

УДК 532.517.4

ТУРБУЛЕНТНЫЕ ОТРЫВНЫЕ ТЕЧЕНИЯ¹

ГОГИШ Л. В., СТЕПАНОВ Г. Ю.

Турбулентные отрывные течения образуются при движении различных объектов в океане и в атмосфере, а также при обтекании жидкостью и газом элементов земного рельефа, технических сооружений и устройств. Поэтому круг задач турбулентных отрывных течений охватывает весь диапазон скоростей движения сплошной среды при таком разнообразии граничных условий, что формы, свойства и проявления турбулентного отрыва оказываются неисчерпаемыми.

Цель настоящей работы состоит в обсуждении имеющихся результатов и возможностей дальнейшего развития различных расчетных моделей турбулентных отрывных течений. Приводимая ниже довольно условная классификация таких расчетных моделей отражает в основном последовательность их исторического развития.

1. Методы теории двумерных турбулентных отрывных течений. Хотя речь будет идти о более изученных двумерных и в основном стационарных отрывных течениях, в действительности, как показывают наблюдения, таких течений в природе не существует, и поэтому все их расчетные модели являются сугубо феноменологическими.

К *приближенным методам* можно отнести методы, использующие известную схему разделяющей линии тока [1], а также методы, содержащие различные эмпирические зависимости частного характера [2]. Схема разделяющей линии тока основана на рассмотрении локальных условий присоединения средней линии тока постоянной массы в критической точке следа. Другие способы расчета характерных параметров области отрыва обычно используют интегральные уравнения сохранения, применяемые к контрольной поверхности, охватывающей область отрыва, и дополнительные эмпирические соотношения, характеризующие, например, эжекцию (захват массы, импульса и энергии) в эту область. В настоящее время возможности этих методов ясны и, сохраняя полезность для расчетных оценок простых форм отрыва, они уже уступают место более полным расчетным моделям (см. обзор [3]).

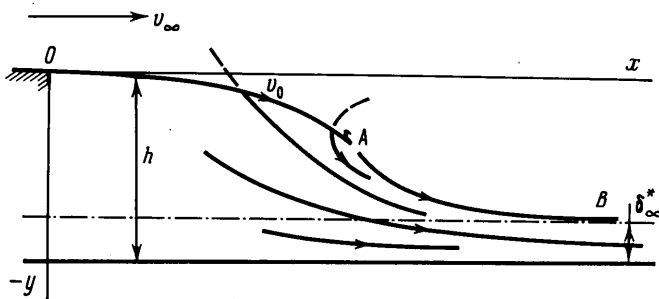
Модели течений невязкой жидкости обычно вводились как предположительно предельные для больших чисел $Re \rightarrow \infty$. Правильнее рассматривать их как модели «внешнего» течения, которые в полной задаче отрывного течения вязкой жидкости срачиваются в асимптотическом смысле с внутренними решениями для турбулентного потока вблизи поверхности тела и в следе за ним.

Более подробно эти модели обсуждаются ниже. Отметим сразу новое направление численного исследования отрывных течений с помощью различных разностных методов решения уравнений Эйлера, в которых за счет схемной вязкости получают пограничные слои, вихревые отрывные зоны и следы, качественно соответствующие экспериментам [4].

Модели вязко-невязкого взаимодействия основаны на совместном расчете внешнего невязкого потока вокруг полубесконечного «тела вытеснения» и внутреннего турбулентного течения в пограничном слое, зоне отрыва и ближнем следе за реальным телом. Внешний поток рассчитывается либо путем решения соответствующей краевой задачи, либо современными численными методами. Расчет турбулентного течения, основанный на уравнениях типа пограничного слоя, производится либо численно, либо с помощью локально-подобных решений, либо с помощью более простых полуэмпирических методов теории турбулентных струй и следов. В последнем случае диссипативная область течения априорно разделяется на характерные подобласти течений более простого вида, между которыми формулируются условия сшивки.

Численные методы для уравнений типа Навье – Стокса основываются на замыкании уравнений движения с помощью различных моделей турбулентности, как традиционных равновесных (алгебраических) моделях типа пути смешения, так и более сложных неравновесных (дифференциальных) моделях для различных параметров

¹ Доклад на V Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике. Алма-Ата, 1981.



Фиг. 1

турбулентности, которые заимствуются из более простых турбулентных течений в слоях и струях.

Наконец, *асимптотические методы* расчета турбулентного отрыва, в отличие от ламинарных течений, развиты пока еще слабо, что объясняется отсутствием обоснованных моделей турбулентности для отрывных (сдвиговых) течений. Обзор некоторых работ в этом направлении дан в [5].

Отметим ряд принципиальных моментов, связанных с традиционными направлениями и их развитием. Первые наиболее простые стационарные модели невязкой несжимаемой жидкости, содержащие присоединенные к телу источники и вихри, имели целью получить более близкое к действительности распределение скорости на безотрывно обтекаемой части поверхности и картину линий тока в области отрыва (Жуковский, Паркинсон – Лагалли, Фешль, Руа и др.). Их недостатком служит отсутствие силы сопротивления для течения в целом. Наиболее интересной схемой такого рода является вихрепотенциальная модель с присоединенными к кормовой части тела двумя стационарными областями постоянной завихренности и конечным давлением. Эта схема может служить основой для построения глобального асимптотического решения стационарного отрывного обтекания тела при $Re \rightarrow \infty$ при дополнительном учете конечной толщины вытеснения следа, равной на бесконечности $\delta_{\infty}^* = C_x L / 2$.

