давления  $p'$ . Здесь  $u_{n0}$  — проекция лучевой скорости  $\mathbf{u}_0 = a_0 \mathbf{n} + \mathbf{v}_0$  на направление  $\mathbf{n}$ ,  $\sigma$  — площадь элемента фронта волны внутри лучевой трубки,  $p_0'$ ,  $\sigma_0$ ,  $\rho_{00}$ ,  $a_{00}$  и  $u_{n0}$  — значения соответствующих величин в начальной точке.

Если теперь подсчитать обусловленное нелинейными факторами смещение точек с давлением (4.2) вдоль выбранного луча, то можно найти асимптотический закон затухания амплитуды ударного фронта. Положим, что избыточные параметры газа в звуковом импульсе, ограниченном спереди слабым разрывом, имеют треугольные профили. Тогда для амплитуды  $p_0'$  ударной волны получим [23]

$$p_0' = p_0 \frac{a_0 u_{n00}}{a_{00} u_{n0}} \sqrt{\frac{\rho_0 a_0 \sigma_0}{\rho_{00} a_{00} \sigma}} \left[ 1 + \frac{(\kappa + 1) p_0' u_{n00}^2}{2 \lambda_0 a_{00}} \sqrt{\frac{\sigma_0}{\rho_{00} a_{00}}} \int_0^l \frac{\sqrt{a_0 / \rho_0 \sigma}}{u_0 u_{n0}^2} dl \right]^{-1/2} \quad (4.3)$$

где  $\kappa$  означает показатель адиабаты Пуассона,  $\lambda_0$  — начальную длину импульса, а посредством  $l$  измеряется расстояние вдоль луча.

В ситуациях, типичных для взрыва и полета сверхзвуковых самолетов, второе слагаемое из квадратных скобок в правой части (4.3) может не только быть сравнимым с 1, но также неограниченно возрастать, когда  $l \rightarrow \infty$ . Следующее Уитэму изложение обсуждаемых результатов в терминах метода деформированных координат можно найти в работе Жилина [24].

Поскольку убывание амплитуды ударного фронта вдоль лучей известно в явном виде, требуется рассчитать только их положение в пространстве. Задача сводится к численному интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4.1). По нескольким соседним лучам находится элемент площади  $\sigma$ . В то же время прямое интегрирование урав-



нений Эйлера без предварительного выяснения структуры области возмущенного движения связано с очень большими трудностями, если даже работа опирается на лучшие современные ЭВМ. Развитая теория в настоящее время положена в основу расчета параметров звукового удара [25].

**5. Свободное взаимодействие: устойчивость и ламинарный отрыв.** Чтобы продемонстрировать могущество метода сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений, применим его к исследованию свободного взаимодействия пристеночных слоев с ядром поля скоростей в безграничном плоском канале при числе Рейнольдса  $R \rightarrow \infty$ . Асимптотический подход ведет здесь к единой трактовке таких фундаментальных явлений, как потеря устойчивости и отрыв вязкого ламинарного течения.

Нелинейная теория возмущений, описывающая стационарный процесс свободного взаимодействия пограничного слоя на пластинке со сверхзвуковым набегающим потоком, была сформулирована Нейландом [26] и Стюартсоном совместно с Вильямсом [27]. Специфические черты отрыва несжимаемой жидкости от поверхности гладкого тела выявлены Сычевым [28]. Впоследствии была выдвинута концепция, что движение в области свободного взаимодействия может оказаться нестационарным, поэтому в дифференциальных уравнениях математической модели следует удерживать главные производные по времени [29, 30]. Упомянутая нелинейная теория, как заметил Смит [31], в равной мере приложима не только к изучению внешних течений, но и внутренних движений жидкости в каналах.

Как показывают результаты асимптотического анализа системы уравнений Навье — Стокса, основная часть возмущений в ядре потока имеет вихревую, но невязкую природу. Движение жидкости здесь квазистационарно, в связи с чем уравнения первого приближения не содержат производных по времени. Учет диссипативных эффектов становится существенным лишь в узких пристеночных слоях. Припишем индекс 1 безразмерным параметрам нижнего слоя, индексом 2 пометим аналогичные величины в слое у верхней стенки. В первом приближении управляющими нестационарным процессом в пристеночных слоях являются уравнения Прандтля

$$\frac{\partial v_x^{(1,2)}}{\partial x} + \frac{\partial v_y^{(1,2)}}{\partial y_{1,2}} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y_{1,2}} = 0, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial v_x^{(1,2)}}{\partial t} + v_x^{(1,2)} \frac{\partial v_x^{(1,2)}}{\partial x} + v_y^{(1,2)} \frac{\partial v_x^{(1,2)}}{\partial y_{1,2}} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_x^{(1,2)}}{\partial y_{1,2}^2}$$

