

УДК 532.51

## **НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГИДРОДИНАМИКИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЕЙ<sup>1</sup>**

**ЯКИМОВ Ю. Л.**

Рассмотрим некоторые общие свойства струйных течений жидкости. Ограничимся случаем, когда жидкость идеальна, а процесс баротропный и имеет место линейная связь между плотностью и давлением. Тогда течение определяется плотностью жидкости  $\rho$ , скоростью звука в ней  $c$ , линейным размером  $L$ , характерной скоростью  $V_0$ , характерным давлением  $p_0$  (например, далеко от рассматриваемого тела), а при наличии кавитации — давлением на свободной поверхности жидкости  $p_k$ . Из этих параметров можно составить три безразмерных критерия, характеризующих течение: число Маха  $M$ , число Эйлера  $Eu$  и число кавитации  $\sigma$  [1]:

$$M = \frac{V_0}{c}, \quad Eu = \frac{2p_0}{\rho V_0^2}, \quad \sigma = \frac{2(p_0 - p_k)}{\rho V_0^2}$$

В классической гидродинамике рассмотрены безотрывные потенциальные течения несжимаемой жидкости ( $M=0$ ,  $Eu \geq \sigma \gg 1$ ) [2] и струйные течения ( $M=0$ ,  $Eu \sim 1$ ,  $\sigma \ll 1$ ) [3].

Для больших скоростей движения, когда  $\sigma \ll Eu \ll 1$ , ниже рассмотрен еще ряд предельных течений.

Для несжимаемой жидкости при  $Eu \rightarrow 0$  доказано (п.1), что предположение о наличии пограничного слоя на поверхности кавитатора приводит с учетом физических свойств жидкости к течениям с конечным сопротивлением и неограниченной каверной. Приведены возможные предельные характеристики кавитаторов.

На основе анализа течения газа вблизи поверхности каверны показано (п.2), что при больших скоростях стремление  $\sigma$  к нулю имеет неравномерный характер.

Рассмотрено влияние пузырькового следа на сопротивление (п.3) и указано на аномальный характер трения в пульпе.

Дан обзор дифференциальных уравнений, описывающих форму тонких нестационарных каверн для несжимаемой жидкости (п.4) и с учетом сжимаемости (п.5) указана асимптотическая форма каверны при  $\sigma=0$  и дана методика моделирования сжимаемости жидкости при ударе тел о воду.

Рассмотрен класс автомодельных течений, описывающих движение кавитаторов в несжимаемой жидкости по инерции (п.6), и класс автомодельных течений, описывающих разлет слоев жидкости конечной толщины (п.7).

Следует заметить, что предельные решения (особенности, автомодельные решения, линеаризованные задачи и т. д., а тем более целые классы предельных постановок) вызывали и продолжают вызывать интерес. Раньше этот интерес был связан с упрощением уравнений и возможностями оценки решений. Теперь когда благодаря ЭВМ интерес, связанный с вычислительными упрощениями, в значительной степени потерян, ясно, что предельные решения и предельные постановки задач важны как объекты категорий мышления. В этом смысле их роль трудно переоценить. «Понять» — это значительно больше, чем знать числовой ответ или даже формулу. Предельные постановки помогают разобраться в сложных зависимостях, позволяют мысленно конструировать течения, выделяя в них основное.

Систему уравнений для потенциала скорости  $\varphi$ , описывающих рассматриваемые течения жидкости, и условие для давления на определяемой поверхности каверны или струи представим в виде [2—4]

$$\Delta\varphi=0, \quad \text{grad}\varphi=0, \quad x \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = V_n, \quad x \in S_T, \quad x \in S_k \quad (0.1)$$

<sup>1</sup> Доклад на V Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике, Алма-Ата, 1981.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\text{grad } \varphi)^2 = \frac{p_0 - p_k}{\rho}, \quad x \in S_k \quad (0.2)$$

где  $S_T$  — поверхность твердого кавитатора,  $S_k$  — поверхность каверны или струи.

1. Рассмотрим внешнюю задачу об обтекании кавитатора безграничным поступательным потоком. Предположим, что некоторому потоку реальной жидкости ставится в соответствие потенциальный поток идеальной несжимаемой жидкости. В реальной покоящейся жидкости давления не могут быть отрицательными. Так как на границе кавитатора в реальной жидкости имеется пограничный слой с заторможенной жидкостью, в качестве ограничительного условия при формулировке математической постановки задачи на границе кавитатора следует взять  $p \geq 0$ .

Аналогичное условие имеет место достаточно далеко, где жидкость покоится, а также на границе каверны. Учет того обстоятельства, что покоящаяся жидкость может допускать некоторые отрицательные давления  $p \geq -|\delta|$ , не имеет значения для дальнейшего, ибо в пределе при больших скоростях для безразмерного давления  $P$  и в этом случае имеет место неравенство  $P \geq 0$ , так как

$$P = \frac{p}{\rho V_0^2} \geq -\frac{|\delta|}{\rho V_0^2} \rightarrow 0$$

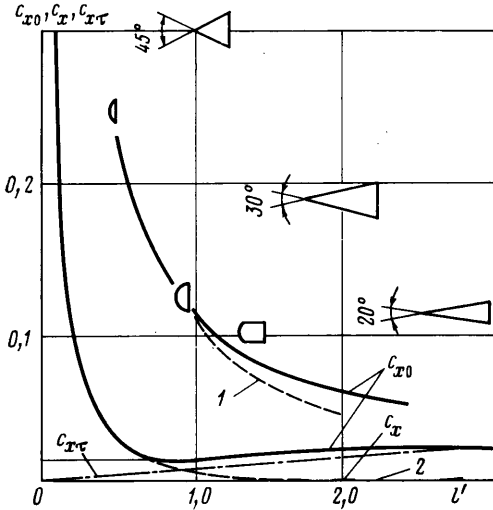
Рассмотрим потенциальное течение с этим ограничением, т. е. с давлением на границах области  $p \geq 0$ . Тогда из супергармоничности функции  $p$  [4] следует, что во всей области  $p \geq 0$ .