Традиционные струйные (кавитационные) модели, в которых хотя бы на одном участке границы давление строго постоянно, дают правильные значения силы сопротивления в зависимости от коэффициента донного давления и априорного положения сечения отрыва. Эти схемы, отличающиеся способом замыкания каверны (Кирхгофа – Гельмгольца, Рябушинского, Жуковского – Рощко, Кузнецова, Чаплыгина, Тулина, Эфроса, Лаврентьева и др.), подробно рассмотрены в книге [6]. Все они, однако, дают неправильное описание течения в области замыкания каверны. Исходя из модели вязко-невязкого взаимодействия, каверну следует замыкать на полубесконечное тело вытеснения. В качестве примера более простой струйной схемы, свободной от указанного недостатка, на фиг. 1 для примера обтекания уступа дается схема замыкания каверны фиктивной струей от источника, расположенного на бесконечнолистной поверхности. На участке OA скорость и давление постоянны, на границе струи AB скорость монотонно уменьшается от v_0 до v_{∞} . Течение в физической плоскости определяется квадратурой

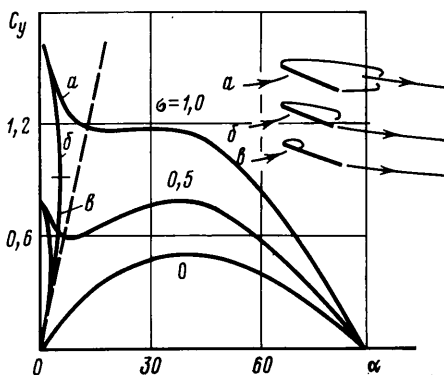
$$z = -\frac{2h \operatorname{sh} p}{\pi} \int \frac{\zeta}{e^{\zeta}} \frac{\theta_0^2 + \zeta_0^2}{\zeta^2 - p^2} d\zeta, \quad p = \ln \frac{v_0}{v_{\infty}}, \quad \zeta = \ln \frac{v}{v_{\infty}} - i\theta$$

На фиг. 2 в рамках модели Тулина – Терентьева демонстрируется общее свойство отрывных течений – многозначность их решений. Здесь представлена зависимость коэффициента подъемной силы пластинки от угла атаки $C_y(\alpha)$ при различных числах кавитации $\sigma = 2(p_{\infty} - p_0) / \rho U_{\infty}^2$, построенная по результатам расчетов А. Г. Терентьева из [6]. Схема *a* относится к течению с суперкавитацией, схемы *b* и *в* – к течениям с частичной кавитацией соответственно с длинной и короткой кавернами. Штриховая линия соответствует формуле Кутта – Жуковского для безотрывного обтекания пластинки.

Нестационарная вихревая модель невязкой жидкости, начало которой идет от моделей вихревой дорожки Кармана и вихревой пелены за крылом конечного размаха, дает удовлетворительную величину нестационарной силы сопротивления. Широкое распространение получили метод дискретных вихрей [7], а также методы школы А. А. Никольского [8, 9], посредством которых определены коэффициенты сопротивления и нестационарные параметры, характеризующие воздействие потока на пластины и тела конечной толщины. Меньшее внимание до сих пор уделялось

анализу вихревых следов за телами, которые, как и вихревую дорожку Кармана, можно считать моделью двумерной, незатухающей, крупномасштабной турбулентности ближнего следа. Представляет интерес сравнение расчетных параметров этих крупномасштабных пульсаций с экспериментальными данными по касательным и нормальным напряжениям Рейнольдса, интегральному масштабу и спектральным характеристикам турбулентности в ближнем следе.

2. Локальная модель отрыва турбулентного пограничного слоя при $Re \rightarrow \infty$. Аналогично тому, как это делается в классической теории пограничного слоя, оценки основных параметров области формирования отрыва турбулентного пограничного слоя можно получить из наводящих физических соображений. Предполагается, что при $Re \rightarrow \infty$ в области формирования отрыва малой длины $l \ll L$ происходит малое повышение давления $\Delta p \ll \rho U_\infty^2$ при большом градиенте давления $dp/dx \approx \Delta p/l \gg \rho U_\infty^2/L$. Предполагается, что отрыв возникает во внутренней ламинарной области пограничного слоя толщиной $\delta_1 \ll \delta$, сжимаемостью газа в которой можно пренебречь, так что $u_1 \delta_1 / \nu_1 < \alpha$, $u_1 / a_1 \ll 1$. Во внешней части пограничного слоя $\delta - \delta_1$ пренебрегается влиянием вязкости. Тогда из оценки членов уравнений движения с учетом связи между приращением толщины вытеснения $\Delta \delta^*$ и повышением давления Δp в области формирования отрыва, даваемой линейной теорией внешнего невязкого потока, получаются известные оценки



Фиг. 2

$$\frac{\Delta p}{\rho U_\infty^2} \sim \frac{\xi^{1/2}}{|M^2 - 1|^{1/4}} \left[\sim \frac{\xi^{2/5}}{(\gamma + 1)^{1/5} M^{2/5}} \right] (\sim (\gamma + 1)^{1/5} \xi^{2/5}) \quad (2.1)$$

$$\frac{l}{L} \sim \frac{(T_w/T_\infty)^{(2n+1)/2}}{|M^2 - 1|^{3/4} \xi^{2/4} Re} \left[\sim \frac{(T_w/T_\infty)^{(2n+1)/2}}{(\gamma + 1)^{2/10} M^{2/5} \xi^{1/5} Re} \right] \quad (2.2)$$