которые содержат самоиндуцированное давление

$$p = P(t, x) \mp \frac{1}{240} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \quad (5.2)$$

распадающееся на симметричную  $P(t, x)$  и антисимметричную  $\mp (1/240) \times (\partial^2 A / \partial x^2)$  части, причем функция  $A(t, x)$  задает мгновенное смещение линий тока в невязком ядре поля скоростей. Таким образом, антисимметричная часть возмущенного давления зависит от кривизны линий тока. В каналах область безвихревого течения жидкости отсутствует. Граничные условия на плоских стенках  $y_{1,2} = 0$  очевидны:  $v_x^{(1,2)} = v_y^{(1,2)} = 0$ . При выходе на внешние края  $y_{1,2} \rightarrow \pm \infty$  пристеночных слоев справедливы предельные условия  $v_x^{(1,2)} \mp 1/2 y_{1,2} \rightarrow \pm 1/2 A$ , которые следуют из сращивания асимптотических разложений для различных областей.

Как и в обсуждавшейся в разделе 2 линейной теории устойчивости, ищем решение уравнений Прандтля в виде

$$A = ae^{i(\omega t + kx)}, \quad P = a\delta e^{i(\omega t + kx)} \quad (5.3)$$

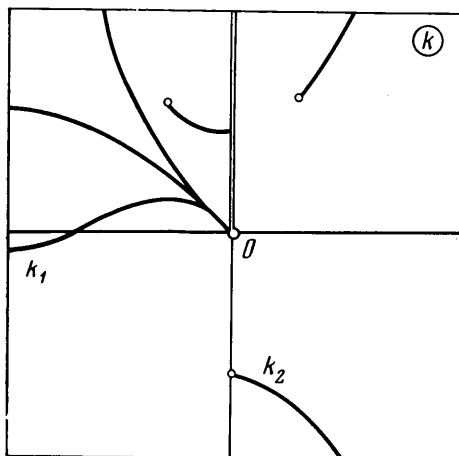
$$v_x^{(1,2)} = \frac{1}{2} y_{1,2} = -a \frac{df_{1,2}}{dy_{1,2}} e^{i(\omega t + kx)}$$

$$v_y^{(1,2)} = iakf_{1,2}(y_{1,2}) e^{i(\omega t + kx)}$$

Если пренебречь во всех соотношениях пропорциональными квадрату амплитуды  $a$  членами, то функции  $f_1$  и  $f_2$  должны удовлетворять обыкновенным дифференциальным уравнениям третьего порядка по переменным  $y_1$  и  $y_2$  соответственно. В граничных условиях, сформулированных для плоских стенок, отсутствуют какие-либо источники возбуждения колебаний, поэтому для упомянутых уравнений ставится совместная задача на собственные значения, которая включает три свободных параметра  $\delta$ ,  $\omega$  и  $k$ . Она допускает решения только при  $\delta=0$ , что означает исчезновение в свободных колебаниях жидкости, симметричной относительно оси канала части. Общие свойства дисперсионного соотношения

$$\frac{d \text{Ai}(\xi)}{dz} \left[ \int_{\zeta}^{\infty} \text{Ai}(z) dz \right]^{-1} = \frac{1}{60} k^2 \left( \frac{ik}{2} \right)^{1/3}, \quad \zeta = i^{1/3} \omega \left( \frac{k}{2} \right)^{-2/3} \quad (5.4)$$

где переменная  $z = \xi \pm (ik)^{1/3} y_{1,2}$ , а  $\text{Ai}(z)$  — функция Эйри, изучены в работах Богдановой, Жука и Рыжова [32, 33]. В них показано, что для фиксированного комплексного волнового числа  $k$  существует целый спектр (дискретный) собственных частот. Аналогичный вывод справедлив для заданной комплексной частоты  $\omega$ , когда искомым является волновое число. Несколько первых собственных значений найдены путем численного решения уравнения (5.4), на фиг. 2 изображены траектории, вычерчиваемые ими в комплексной плоскости  $k$  с разрезом вдоль положительной мнимой полуоси, когда изменяется  $\text{Re } \omega > 0$ , а  $\text{Im } \omega = 0$ .



Фиг. 2

им длинноволновых колебаний с  $\alpha \rightarrow 0$  прилегают непосредственно к нижней и верхней стенкам канала. Для этого достаточно рассуждения Толмина [34] более последовательно облечь в форму метода сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений. Собственная частота  $\omega_* = 4,9809$  дает значение волнового числа  $k_* = -6,3854$  для кривой  $k_1$  на фиг. 2, используя которое можно сразу указать асимптотическую формулу для нижней ветви нейтральной кривой устойчивости при  $R \rightarrow \infty$ , поскольку нормировка используемых в теории свободного взаимодействия переменных включает степени малого параметра  $\epsilon = R^{-1/2}$  для возмущений в пло-

ском канале. Если учесть пропорциональность  $\alpha$  и  $k$ , то в согласии с упоминавшимся в разделе 2 результатом Лия [3], полученным из анализа уравнения Орра — Зоммерфельда, имеем  $\alpha \sim R^{-1/2}$ . Простое объяснение получает также равенство нулю функции  $P(t, x)$  из правой части (5.2), поскольку линейная теория устойчивости предсказывает характерный продольный размер симметричных возмущений пропорциональным  $R$ , а не  $R^{1/2}$ .