Непосредственно из свойств жидкости условие положительности давления во всей области течения не следует. Можно допустить существование областей с  $p < 0$ . Если эти области малы или, наоборот, скорость течения очень велика, то жидкость может «не успеть» закавитировать, т. е. зародыши кавитационных пузырьков могут не успеть развиться настолько, чтобы существенно изменить картину течения.

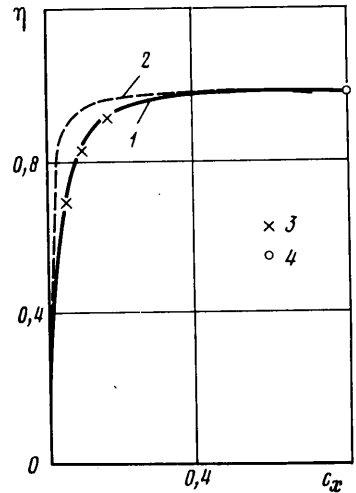
Рассмотрим предельную ситуацию установившегося течения, соответствующего малым начальным давлениям или большим скоростям течения тела, когда  $Eu = 0$ . Тогда из интеграла Бернулли получим, что  $V \leq V_0$ , откуда немедленно следует, что в безграничном потоке при  $Eu = 0$  течения, имеющие ограниченные каверны и твердые поверхности, не имеют физического смысла [5]. Действительно, эти течения далеко от кавитатора и каверны эквивалентны поступательному потоку и течению от сосредоточенной главной особенности (сток для схемы Эффроса или диполь для схемы Рябушинского и т. д.). Если в какой-либо точке пространства скорости от поступательного потока  $V_0$  и от этой особенности имеют разный знак, то в симметричной относительно особенности точке эти скорости будут иметь одинаковый знак. Поэтому всегда можно указать точку в потоке, для которой  $V > V_0$ , что противоречит условию  $p \geq 0$ . При  $Eu = 0$  не существует физически допустимых решений, соответствующих обтеканию кавитатора в трубе или периодической системы кавитаторов, так как в зауженных местах скорость должна быть больше  $V_0$ .

Таким образом, при  $Eu = 0$  одновременно имеют место схема течения Кирхгофа и принцип Бриллюэна [4] о максимуме скорости на границе каверны, т. е. выполняются условия теоремы М. А. Лаврентьева [3, 4], согласно которой в плоском и осесимметричном случаях для простых кавитаторов (кавитатор простой, если зависимость радиус-вектора  $r$  от угла его поворота является однозначной) сопротивление конечно, причем минимум сопротивления достигается на телах, геометрия которых совпадает с формой каверны при обтекании пластины или диска по схеме Кирхгофа

(кривая 1 фиг. 1). На фиг. 1 представлена зависимость коэффициента сопротивления трения  $c_{x\tau}$ , коэффициента сопротивления в идеальной жидкости  $c_x$  и полного сопротивления  $c_{x0}=c_x+c_{x\tau}$  в зависимости от удлинения кавитатора  $l'=l/\sqrt{S_0/\pi}$ , где  $l$  — длина кавитатора,  $S_0$  — площадь сечения отрыва. Положение некоторых кавитаторов на графике (полусфера, полуэллипсоиды, конусы) соответствует экспериментальным значениям  $c_{x0}$  для них. В [5] доказано существование сопротивления при  $Eu=0$  у кавитатора любой формы, а также стремление поперечного сечения каверны при этом к кругу. Более того, можно указать нижнюю оценку для сопротивления кавитатора произвольной формы, зависящую, как в теореме



Фиг. 1



Фиг. 2

М. А. Лаврентьева, от длины кавитатора и площади сечения отрыва каверны. Одна из них имеет вид

$$c_x > \frac{1}{64\pi^2} \frac{S_0}{l^2}$$

Из этого неравенства следует, что при заданном минимальном сопротивлении длина кавитатора может быть равной или большей некоторой длины, даваемой кривой 2 фиг. 1. В реальной жидкости с длиной кавитатора связаны потери на трение, которые тем больше, чем длиннее кавитатор. Следовательно, минимальные потери на трение при заданном сопротивлении будут у кавитаторов, лежащих на кривых 1 и 2. У всех остальных относительное сопротивление трения (трение, отнесенное к кавитационному сопротивлению) может быть только выше. В связи с этим можно ввести величину

$$\eta = \frac{c_x}{c_{x\tau} + c_x}$$

Так как потери на трение всегда есть, то  $\eta < 1$ . Для идеальной жидкости  $\eta = 1$ . Максимальный  $\eta$  будет у кавитаторов, имеющих минимальную длину при заданном кавитационном сопротивлении, т. е. на кривой 1 или 2. Так как кавитационное сопротивление уменьшается с увеличением длины кавитатора, а сопротивление трения, наоборот, возрастает, то суммарное сопротивление имеет абсолютный минимум. Никакой кавитатор не может иметь коэффициент сопротивления меньше этой минимальной величины.

Задавшись величиной коэффициента трения, получим  $c_{xt}$ , пропорциональный длине кавитатора  $l$ . В то же время минимальный коэффициент сопротивления  $c_x$  уменьшается с ростом длины кавитатора. Отсюда следует, что существует абсолютный минимум сопротивления кавитаторов, не зависящий от их формы. Аналогичный вывод, но с оценкой, а не с точной минимальной границей, существует и для кавитаторов произвольной формы.