где $\xi = c_{f0}(M, Re, T_w/T_\infty \dots)/2$ — коэффициент трения невозмущенного пограничного слоя перед областью формирования отрыва, $n \approx 0,76$ — показатель степени в зависимости вязкости от температуры, γ — показатель адиабаты, T_w — температура стенки. В квадратных скобках оценки для околозвуковых скоростей, в круглых скобках — для гиперзвуковых скоростей. Расчетная зависимость критического отношения давления для развитого отрыва турбулентного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке $p_2/p_1(M_1, T_w/T_\infty, \gamma)$ удовлетворительно совпадает с экспериментальными данными при значении эмпирического коэффициента пропорциональности в формуле (2.1); равном 5 ([10], рис. 1.18).

Отметим, что при $M > 1$ в соответствии с эмпирически подтверждаемым предположением о наличии универсальной зависимости $(p - p_\infty)/(p_{max} - p_\infty) = f(x/l)$ формула (2.1) с точностью до эмпирических постоянных определяет различные характерные давления отрыва: условия зарождающегося отрыва, условия перехода от сверхкритического к докритическому течению в пограничном слое, давление в критической точке, давление плато. Длина области формирования отрыва (2.2) по сравнению с характерными размерами течения при $M > 1$ оказывается пренебрежимо малой. Однако при $M < 1$ и в предельном случае течения несжимаемой жидкости

физическая картина явления отрыва оказывается совершенно иной. Передача возмущений вверх по потоку существенно изменяет структуру турбулентного пограничного слоя, в котором возникают пульсационные возвратные течения, характеризуемые коэффициентом перемежаемости. В связи с этим обычно выделяют сечение перемежающегося отрыва, за которым располагается значительная область развития отрыва вплоть до его установившегося в среднем состояния, когда коэффициент перемежаемости равен $1/2$. С этим связаны, во-первых, неопределенность величины ξ перед отрывом и, во-вторых, конечная длина l области формирования отрыва, соответствующая расстоянию, на котором коэффициент перемежаемости у стенки уменьшается до $1/2$. Ограничиваясь случаем несжимаемой жидкости, $M=0$, и исключая неопределенную малую величину ξ из формул (2.1) и (2.2), можно получить связь характерной длины области формирования отрыва l и перепада давления в ней Δp

$$(\Delta p/\rho U^2)^{1/2} \text{Re } l/L = k_i \quad (2.3)$$

Другое независимое соотношение между Δp и l при $\text{Re} \rightarrow \infty$ и $\xi \rightarrow 0$ получается из анализа размерностей параметров, определяющих локальный отрыв [11]

$$(\Delta p/\rho U^2) \delta_*^*/l = k_p \quad (2.4)$$

Индекс s относится здесь к сечению перемежающегося отрыва. Обозначая угол отрыва $\theta = \Delta \delta^*/l$, в соответствии с линейной теорией внешнего потока

$$\theta (\Delta p/\rho U^2)^{-1} = k_\theta \quad (2.5)$$

Оценка численных значений эмпирических констант из наиболее представительных измерений [12] дает $k_i = 7 \cdot 10^2$, $k_p = 9 \cdot 10^{-2}$, $k_\theta \approx 1$.

3. Турбулентное отрывное обтекание тел несжимаемой жидкостью. Отрывным течениям несжимаемой жидкости при больших числах Re посвящено относительно меньшее число работ, чем в случае сверхзвуковых скоростей, причем постановка и решение соответствующих задач взаимодействия оказываются более сложными. Ниже на нескольких примерах поясняются физические и математические аспекты применения метода вязко-невязкого взаимодействия для расчета осредненного турбулентного отрывного обтекания различных тел потоком несжимаемой жидкости. Для простоты предполагается, что весь безотрывный пограничный слой на теле, начиная от передней критической точки, является турбулентным. Для описания внешнего потенциального потока используется точное решение соответствующей краевой задачи. В диссипативной области течение априори разбивается на безотрывный пограничный слой, область формирования отрыва, изобарическую отрывную область смещения, ближний и дальний следы.

При симметричном обтекании профиля, фиг. 3, на границе потенциального потока на теле вытеснения $y + \delta^*(x)$ в продольном направлении выделяется область I слабого взаимодействия (безотрывная часть профиля), $-\infty < x \leq s$, где задан угол наклона тела вытеснения $\theta(x) = d\delta^*/dx$; область II сильного взаимодействия (область отрыва и ближний след), $a \leq x \leq b$, где задано распределение скорости $\ln V(x)$; область III слабого взаимодействия (дальний след), $b \leq x < \infty$, где задан угол наклона тела вытеснения $\theta = 0$. Возмущенное течение на теле вытеснения рассматривается относительно невозмущенного на действительном профиле с помощью функции $W - i\Theta$, где $W = \ln V/v$, $\Theta = \theta - \vartheta$ ($v = u/u_\infty$ — скорость на действительном профиле, ϑ — угол его наклона). В предположении малости углов θ , ϑ и Θ граничные условия для потенциального потока линеаризуются

и сносятся на ось x полуплоскости $y \geq 0$. Тогда по формуле Келдыша — Седова в области I и II соответственно имеем