Подставляя собственные функции краевой задачи в правые части формул (5.3), построим поля течений в канале. Их можно трактовать как внутренние волны, порождаемые совместным действием самоиндуцированного давления и вязких касательных напряжений. На основании изложенного выше заключаем, что внутренние волны представляют не что иное, как волны Толлмина — Шлихтинга с прилегающими к стенкам критическими слоями нейтральных колебаний.

При изучении уравнения Орра — Зоммерфельда волновое число  $\alpha$  обычно полагают принимающим лишь действительные значения. Распространим допустимые значения  $\alpha$  на любые комплексные числа. Имея в виду пропорциональность  $\alpha$  и  $k$ , возвратимся к фиг. 2, где кружками отмечены три корня дисперсионного уравнения (5.4), отвечающие стационарным возмущениям с  $\omega = 0$ . Для единственного в нижней полуплоскости  $k$  корня, лежащего на пересечении кривой  $k_2$  с осью ординат, избыточные параметры жидкости затухают вверх по потоку по экспоненциальному закону. Продолжение слабо возмущенного поля скоростей вниз по потоку при помощи численного интегрирования уравнения Прандтля привело Смита [35] к описанию отрыва и простирающейся за ним области рециркуляционного движения жидкости вблизи одной из стенок сосуда; в окрестности другой стенки происходит разрежение. Таким образом, изучение корней уравнения (5.4) с мнимыми  $k$  позволяет найти из решения линейной задачи на собственные значения функции, которые описывают начальную стадию стационарного свободного взаимодействия, предшествующую отрыву потока с обтекаемых поверхностей. С этой точки зрения отрыв можно рассматривать как специфическую форму потери устойчивости вязким ламинарным движением жидкости. По-видимому, соответствующий интеграл уравнения Орра — Зоммерфельда существует в некотором диапазоне значений числа Рейнольдса, а не только в асимптотическом пределе  $R \rightarrow \infty$ . Для его определения в вековом уравнении (2.4) достаточно положить  $\alpha$  мнимой величиной.

Класс решений задачи на собственные значения с мнимыми  $k$  охватывает бегущие волны еще одного типа, которые отличны от уже упоминавшихся волн Толлмина — Шлихтинга. Наряду с  $k$  в бегущих волнах второго типа мнимые значения принимает также частота  $\omega$ , в связи с чем скорость  $c = -\omega/k$  распространения возмущений оказывается действительной величиной. Как показали Жук и Рыжов [32], против основного течения может идти единственная волна, сносимые по течению волны обладают бесконечным (дискретным) спектром скоростей. Продолжение полей возмущений в нелинейную область, которое достигается численным интегрированием полных уравнений Прандтля, вероятно, дает картину отрыва и перемещающихся зон рециркуляционного течения, хотя решение обсуждаемой задачи для каналов в настоящее время отсутствует.

Связь отрыва с устойчивостью несжимаемого пограничного слоя менее очевидна, так как в этом случае вырождение области стационарного свободного взаимодействия на бесконечности вверх по потоку происходит по алгебраическим законам [28].

Как свидетельствуют результаты многочисленных экспериментов [7, 8], развитие неустойчивых колебаний приводит в конечном счете к разруше-