На фиг. 2 представлена зависимость  $\eta(c_x)$ , соответствующая простым кавитаторам. Точки 3 на графике соответствуют значениям  $\eta$  для конусов, точка 4 — для диска. Аналогичную зависимость можно было бы построить и от величины удлинения кавитатора  $\eta(l/d)$ , а также  $\eta(c_x + c_{xt})$ . Эти зависимости показывают, что максимальный  $\eta \sim 1$  имеют кавитаторы с малым относительным удлинением.

Сформулируем полученные общие выводы, касающиеся течений идеальной жидкости при  $Eu=0$ .

Обтекание любого кавитатора потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости при  $Eu=0$  возможно только по схеме Кирхгофа с бесконечной каверной, причем сечение каверны стремится к кругу.

Кавитатор любой формы имеет в идеальной жидкости при  $Eu=0$  конечное сопротивление, зависящее от удлинения.

Никакой кавитатор не может иметь сопротивление меньше некоторого абсолютного минимума, зависящего только от коэффициента трения.

Значение  $\eta$ , близкое к 1, может быть только у кавитаторов с большим сопротивлением (диск и близкие к ним формы кавитаторов).

Для кавитаторов, имеющих низкое сопротивление в идеальной жидкости,  $\eta \ll 1$ .

2. Рассмотрим предельную ситуацию на границе раздела газ — жидкость. В классической постановке о струйных течениях жидкости в качестве граничного условия предполагается, что давление на свободной поверхности струи постоянно или зависит только от времени. Предположение о постоянстве давления связано с тем, что при скоростях движения газа, прилегающего к жидкости, соизмеримых со скоростями движения жидкости, перепады давления в газе малы. Этим перепадам можно пренебречь, если рассматриваются течения, в которых число кавитации  $\sigma$  конечно. Действительно, в этом случае перепад давления газа и, следовательно, связанная с ним добавка

$$\Delta\sigma \sim \rho_1/\rho \ll \sigma \quad (2.1)$$

где  $\rho_1$ ,  $\rho$  — плотности газа и жидкости. Таким образом классическая постановка связана с предположением, что  $\Delta\sigma \ll \sigma$  или  $\rho_1/\rho \ll \sigma$ . Однако при  $\sigma \rightarrow 0$  условие (2.1) может быть нарушено. При этом следует иметь в виду два обстоятельства. Во-первых, вследствие малости  $\sigma$  течение жидкости в ограниченной области будет мало отличаться от течения при  $\sigma=0$ , и, следовательно, это уточнение граничного условия может быть для ряда случаев несущественно. Во-вторых, течение газа может сопровождаться турбулентным трением о поверхность жидкости, при этом существенно изменится характер течения жидкости вблизи поверхности струи.

Один из примеров, когда перепад  $\Delta\sigma$  существен и связан с характером течения газа, рассмотрен в [6, 7]. Ниже рассмотрен случай нарушения условия (2.1) на примере двуслойного пограничного слоя.

Рассмотрим произвольную поверхность  $S$  в виде  $z=hF(x/L, y/L)$ , где  $h$ ,  $L$  — характерные высота и расстояние между неровностями. Пусть над  $S$  течет слой газа толщиной  $\sim h(x, y)$  с плотностью  $\rho_1$ , а над ним — струя жидкости плотностью  $\rho$ . Скорость жидкости  $V$  далеко от поверхности  $S$  направлена вдоль оси  $x$ . При достаточно

большой скорости  $V$  вблизи  $S$  образуется сложный турбулентный пограничный слой, а контактная поверхность превратится в поверхность смещения газа и жидкости. Если характерные скорости течения газа  $W$  имеют порядок  $V$ , то напряжения турбулентного трения на границе раздела будут иметь порядок

$$c_t \rho_1 [(V - W_x)^2 + W_y^2] \approx c_t \rho_1 V^2$$

где  $c_t$  — коэффициент турбулентного трения.

Рассмотрим предельную ситуацию, когда  $\rho_1/\rho \rightarrow 0$ . Тогда давление газа на жидкость стремится к нулю и отношение напряжения турбулентного трения к скоростному напору жидкости становится мало. Таким образом, получается очевидный вывод об отсутствии влияния газа на течение жидкости. Итак, при  $\rho_1/\rho \rightarrow 0$  граница раздела стремится к предельному положению и не зависит от течения газа под ней.

Рассмотрим элемент поверхности  $\Delta S \sim L^2$ . Пусть  $h(x, y) \ll L$ . В этом случае при анализе сил, действующих на газ, расположенный над этим элементом, достаточно учесть только силы трения газа о жидкость и поверхность, а также градиент давления. Силами инерции при малом  $h/L$  можно пренебречь, так как в стационарном течении они пропорциональны  $h$ , а силы трения пропорциональны  $L$ . Получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} C_1 \rho_1 [(V - W_x)^2 + W_y^2] \cos \alpha - \frac{1}{2} C_2 \rho_1 [W_x^2 + W_y^2] \cos \beta &= h \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{1}{2} C_1 \rho_1 [(V - W_x)^2 + W_y^2] \sin \alpha - \frac{1}{2} C_2 \rho_1 [W_x^2 + W_y^2] \sin \beta &= h \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\cos \alpha = \frac{V - W_x}{\sqrt{(V - W_x)^2 + W_y^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{W_y}{\sqrt{(V - W_x)^2 + W_y^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{W_x}{\sqrt{W_x^2 + W_y^2}}, \quad \sin \beta = \frac{W_y}{\sqrt{W_x^2 + W_y^2}}$$

где  $W$  — среднемассовая скорость течения газа,  $C_1, C_2$  — коэффициенты турбулентного трения.