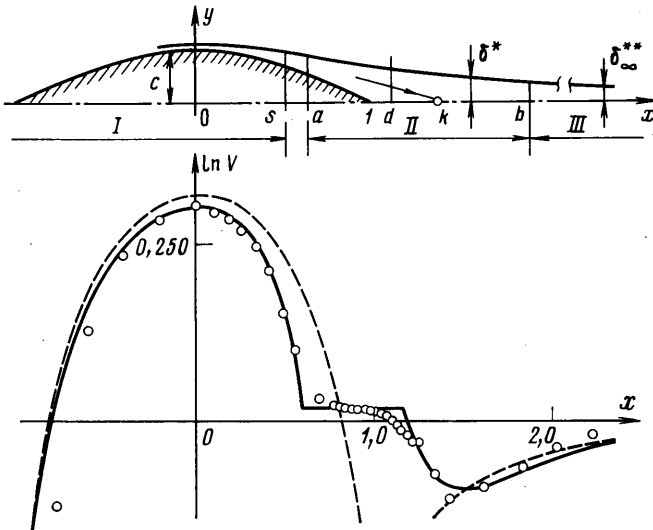
$$W = -\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1+e}{e}} \int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}} \frac{W}{t+e} dt; \quad e = \frac{a-x}{b-a}; \quad t = \frac{a-\xi}{b-a} \quad (3.1)$$

$$\Theta = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1-e}{e}} \int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}} \frac{W}{t-e} dt; \quad e = \frac{x-a}{b-a}; \quad t = \frac{\xi-a}{b-a} \quad (3.2)$$

Для устранения особенности функций W и Θ в точке $e=0$ ($x=a$) вводится дополнительное локальное условие

$$\int_0^1 \frac{W dt}{\sqrt{(1-t)t}} = 0$$

которое служит для определения величины W_a (коэффициента давления в изобарической донной области), в то время как конечное значение Θ_a определяется из формулы (2.5) модели локального отрыва; $l=a-s$.



Фиг. 3

В изобарической области принимается постоянный коэффициент смешения

$$K = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \rho u dy$$

значение которого для развитой донной области берется таким же, как и для автомодельного слоя смешения затопленной струи [13] $K=0,135$, а для более сложных случаев подбирается из условия совпадения с экспериментальными данными. В ближнем следе, как в теории турбулентных струй и следов, принимается однопараметрический профиль скорости

$V/V_0=f(y/\delta, m)$, и течение описывается двумя простейшими уравнениями импульсов для следа и вдоль его оси, а также уравнением взаимодействия

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \delta^{**}}{dx} + (2+H) \frac{d \ln V_0}{dx} = 0; \quad H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} \\ \rho V_0 \frac{dV_0}{dx} + \frac{dp}{dx} = \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)_0; \quad \frac{d\delta^*}{dx} = \Theta \end{aligned} \quad (3.3)$$

В качестве простейшей модели турбулентности используется обычная формула Прандтля, содержащая еще одну эмпирическую постоянную

$$\tau = \rho \nu_t \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \nu_t = \kappa \delta (V_0 - V_0)$$

Таким образом, для четырех неизвестных функций x в области сильного взаимодействия II (V, Θ, δ^*, m) получается система четырех интегродифференциальных уравнений (3.2) и (3.3), решение которой находится методом итераций. Начальная толщина пограничного слоя в сечении $x=s$ находится обычным расчетом пограничного слоя на передней части профиля, распределение давлений на которой дается формулой (3.1). Сшивка изобарической области смещения с ближним следом производится из условия непрерывности интегральных толщин диссипативной области δ^* и δ^{**} .

На графике фиг. 3 показано расчетное распределение скорости $\ln V(x)$ на поверхности отрывного обтекаемого профиля (дужки круга с относительной толщиной 30%) при числе $Re=10^6$, штриховой линией — распределение скорости $\ln v(x)$ при его потенциальном обтекании. Точками показаны экспериментальные данные, полученные при продувке расположенной на пластине дужки круга. Расчетные зависимости коэффициента профильного сопротивления $C_x=2\delta_{\infty}^*$ от относительной толщины профиля $c \leq 0,35$ при $Re=10^6-10^8$ также удовлетворительно совпадают с экспериментальными данными ([10], рис. 5.31).

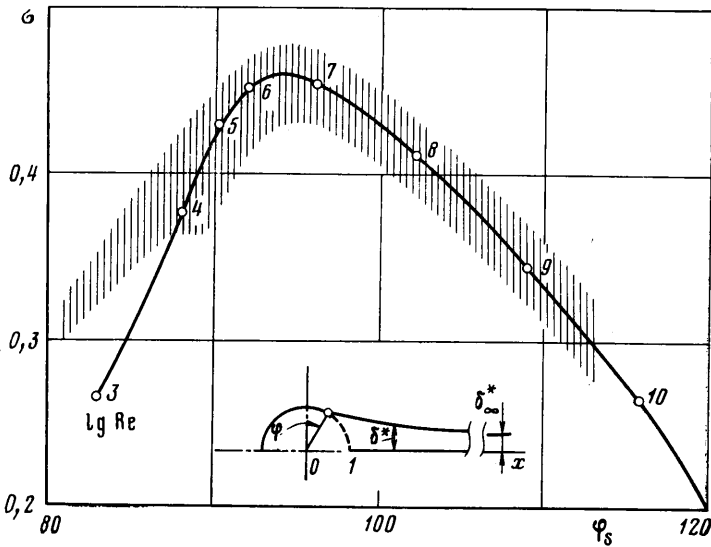
Следующая задача о стабилизированном отрывном обтекании цилиндра, или цилиндра с разделительной пластиной в следе, отличается от рассмотренной выше только тем, что линейаризация граничных условий здесь невозможна и для применения формулы Келдыша — Седова внешность тела вытеснения из физической плоскости $z=x+iy$ необходимо конформно отобразить на полуплоскость $\eta \geq 0$ параметрического переменного $\zeta = \xi + i\eta$. Для этой цели целесообразно применить простой и общий прием, который состоит в построении модельного тела вытеснения, относительно которого можно линейаризовать граничные условия для действительного тела вытеснения. В рассматриваемом случае модельное тело вытеснения было построено по способу наложения особенностей, сосредоточенных в начале координат, с комплексным потенциалом