нию ламинарного течения и его переходу в турбулентное. Переходу предшествует нелинейный процесс усиления амплитуды пульсаций в волнах Толлмина — Шлихтинга. Систему уравнений Прандтля (5.1) с самоиндуцированным давлением (5.2) можно использовать для изучения развития неустойчивых волн Толлмина — Шлихтинга с достаточно большим периодом при  $R \rightarrow \infty$ , как это было сделано Смитом [35] при построении зоны рециркуляционного течения, возникающей при стационарном отрыве. Основной интерес представляет выяснение вопроса, существует ли у названных уравнений зависящие от времени решения со стохастическими свойствами. В случае его положительного решения уравнения Прандтля будут применимы к исследованию возникновения турбулентности. Что касается численного интегрирования уравнений Прандтля, содержащих самоиндуцированное давление, то эта задача много проще, чем аналогичная задача для исходных уравнений Навье — Стокса, поскольку последние содержат малый параметр при старших производных.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Reynolds O. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and the law of resistance in parallel channels.— Trans. Roy. Soc., 1883, v. 174, pt. 3, p. 935.
2. Smith F. T. The non-parallel flow stability of the Blasius boundary layer.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, v. 366, № 1724.
3. Лиль Цзяцзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
4. Юдович В. И. Об устойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости.— Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 5.
5. Stuart G. T. Nonlinear stability theory.— In: Ann. Rev. Fluid Mech., v. 3. Palo Alto, California, Ann. Revs. Inc., 1971.
6. Джозеф Дж. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1981.
7. Schubauer G. B., Skramstad H. K. Laminar boundary layer oscillations and transition on a flat plate.— J. Aero. Sci., 1974, v. 14, № 1, p. 69–78.
8. Ross J. A., Barnes F. H., Burns J. G., Ross M. A. S. The flat plate boundary layer. Part 3. Comparison of theory with experiment.— J. Fluid Mech., 1970, v. 43, p. 819–832.
9. Седов Л. И. Движение воздуха при сильном взрыве.— Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 1.
10. Van Dyke M. Perturbation methods in fluid mechanics, Annotated edition. Stanford: Parabolic Press, 1975.
11. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики.— Избр. труды. Т. 1. М.: Наука, 1971–1974.
12. Lighthill M. J. The shock strength in supersonic «conical fields».— Phil. Mag., 1949, v. 40, ser. 7, № 311, p. 1202–1223.
13. Wasow W. A. On the convergence of an approximation method of M. J. Lighthill.— J. Rational Mech. and Analysis, 1955, v. 4, № 5, p. 751–767.
14. Lin C. C. On a perturbation theory based on the method of characteristics.— J. Math. and Phys., 1954, v. 33, № 2, p. 117–134.
15. Lighthill M. J. A new approach to thin airfoil theory.— Aeronaut. Quart., 1951, v. 3, pt 3, p. 193–210.
16. Hoogstraten H. W. Uniformly valid approximations in two-dimensional subsonic thin airfoil theory.— J. Engng Math., 1967, v. 1, № 1, p. 51–65.
17. Prandtl L. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung.— In: Proc. Third Internat. Math. Congr. Heidelberg, 1904, p. 484–491.
18. Kaplum S., Lagerstrom P. A. Asymptotic expansions of Navier – Stokes solutions for small Reynolds members.— J. Math. Mech., 1957, v. 6, № 5, p. 585–593.
19. Ильин А. М. Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. I. Двумерный случай.— Матем. сб., 1976, т. 99 (141), вып. 4.
20. Crussard L. Sur la propagation et l'alteration des ondes de choc.— Compt. Rend., 1913, t. 156, № 8.
21. Ландау Л. Д. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения.— ПММ, 1945, т. 9, вып. 4, p. 286–292.
22. Whitman J. B. The propagation of spherical blast.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1950, v. 203, № 1075.

23. Рыжов О. С., Шефтер Г. М. Об энергии звуковых волн, распространяющихся в движущихся средах.— ПММ, 1962, т. 26, в. 5.
24. Жилин Ю. Л. Теория затухания стационарных и нестационарных ударных волн в неоднородных средах.— Тр. ЦАГИ, 1967, в. 1094.
25. Hayes W. D. Sonic boom.— In: Ann. Rev. Fluid Mech., v. 3. Palo Alto. California, Ann. Revs Inc., 1971, p. 269—290.
26. Нейланд В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке.— Изв. АН СССР. МЖТ, 1969, № 4, p. 53—57.
27. Stewartson K., Williams P. G. Self-induced separation.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1969, v. 312, № 1509, p. 181—206.
28. Сычев В. В. О ламинарном отрыве.— Изв. АН СССР. МЖТ, 1972, № 3, p. 47—59.
29. Schneider W. Upstream propagation of unsteady disturbances in supersonic boundary layers.— J. Fluid Mech., 1974, v. 63, № 3, p. 465—485.
30. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 6, p. 1007—1023.
31. Smith F. F. Flow through constricted or dilated pipes and channels: pt 2.— Quart. J. Mech. Appl. Math., 1976, v. 29, pt 3.
32. Жук В. И., Рыжов О. С. О свободном взаимодействии пристеночных слоев с ядром течения Пуазейля.— Докл. АН СССР, 1981, т. 257, № 1, p. 55—59.
33. Богданова Е. В., Рыжов О. С. О колебаниях, возбуждаемых гармоническим осциллятором в течении Пуазейля.— Докл. АН СССР, 1981, т. 257, № 4, p. 837—841.
34. Tollmin W. Uber die Entstehung der Turbulenz. I Mitteilung. Nachr. Ges. Wissenschaften Göttingen, Math.— Phys. Kl., 1929, H. 1, p. 21.
35. Smith F. F. Upstream interactions in channel flows.— J. Fluid Mech., 1977, v. 79, pt 4.

Поступила в редакцию  
11.VIII.1981

Москва