Анализ второго уравнения (2.2) показывает, что величина и знак левой части зависят от величины  $W_x$  и от соотношения между  $C_1$  и  $C_2$ . Перепишем его в виде

$$h \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{2} C W_y^2 \rho_1 \quad (2.3)$$

$$C = C_1 \sqrt{1 + \left(\frac{V - W_x}{W_y}\right)^2} + C_2 \sqrt{1 + \left(\frac{W_x}{W_y}\right)^2}$$

Из выражения для  $C$  следует, что эта величина при малых  $W_y$  неизбежно очень велика, так как при этом  $W_y \ll V - W_x$  либо  $W_y \ll W_x$  в связи с тем, что  $V - W_x \sim V$ , либо  $W_x \sim V$ . Учитывая эти неравенства, для величины перепада давления из (2.3) получим

$$\Delta p \sim C_1 \frac{\Delta y}{h} \frac{V}{W_y} \rho_1 \frac{W_y^2}{2}$$

Это выражение показывает, что если, например, скоростной напор в газе конечен, а  $V \rightarrow \infty$ , то при фиксированных  $C_1, h$  и  $\Delta y$  будем иметь в поперечном направлении  $\Delta p \rightarrow \infty$ . Или при конечных перепадах  $\Delta p$  в этом направлении скорость газа поперек линий тока жидкости  $W_y = 0$ , что означает параллельность линий тока газа и жидкости. Можно указать порядки стремления  $\rho_1 \rightarrow 0, W_y \rightarrow 0$  и  $V \rightarrow \infty$ , такие, что  $\Delta p$  остается конечным или даже  $\Delta p \rightarrow \infty$ .

Выше было показано, что течение газа даже при значительных поперечных перепадах давления может происходить вдоль линий тока жидкости. Поэтому течения газа вблизи различных линий тока жидкости в пределе не зависят друг от друга. В то же время перепады давления вдоль линий тока существенно зависят от величин, входящих в левую часть первого уравнения (2.2), и, в частности, от соотношения между скоростью жидкости и среднемассовой скоростью газа. Для перепада дав-

ления имеем оценку

$$\Delta p \sim L \operatorname{grad} p \sim \frac{L}{h} C_1 \rho_1 V^2$$

из которой следует, что с ростом скорости перепад давления может стать соизмеримым с величиной давления газа  $p$ , если  $V\sqrt{C_1 L/h}$  соизмеримо с величиной скорости звука в газе. При постоянном расходе в струе газа величина его скорости  $W_x$  будет существенно зависеть от  $h(x)$ . Выше было показано, что форма поверхности жидкости стремится к некоторой предельной независимо от  $S(x, y)$ . Таким образом,  $h(x)$  зависит только от задаваемой  $S(x, y)$  и в этом смысле может быть произвольной. При этом распределение давления  $p(x)$  также будет зависеть от  $S(x, y)$ .

3. При движении кавитатора или вообще любого тела в реальной жидкости за ним может образовываться пузырьковый след. В этом случае идеальные схемы обтекания с замкнутыми линиями тока соответствуют лишь некоторому среднему течению. В случае больших скоростей естественно предположить равенство поступательных скоростей пузырьков и жидкости, так как скорость дрейфа, обусловленного вязкими силами, значительно меньше поступательной скорости. Можно пренебречь инерцией газа по сравнению с инерцией жидкости, а также принять, что в связи с малым размером пузырьков температура газа в пузырьке равна температуре жидкости  $T_0$ .

Так как далеко от тела давление одинаково и равно  $p_0$ , то сила, действующая на тело, связана только с отличием скорости в следе от скорости набегающего потока. Из интеграла Бернулли следует, что для трубок тока, в которые газ не поступает, отличия в скорости нет. Для трубок тока, в которые газ поступает, в некотором сечении, соответствующем давлению  $p_1$ , начиная с этого сечения изменяется уравнение состояния среды, а из интеграла Бернулли при этом следует наличие разности скоростей далеко перед телом и далеко позади тела. В принятых предположениях дополнительный удельный объем, от которого зависит интеграл Бернулли, будет  $p_0 d\Omega / p dG$ , где  $dG$  — расход жидкости в рассматриваемой трубке тока,  $d\Omega$  — объемный расход газа, отнесенный к давлению  $p_0$ .

Из интеграла Бернулли получим

$$\Delta \frac{V^2}{2} = - \int_{p_1}^{p_0} \frac{p_0 d\Omega}{p dG} dp = \frac{p_0 d\Omega}{dG} \ln \frac{p_1}{p_0}$$

Имея в виду малость  $\Delta V$  по сравнению со скоростью набегающего потока, имеем

$$\frac{\Delta V^2}{2} = V_0 dV = \frac{p_0 d\Omega}{dG} \ln \frac{p_1}{p_0}$$

или

$$dV dG = \frac{p_0 d\Omega}{V_0} \ln \frac{p_1}{p_0}$$

Но левая часть этого равенства представляет приращение импульса в рассматриваемой трубке тока. Суммируя по всем трубкам тока, для суммарной силы получим

$$F = \frac{p_0 \Omega}{V_0} \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (3.1)$$

Таким образом, знак и величина силы зависят от перепада давления, объемного расхода газа и скорости движения тела.

Выражению (3.1) можно придать вид

$$F = p_0 S_0 \ln(p_1/p) \quad (3.2)$$

где  $S_0$  — площадь поперечного сечения, которая была бы у струи газа, вытекающего из тела со скоростью  $V_0$ , давлением  $p_0$  и температурой, равной температуре жидкости.