$$w(z) = \varphi + i\psi = z + \frac{Q}{2\pi} \ln z + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \dots + \frac{C_n}{z^n} + C_0$$

Из условий симметрии течения $\varphi(y) = \varphi(-y)$, условий в критической и верхней точках контура и в следе $z \rightarrow \infty$ ($y = \delta_{\infty}^*$) получаются явные выражения для контура модельного тела $y(x)$, скорости $v(x)$ и потенциала скоростей $\varphi(x)$ вдоль него ($n=4$). Конформное отображение границы потенциального потока на ось $\xi: \xi(x) = \varphi(x) - \varphi(-1)$ в линейном приближении справедливо и для действительного тела вытеснения, которое стро-

ится итерациями с помощью формулы Келдыша — Седова, с учетом вязко-невязкого взаимодействия и наличия изобарической донной области.

На фиг. 4 приведены результаты расчета коэффициента донного давления за цилиндром с разделительной пластиной в зависимости от угла отрыва потока φ_s . Точками отмечены расчетные значения числа $Re = 10^3 - 10^{10}$. Для сравнения заштрихованной полосой нанесены экспериментальные данные, полученные в работе [14] при исследовании в аэродинамической трубе полуцилиндра, расположенного на пластине.



Фиг. 4

Задача о воздействии разделительной пластины, расположенной в плоскости симметрии следа, на характер отрывного обтекания тела еще не имеет достаточно полного решения. Ниже этот вопрос рассматривается на примере осредненного турбулентного отрывного обтекания кромки. На фиг. 5 заштрихованной полосой показано экспериментальное распределение осредненной скорости вдоль ближнего следа (на границе тела вытеснения) за прямоугольной кромкой при наличии разделительной пластины (обтекание ступеньки) (а) и точками — при ее отсутствии (симметричное обтекание кромки) (б) [15]. Существенное различие этих данных можно предположительно объяснить влиянием разделительной пластины на величину нормальных рейнولدсовых напряжений $\langle u'^2 \rangle$, $\langle v'^2 \rangle$. В приближении пограничного слоя, нормальные и касательные напряжения в котором имеют один порядок величины, уравнения импульсов для следа и вдоль его оси, а также поперечное уравнение импульсов будут

$$\frac{d \ln \delta^{**}}{dx} + (2+N) \frac{d \ln u_\delta}{dx} + \frac{d \ln(1-\Phi)}{dx} = 0$$

$$\rho u_0 \frac{du_0}{dx} + \frac{dp_\delta}{dx} + \rho \frac{dt_0}{dx} = \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)_0 \quad (3.4)$$

$$p_\delta = p_0 + \rho \langle v'^2 \rangle$$

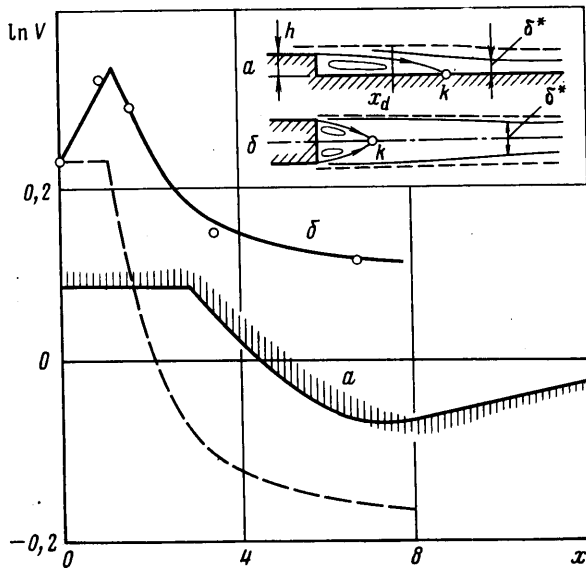
$$N = \frac{H}{1-\Phi}, \quad \Phi = \left(\frac{u_d}{u_\delta} \right)^2 \frac{T}{H}, \quad H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}$$

$$T = \int_0^1 \frac{\langle u'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle}{u_d^2} d\eta, \quad t_0 = \frac{\langle u_0'^2 \rangle - \langle v_0'^2 \rangle}{u_d^2}$$

Здесь индексы 0 и δ относятся к параметрам на оси следа и на его внешней границе, индекс d — к параметрам донной области. При $T=t_0=0$ уравнения (3.4) переходят в обычные уравнения следа (3.3). Из общих соображений с характере осредненного течения в ближнем следе нормальные реинольдсовы напряжения могут зависеть от двух характерных масштабов длины — длины циркуляционной части следа x_h и длины диффузорной части следа x_m . Простейшие феноменологические зависимости соответствуют линейному росту нормальных напряжений вдоль оси ближнего следа при $x \leq x_h$, их постоянному значению при $x_h \leq x \leq x_m$ и, наконец, затуханию по закону дальнего следа при $x > x_m$

x	t_0	T
$0 \leq x \leq x_h$	$-\alpha x$	$-\beta$
$x_h \leq x \leq x_m$	$-\alpha x_h$	$-\beta x_h$
$x_m \leq x$	$-\alpha x_h x_m / x$	$-\beta x_h x_m / x$

Если описание внешнего потенциального потока и структуру диссипативного течения, состоящего из изобарической донной области и ближнего следа, оставить без

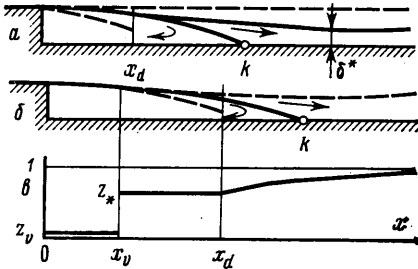


Фиг. 5

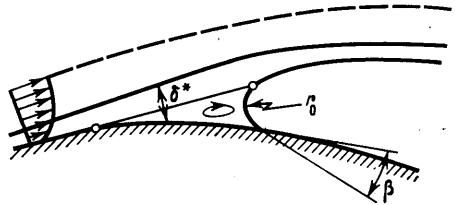
изменения, то расчетные результаты удовлетворительно описывают экспериментальные данные по давлению на оси следа при значениях эмпирических постоянных $\alpha=0,1$ и $\beta=0,04$ при отсутствии разделительной пластины и $\alpha=\beta=0$ при ее наличии. (Штриховая кривая на графике фиг. 5 соответствует расчетной скорости на границе тела вытеснения.)

4. Турбулентный отрыв и кавитация. Возникновение и развитие гидродинамической кавитации тесно связано с явлением турбулентного отрывного течения несжимаемой жидкости, усложненным наличием двухфазного течения парожидкостной смеси в диссипативной области. До сих пор эти явления рассматривали отдельно, однако уже сейчас можно предложить их единые расчетные модели. Ниже в качестве простейшего примера рассматривается простейшая квазигомогенная модель отрыва и кавитации, в которой двухфазность потока учитывается только изменением средней плотности среды. На фиг. 6 изображены схемы осредненного отрывного обтекания уступа для случаев отсутствия кавитации и ее начальной стадии (а) и развитой кавитации (б), когда за уступом имеется устойчивая граница раздела между потенциальным потоком жидко-

сти и паром. На графике (в) указано соответствующее распределение относительной плотности $z = \rho / \rho_\infty$ донной среды и следа, осредненной поперек диссипативной области. Различие схем (а) и (б) связано с распределением плотности в изобарической донной области. В начальной стадии кавитации относительная плотность донной среды $z_d = \rho_d / \rho_\infty$ (ρ_∞ — плотность жидкости, ρ_d — осредненная плотность двухфазной среды в донной области, представляющей собой жидкость с пузырьками газа, пену или пульсирующую возвратную струйку). Устойчивая граница раздела между донной средой и внешним потенциальным потоком отсутствует, и вместо нее рассматривается турбулентный слой смешения, средняя плотность которого принимается равной $z = (1 + z_d) / 2$.



Фиг. 6



Фиг. 7

При некотором критическом значении плотности донной среды $z_* < 1$ происходит переход к развитой кавитации. В этом случае начальная часть изобарической донной области вплоть до сечения $x = x_v$ занята паровой фазой с известной плотностью $z_v \ll 1$, которая отделена от внешнего потока устойчивой границей раздела. В концевой части изобарической донной области, $x_v \leq x \leq x_d$, плотность донной среды равна предположительно z_* . Сечение $x = x_v$ является осредненной по времени идеализированной границей скачкообразного изменения плотности среды в донной области. В этом случае начало турбулентного слоя смешения смещено в это сечение x_v . Ближний кавитационный след описывается обычными уравнениями следа (3.3), в которых, однако, следует учитывать его переменную плотность $z(x)$, а также дополнительным уравнением для этого параметра. В качестве самого простого можно использовать, например, уравнение релаксационного типа

$$\frac{dz}{dx} = \frac{(1-z)}{L},$$

содержащее еще одну эмпирическую по-

стоянную L — масштаб релаксации плотности. Начальные условия ближнего следа определяются, как обычно, условиями сшивки с течением смешения в изобарической донной области, а также плотностью донной среды z_d . Внешнее решение для потенциального потока дается формулой Кельдыша — Седова. Полное решение задачи об отрывном и кавитационном обтекании тела зависит от единственного свободного параметра — плотности донной среды $z_* \leq z_d \leq 1$, который учитывает реальные свойства жидкости и величину газосодержания: $z_d = z_d(W, Q, \sigma, Re \dots)$, где $W = \gamma / (l \rho U_\infty^2)$ — число Вебера, Q — относительное газосодержание, σ — число кавитации. Последняя зависимость в настоящее время может быть построена только на основании опытных данных.

Предполагаемая расчетная модель турбулентного отрыва и кавитации позволяет определить, в частности, зависимость осредненного донного давления C_{pd} от чисел кавитации σ и Re в начальной стадии кавитации, реаль-

ную длину устойчивой каверны x_0 при развитой кавитации, а также оценить дальное действие кавитационных следов при внешнем обтекании тела и в различных технических устройствах.