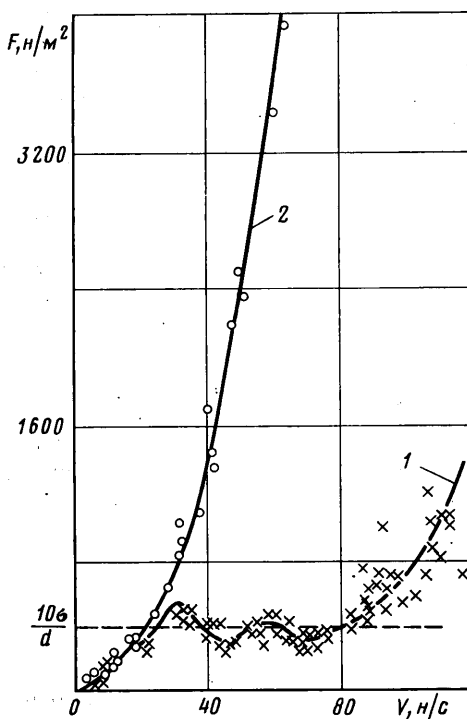
Вывод (3.1) и (3.2) не связан с предположением о несжимаемости жидкости.

При наличии уноса газа несколькими струями при разных начальных давлениях  $p$  для дополнительной силы сопротивления имеет место принцип суперпозиции [4].

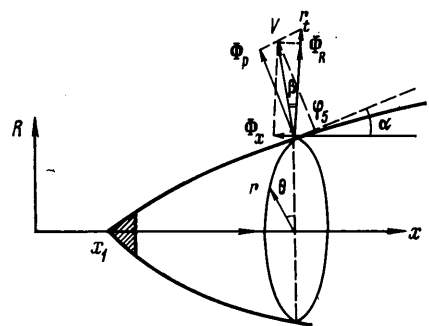
В случае необходимости может быть учтена реактивная сила газа, а также отличие его температуры от температуры жидкости.

Другой случай влияния пузырьков газа на сопротивление рассмотрен в [9]. Экспериментально обнаружен аномальный характер сил трения

в пульпе при скоростях более 30 м/с. На фиг. 3 приведена экспериментальная зависимость силы сопротивления трения на единицу площади  $F$  от скорости течения  $V_0$ . Кривая 1 соответствует сопротивлению трения в пульпе, кривая 2 — в воде. Из графика видно, что в некотором диапазоне скоростей сила трения не только не возрастает с ростом скорости, но даже уменьшается. Этот эффект связывается с разрушением перегородок между пузырьками, когда на-



Фиг. 3



Фиг. 4

пряжение трения становится соизмеримым с силами поверхностного натяжения, удерживающего форму пузырьков.

4. Дифференциальные уравнения для форм тонких осесимметричных каверн, выведенные на основе обратной задачи теории тонкого тела, рассмотрены в [5, 10–12]. Сведение проблемы решения исходной системы (0.1), (0.2) к дифференциальному уравнению, содержащему в качестве независимых переменных только координату  $x$  вдоль оси каверны и время  $t$ , крайне упрощает расчеты и позволяет выявить закономерности вырождения формы каверн при предельных значениях параметров. При больших скоростях движения естественно воспользоваться относительной тонкостью каверн. Принципиальной трудностью при использовании пред-

положения о тонкости каверны является то, что энергия плоского слоя жидкости, перпендикулярного оси тела, равна бесконечности. Поэтому изменить скорость растекания тонкого слоя можно, только приложив бесконечно большие разности давления, в то время как эта разность для тонких каверн мала, так как соответствует  $\sigma \rightarrow 0$ .

Ниже дан обзор постановок задач, приводящих к проблеме одномерных дифференциальных уравнений. О точности этих уравнений можно судить по асимптотическому решению при  $\sigma=0$  каждого из этих уравнений и степени близости этого решения к точной асимптотике [3]

$$r_p^2 = \frac{2\sqrt{c_x r_0 x_p}}{\ln^{1/2}(x_p/2\sqrt{c_x r_0})} \quad (4.1)$$

Здесь  $c_x$  — коэффициент сопротивления,  $r_0$ ,  $r_p$  — размерные радиусы кавитатора и каверны,  $x_p$  — размерная координата вдоль оси  $x$ . Ось  $x$  совпадает с осью каверны и направлена от кавитатора в сторону, противоположную его движению. При  $\sigma \rightarrow 0$  течения, близкие к течению по схеме Кирхгофа, имеют место только вблизи концов каверны, где значительны инерционные силы, и влиянием  $\sigma$  можно пренебречь.

Число кавитации  $\sigma$  и сила сопротивления, действующая на кавитатор, являются основными определяющими параметрами рассматриваемых течений. При малых  $\sigma$  справедлива приближенная зависимость между ними:

$$\pi r_{\max}^2 \sigma = c_x r_0^2 \quad (4.2)$$

Эта зависимость вытекает из предположения, что энергия, сообщенная жидкости кавитатором, равна работе против сил внешнего давления, необходимой для образования цилиндрической полости с площадью поперечного сечения, равной  $\pi r_{\max}^2$ , где  $r_{\max}$  — радиус максимального сечения каверны.