Как отмечено в ряде работ, капиллярность жидкости при наличии развитой кавитации может заметно влиять на условия отрыва пограничного слоя. Схема течения на фиг. 7 поясняет условия отрыва пограничного слоя перед развитой каверной с заданной величиной краевого угла β . Если условно постоянный радиус кривизны передней границы каверны обозначить r_0 , то коэффициент давления на теле перед каверной (за областью отрыва пограничного слоя) $C_p = 2(p - p_\infty) / \rho U_\infty^2$ определится из условия равновесия границы каверны под действием сил давления и поверхностного натяжения $C_p + \sigma$. Учет относительного разрежения перед каверной позволяет, как показано Э. Л. Амроминым и А. И. Ивановым, получить удовлетворительное согласование расчетного и экспериментального положений точки отрыва на гладком теле при наличии развитой кавитации.

5. Численные исследования отрывных течений с использованием различных моделей турбулентности. С учетом возможностей современных ЭВМ такой подход представляется наиболее естественным, в связи с чем обсуждалась даже возможность замены аэродинамического эксперимента численным. Отметим в этой связи два обстоятельства. Во-первых, ввиду сложности уравнений движения вязкой жидкости на результаты их численного решения сказывается влияние способов вычислений, которое в то же время бывает трудно обнаружить. Поэтому выбор численного метода определяет *вычислительную* модель со своими параметрами и свойствами, иногда существенно отличающимися не только от реального явления, но и от исходной математической модели. Во-вторых, современные полуэмпирические теории турбулентности еще не полностью учитывают реальные свойства турбулентных отрывных течений, связанных с наличием пространственных крупномасштабных структур течения, влиянием низкочастотных пульсаций на микроструктуру турбулентности и др.

Ниже рассматриваются некоторые результаты применения одной из современных моделей турбулентности (их обзор дан в работе [16]) для расчета плоских турбулентных отрывных течений несжимаемой жидкости. Исходные уравнения движения, замкнутые с помощью двухпараметрической $k-\varepsilon$ модели турбулентности Лаундера — Сполдинга [17], имеют вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\nu_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]$$

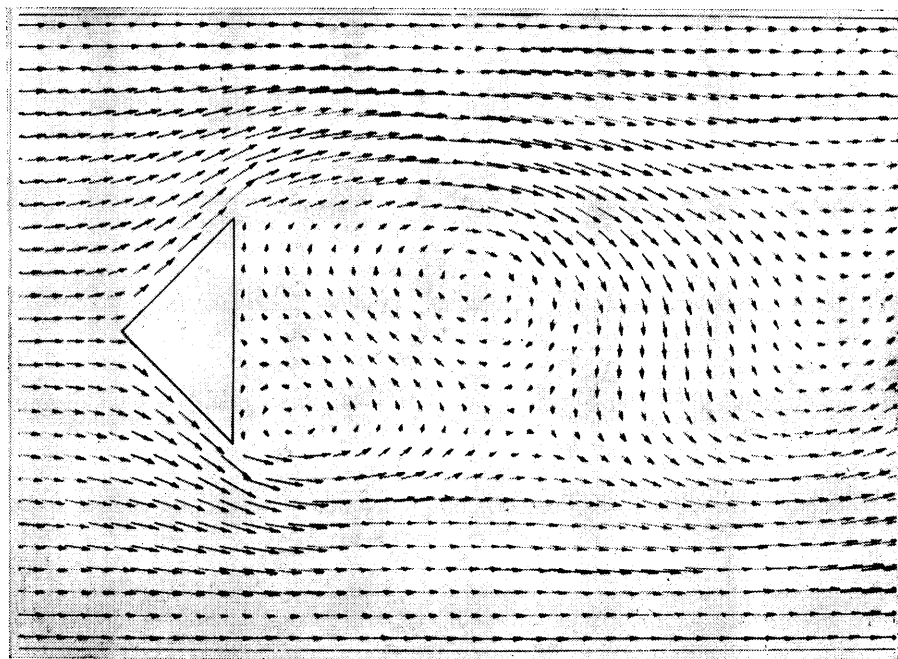
$$\frac{dk}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu_i \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \nu_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \varepsilon$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_i}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right) + \frac{\varepsilon}{k} \left[\frac{1}{2} C_1 \nu_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - C_2 \varepsilon \right]$$

$$\nu_i = C_D \frac{k^2}{\varepsilon}; \quad C_D = 0,09; \quad \sigma_\varepsilon = 1,3; \quad C_1 = 1,44; \quad C_2 = 1,9$$

На фиг. 8 представлена мгновенная картина отрывного обтекания клина в канале, полученная В. П. Ляшенко и В. И. Ягодкиным на основе разностного метода решения указанных уравнений и с использованием в

качестве граничного условия на твердых поверхностях закона стенки. Расчеты, проведенные в диапазоне чисел $Re=10^4-10^6$, показали, что в зависимости от степени загромождения канала B/H реализуется либо периодический характер течения с числом $Sh=0,19$ ($B/H < 0,45$), либо стационарный ($B/H > 0,5$), масштабы которого существенно отличаются от масштабов осредненного нестационарного течения. Полученные результаты удовлетворительно совпадают с экспериментальными данными, что может служить основанием для использования полученных расчетных значений напряжений Рейнольдса в ближнем следе в более простых расчетных моделях.