Введем безразмерные цилиндрические координаты  $x$ ,  $R$  и радиус и площадь поперечного сечения каверны, время и потенциал течения по формулам

$$x = \frac{x_p}{2\sqrt{c_x r_0}}, \quad R = \frac{R_p}{2\sqrt{c_x r_0}}, \quad r = \frac{r_p}{2\sqrt{c_x r_0}},$$

$$u = r^2, \quad t = \frac{t_p V}{2\sqrt{c_x r_0}}, \quad \Phi = \frac{\Phi_p}{2\sqrt{c_x r_0} V}$$

Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — безразмерные координаты начала и конца каверны и  $dx_1/dt = -V$ . В нестационарном течении  $V$  — скорость точки  $x_1$  в данный момент времени. В безразмерных переменных соотношения (4.1) и (4.2) примут вид

$$u = \frac{x}{\ln^{1/2} x}, \quad \sigma u_{\max} = \frac{1}{4} \quad (4.3)$$

Введем  $\varphi$  — значение потенциала  $\Phi$  на границе каверны, и углы  $\alpha$  и  $\beta$  (фиг. 4) такие, что  $\operatorname{tg} \alpha = r_x$ , а  $\beta + \frac{\pi}{2}$  — угол между осью  $x$  и вектором скорости  $V = \operatorname{grad} \Phi$ . В связи с тонкостью каверны и близким к радиальному течением жидкости углы  $\alpha$  и  $\beta$  малы. Тогда имеем еще следующие дифференциальные связи:

$$\Phi_t = \varphi_t - r_t \Phi_r, \quad V^2 = (r_t^2 + \varphi_x^2) \cos^2 \alpha \quad (4.4)$$



$$\beta = \alpha - \arccos \left( \frac{r_t}{V} \cos \alpha \right) \quad (4.5)$$

$$\Phi_x = V \sin \beta, \quad \Phi_R = V \cos \beta \quad (4.6)$$

После подстановки (4.4) в (0.2) с учетом малости  $\alpha$  и  $\beta$  получим

$$\Phi_t - \frac{1}{2} r_t^2 = \frac{\sigma}{2} \quad (4.7)$$

Правые части (4.6) на основе  $\operatorname{tg} \alpha = r_x$ , (4.4) и (4.5) выражаются через производные  $\Phi$  и  $r$ . Чтобы получить замкнутую систему дифференциальных уравнений для  $\Phi$  и  $r$ , достаточно кроме (4.7) иметь еще выражение  $\Phi_x$  или  $\Phi_R$  через  $\Phi$ ,  $r$  и их производные. Эта связь в принципе может быть получена на основе решения первого уравнения (0.1). В качестве его эквивалента может быть использовано выражение для потенциала в виде источников и стоков на оси

$$\Phi = \int_{x_1}^{\infty} \frac{q(\xi, t) d\xi}{\sqrt{(\xi-x)^2 + r^2}} \quad (4.8)$$

или полученное на основе формулы Грина [5, 12]. Получение недостающей дифференциальной связи основано на разложении подынтегральных функций в ряд Тейлора. При этом возникают либо интегралы от нечетных функций, либо расходящиеся интегралы. Главное значение этих интегралов связано с асимптотикой на концах интервала интегрирования, что позволяет эффективно их вычислять. Ниже проведено сравнение асимптотических дифференциальных уравнений для формы каверны, полученных авторами, исходя из разных предположений. Дифференциальные уравнения для формы каверны, основанные на энергетических соображениях и «принципе независимости» расширения сечений каверны [13], здесь не приводятся, так как они не являются асимптотическими (хотя с успехом и используются в расчетах). Ниже будет показано, что «принцип независимости» в точном смысле не имеет места. Первое асимптотическое уравнение было получено С. С. Григорьяном [10] в предположении, что (4.8) в главном члене совпадает с плоской асимптотикой для потенциала. Это уравнение и его асимптотика при  $\sigma=0$  имеют вид

$$\frac{1}{4} u_{tt} \ln u + \frac{1}{8} \frac{u_t^2}{u} = \frac{\sigma}{2} \quad (4.9)$$

$$u = x \ln^{1/2} x \quad (4.10)$$

В [11] был выполнен анализ (4.8) в предположении ограниченности длины каверны и ее достаточной тонкости. Оба эти предположения могут быть подвергнуты критике. Действительно, из (4.3) видно, что безразмерная толщина каверны в любой заданной точке не стремится к нулю при  $\sigma \rightarrow 0$ , а длина каверны неограниченно растет. Дифференциальное уравнение и его асимптотика при этом имеют вид

$$\frac{1}{4} u_{tt} \ln u + \frac{1}{8} \frac{u_t^2}{u} + \frac{q_0(x_0, t) |\dot{x}_0|}{|x-x_0|} = \frac{\sigma}{2} \quad (4.11)$$

$$u = x. \quad (4.12)$$

Можно показать, что (4.9) и (4.11) хорошо описывают центральные области ограниченных каверн [14, 15]. Дальнейшее уточнение оказалось

возможным на основе более точной оценки влияния концов каверны, а также на основе использования формулы Грина [5, 12]. При этом асимптотика этих уравнений совпала с точной асимптотикой (4.3). Принципиальным обстоятельством явился также отказ от прямой подстановки выражения для потенциала в (0.2), а использование одного из равенств (4.6). При использовании второго из них имеет место наибольший порядок уравнения и их наибольшая точность [12]. Система уравнений, выведенных на основе первого равенства (4.6), имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} u_{tx} \ln \frac{u}{[(x-x_1) + \sqrt{(x-x_1)^2 + 2u}]^2} - \frac{u_t}{4\sqrt{(x-x_1)^2 + 2u}} = \\ = -\frac{u_x u_t}{4u} + \varphi_x, \quad \varphi_t - \frac{1}{8} \frac{u_t^2}{u} = \frac{\sigma}{2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

В [12] показано, что произвола, имеющего место в дифференциальных уравнениях (4.14) и (4.13), достаточно, чтобы удовлетворить известным граничным условиям [4], при этом решение оказывается детерминированным.

5. В случае стационарного движения в сжимаемой жидкости известным аффинным преобразованием координат [3] волновое уравнение преобразуется в уравнение Лапласа и задача сводится к рассмотренной в п. 4. При этом дифференциальное уравнение, аналогичное (4.13), для стационарного движения в сжимаемой жидкости имеет вид

$$\frac{1}{4} u_{xx} \ln \frac{u}{[(x-x_1) + \sqrt{(x-x_1)^2 - 2u}]^2} - \frac{u_x}{4\sqrt{(x-x_1)^2 - 2u}} + \frac{1-M^2}{8} \frac{u_x^2}{u} = \frac{\sigma}{2}$$

Асимптотика этого уравнения при  $\sigma=0$  зависит от числа Маха и имеет вид

$$u = \frac{x}{(\ln x)^{1/2(1+M^2)}}$$

Этот результат отличается от [3]. В [12] указано на неточность вывода [3]. Учет изменения формы каверны при  $M \neq 0$  за счет сжимаемости может быть существенным при больших скоростях движения кавитаторов в жидкости.

Влияние сжимаемости жидкости особенно сильно проявляется при ударных процессах. В последнее время выполнены экспериментальные исследования по моделированию [16, 17] удара тела о жидкость на больших скоростях ( $M \sim 1$ ). Эти эксперименты основаны на замене жидкости моделирующей средой — жидкостью с мелкими пузырьками газа, имеющей малую скорость звука.

6. Рассмотрим течение с потенциалом [19]

$$\Phi = V(t) L \varphi(x, y, z) \quad (6.1)$$

$$x = \frac{1}{L} \left( x_p + \int_{t_0}^t V dt \right), \quad y = \frac{y_p}{L}, \quad z = \frac{z_p}{L}$$

где  $V(t)$  — скорость,  $L$  — характерный линейный размер кавитатора, имеющего заданную произвольную форму;  $x_p, y_p, z_p, x, y, z$  — соответственно размерные и безразмерные координаты. Положим

$$V(t) = \frac{CL}{\tau t + t_0} \quad (6.2)$$

где  $C, \tau, t_0$  — постоянные. Тогда, подставив (6.1) и (6.2) в исходную систему для  $\Phi$  (0.1), (0.2) и предположив, что форма каверны в системе координат  $x, y, z$  не зависит от времени, для  $\varphi$  получим

$$\Delta \varphi = 0$$

$$\begin{aligned} \text{grad } \varphi = 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\cos(nx), \quad x \in S_T, \quad x \in S_A \\ -\frac{\tau}{C} \varphi + \varphi_x + \frac{1}{2} (\text{grad } \varphi)^2 = \frac{\sigma}{2} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Таким образом, система уравнений для  $\varphi$  и формы каверны не зависит от времени и они могут быть найдены (как и предполагалось) как функции только координат.

Покажем теперь, что решение системы (6.3) может соответствовать движению кавитатора с некоторой массой  $m$  по инерции. Действительно, в связи с тем, что форма поверхности каверны не зависит от времени, на основе (6.1) и (0.2) гидродинамическую силу можно представить в виде

$$F = c_x L^2 \rho V^2 + \lambda \rho L^3 \dot{V} \quad (6.4)$$

где  $\rho L^3 \lambda > 0$  — присоединенная масса кавитатора,  $c_x$  — коэффициент сопротивления при стационарном обтекании кавитатора. Коэффициенты  $c_x > 0$  и  $\lambda > 0$  зависят от геометрии кавитатора и постоянных  $L$ ,  $C$ ,  $\tau$ ,  $\sigma$ , определяющих решение системы (6.3).

Учитывая большие скорости, положим  $\sigma = 0$ ; получим тогда из соображений размерности  $c_x = c_x(C, \tau)$ ,  $\lambda = \lambda(C, \tau)$ . Используя (6.2) и уравнение движения  $F = m\dot{V}$ , исключим  $V$ ,  $\dot{V}$  и  $F$  из (6.4):

$$\frac{m}{\rho L^3} = \frac{c_x C}{\tau} - \lambda \quad (6.5)$$

Таким образом, при заданных постоянных имеем движение кавитатора по инерции с массой, удовлетворяющей (6.5). При  $m = \infty$  имеем установившееся движение со скоростью  $L/t_0$ .

Нетрудно видеть, что при законе движения (6.2) при  $t \rightarrow \infty$  путь, пройденный кавитатором, как угодно велик. Поэтому решение системы (6.3) является асимптотическим. Структура решения (6.1) показывает, что оно автомодельно. Автомодельность можно было бы получить из соображений размерности. Так как начальные данные несущественны, а закон торможения определяется только постоянными  $m$ ,  $\rho$  и  $L$ , которые не содержат времени ( $t_0$  при  $\tau \neq 0$  и  $t \rightarrow \infty$  несущественно).

Если для решения рассмотренной автомодельной нестационарной задачи воспользоваться результатами п. 4, то для формы каверны получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} u_{xx} \ln \frac{u}{x^2} - \frac{u_x}{4x} + \frac{C u_x^2}{4u} = \varphi_x \\ -\frac{\tau}{C} \varphi + \varphi_x + \frac{1}{8} \frac{u_x^2}{u} = 0 \end{aligned}$$

Так как  $x$  зависит от неподвижной координаты  $x_p$  и времени  $t$ , то, имея асимптотику этой системы от  $x$ , получим асимптотику, соответствующую  $x_p \rightarrow \infty$  при фиксированном  $t$ , или асимптотику, соответствующую расширению каверны в фиксированном сечении  $x_p$  при  $t \rightarrow \infty$ . В отличие от стационарного течения эти асимптотики существенно различны и имеют

<sup>2</sup> Пример, когда одновременно имеет место автомодельность типа  $r/t$  и приближенная математическая постановка приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению для формы свободной поверхности, рассмотрен в [18].

вид

$$u = \frac{x_p}{(\ln x_p)^{1-c}}, \quad u = \frac{\ln t}{(\ln \ln t)^{1-c}}$$

Отличие последней асимптотики от (4.1), а также наличие в системе (4.13) членов, содержащих явную зависимость от расстояния  $(x-x_1)$ , показывает на неприменимость «принципа независимости» расширения сечения каверны, предложенного в [13] при малых  $\sigma$ , так как этот принцип предусматривает универсальный закон расширения сечения каверны при фиксированном  $x$  и заданном  $\sigma$ .

7. Струйные автомодельные течения рассмотрены в [1, 6]. Эти течения связаны с отсутствием в задаче характерного линейного размера. В п. 6 рассмотрено автомодельное течение, содержащее линейный размер, характеризующий кавитатор. Однако наличие кавитатора не обязательно. Действительно, из (6.5) следует, что найдется достаточно большое значение  $\tau$ , при котором масса кавитатора заданной формы и, следовательно  $\lambda$ , равны нулю. Отсюда можно сделать вывод о наличии течений, в которых кавитатор отсутствует.

Например, если по полубесконечному жидкому цилиндру нанести удар по торцу, то по нему пойдет возмущение, разбрызгивающее жидкость. При  $t \rightarrow \infty$  существенными параметрами будут только  $L$  — характерный размер цилиндрической поверхности и  $\rho$ . Таким образом, получим в пределе автомодельное течение того же типа, что и рассмотренные в предыдущем пункте. Геометрия возмущения при этом зависит только от начальной формы цилиндрической поверхности.

Наличие этих автомодельных течений существенно упрощает анализ некоторых задач. Например, при сильном возмущении поверхности жидкости, налитой в виде слоя над плоским дном (плоская задача), может иметь место автомодельное течение, соответствующее, например, сильному взрыву [1] (закон роста поверхности  $r \sim t^{2/(2+\nu)}$ ,  $\nu=2$ ), автомодельному погружению клина [1, 13] ( $r \sim t$ ), автомодельному обтеканию края пластины [6] ( $r \sim t^{2/3}$ ) с геометрическим подобием формы свободной поверхности, или вообще неавтомодельное течение. Геометрическое подобие этих течений (если была автомодельность) вследствие влияния конечной глубины сначала нарушится, а затем выйдет на течение с постоянной геометрией, рассмотренное выше. Если в дальнейшем начинает играть роль сила тяжести, то получающаяся при этом волновая картина будет всегда одна и та же, так как из параметров  $\rho$ ,  $L$ ,  $g$  нельзя образовать безразмерную комбинацию. Таким образом, независимо от способа и интенсивности (если она достаточно велика) начального возмущения волновая картина будет всегда одна и та же.

Рассмотренная автомодельная постановка будет иметь место также при совместном движении жидкостей, имеющих разные плотности, движении кавитатора или нескольких кавитаторов в ограниченном слое жидкости, движении кавитатора с разгоном в соответствии с (6.2), при движении по спирали или с угловой скоростью и т. д. [19].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1972. 440 с.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Гостехиздат, 1948. 535 с.
3. Гиревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Физматгиз, 1961, с. 152, 445, 458.
4. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М.: Мир, 1964, с. 28, 123.
5. Якимов Ю. Л. К постановке задачи о движении тела в воде.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 5, с. 19—26.
6. Якимов Ю. Л. Влияние атмосферы при падении тел в воду.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 5, с. 3—6.
7. Валедицкий Р. А., Якимов Ю. Л. Кавитационные процессы при вертикальном входе тел в воду и их моделирование.— В кн.: Избранные проблемы прикладной механики. М., 1974, с. 195—200.
8. Якимов Ю. Л. О силе, действующей на тело, движущееся в воде, при наличии уноса газа.— Науч. тр. Ин-та мех. МГУ, 1974, № 32, с. 185—189.
9. Якимов Ю. Л. Явление аномального сопротивления трения в смеси жидкости с пузырьками газа.— В кн.: Избранные вопросы современной механики. М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 111—114.
10. Григорян С. С. Приближенное решение задачи об отрывном обтекании осесимметричного тела.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 5, с. 951—953.

11. Якимов Ю. Л. Об осесимметричном срывном обтекании тела вращения при малых числах кавитации.— ПММ, 1968, т. 32, вып. 3, с. 499—501.
12. Якимов Ю. Л. Асимптотические законы вырождения формы тонких каверн.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 3, с. 3—10.
13. Логвинович Г. В. Гидродинамика течений со свободными границами. Киев: Наукова думка, 1969, с. 128.
14. Логвинович Г. В. Вопросы теории тонких осесимметричных каверн.— Тр. ЦАГИ, 1976, вып. 1797, с. 3—17.
15. Парышев Э. В., Рыков В. Н. Проверка применимости одного метода расчета каверн к задаче Рябушинского для конусов.— Тр. ЦАГИ, 1976, вып. 1797, с. 18—25.
16. Якимов Ю. Л., Ерошин В. А., Романенков Н. И. Моделирование движения тела в воде с учетом ее сжимаемости.— В кн.: Некоторые вопросы механики сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 29—33.
17. Ерошин В. А., Романенков Н. И., Серебряков И. В., Якимов Ю. Л. Гидродинамические силы при ударе тупых тел о поверхность сжимаемой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 6, с. 44—51.
18. Якимов Ю. Л. О неустановившихся движениях несжимаемой жидкости в узких областях.— Докл. АН СССР, 1957, т. 115, № 6, с. 1080—1083.
19. Якимов Ю. Л. Поступательные струйные автомоделльные течения несжимаемой жидкости.— Докл. АН СССР, 1981, т. 261, № 5, с. 1074—1078.