Фиг. 8

В работе [18] были использованы такие же уравнения движения с одинаковыми значениями четырех констант, которые содержит $k-\epsilon$ модель, и с такими же граничными условиями на твердой поверхности. Численно исследовалось отрывное обтекание профиля Жуковского с относительной толщиной $c=0,12$ при числе $Re=3 \cdot 10^6$. При обтекании профиля под нулевым углом атаки результаты расчета распределения давления вдоль поверхности профиля хорошо совпали с теоретическими для его потенциального обтекания, за исключением весьма малой окрестности задней кромки. Однако расчет срывного обтекания того же профиля при угле атаки 15° не был завершен. При этом обнаружилось трудности, связанные с непригодностью $k-\epsilon$ модели турбулентности в сложных отрывных течениях. Вследствие этого на первых временных шагах во всем поле течения применялась алгебраическая модель турбулентности, которая в последующем использовалась и вблизи профиля. Несмотря на то, что время счета превысило 8 ч, не было получено ни стационарного, ни периодического отрывного обтекания. Расчетные значения коэффициентов $C_v(t)$ и $C_x(t)$ изменялись примерно вдвое и не соответствовали их постоянным

экспериментальным значениям. Таким образом, даже в несжимаемой жидкости применение сложных моделей турбулентности не всегда гарантирует решение задач отрывного обтекания.

В последние годы значительное внимание уделялось исследованию трансзвуковых отрывных течений. Так в работах [19, 20] было экспериментально и численно изучено обтекание симметричного профиля с контуром в виде круговой дужки относительной толщины $c=18\%$ при числах $M_\infty=0,7-0,8$ и $Re=(1-12) \cdot 10^6$. По мере возрастания числа M_∞ были отмечены три характерных режима обтекания профиля при нулевом угле атаки: стационарное обтекание с малой кромочной областью отрыва при $M_\infty < M_{\infty 1}$; нестационарное обтекание с большой кромочной областью отрыва, периодически перемещающейся с одной стороны профиля на другую при $M_{\infty 1} < M_\infty < M_{\infty 2}$, и стационарное обтекание с большой кромочной областью отрыва при $M_\infty > M_{\infty 2}$. Критические значения чисел $M_{\infty 1}$ и $M_{\infty 2}$ зависят от числа Re , причем величина $M_{\infty 1}$ существенно зависит также от предшествующего состояния течения. В результате тщательного экспериментального исследования была установлена структура области нестационарного отрыва, в которой за период колебаний развивается сильный отрыв с присоединением и повторным кромочным отрывом.

Численное исследование трансзвукового обтекания этого профиля производилось на основе полных нестационарных уравнений типа Навье — Стокса, замкнутых с помощью подобранной алгебраической модели турбулентности. В безотрывном течении турбулентная вязкость определялась согласно обычной двухслойной модели пути смешения, а внутри циркуляционной области задавалась в зависимости от ее значения на разделяющей линии тока v_{ij} соответственно на профиле и в ближнем следе

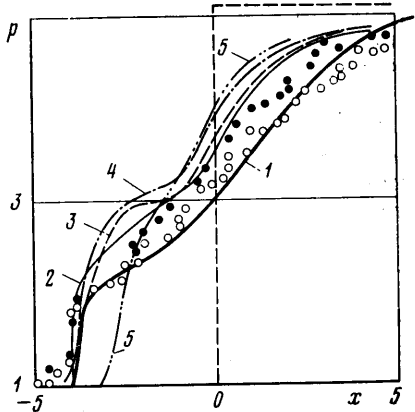
$$v_i = v_{ij} \frac{y - y_w}{y_j - y_w}, \quad v_i = v_{ij}$$

Сравнение расчетных и экспериментальных результатов работы [19] по осредненному коэффициенту давления вдоль поверхности профиля для всех трех режимов обтекания показало, что на безотрывно обтекаемой части профиля расчет везде хорошо совпадает с экспериментом, а в области отрыва не соответствует ему, причем в тем большей степени, чем эта область протяженнее. На режиме нестационарного обтекания расчет, не претендуя на установление тонкой структуры отрыва, правильно воспроизводит параметры колебаний — число Струхала $Sh=0,155$ и амплитуду давлений. Численный эксперимент правильно отражает также и стабилизирующее влияние разделяющей пластины за профилем: при ее длине, равной четверти хорды, течение становится стационарным.

Судя по экспериментальным данным [19], при трансзвуковом обтекании профиля, так же как и при малых дозвуковых скоростях, в области развитого отрыва осредненное давление примерно постоянно. Как уже было отмечено в разделе 3, априорный учет этого обстоятельства в простом интегральном методе взаимодействия может, по-видимому, улучшить согласование расчета с экспериментом по осредненным параметрам и более просто получить параметры нестационарного обтекания с учетом того, что период колебаний в этом случае определяется расходным механизмом наполнения и опорожнения изобарической области отрыва [10].

6. Сравнение численных и интегральных методов расчета взаимодействия скачков уплотнения с турбулентным пограничным слоем. Задача взаимодействия скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем на пластине или в угле сжатия являются тестовыми благодаря их относи-

тельной простоте и наличию подробных экспериментальных данных. Более простым случаем оказывается сверхзвуковое взаимодействие, при котором дозвуковая область отрыва и следа у стенки заканчивается горловиной следа — сечением перехода от докритического к сверхкритическому (по Крокко [21]) диссипативному слою. В интегральных методах расчета горловине следа соответствует седловая особая точка, наличие которой, как и в случае одномерного течения в критическом сечении сопла Лавалья, позволяет выделить особую интегральную кривую, дающую решение задачи [22]. В описанном выше однопараметрическом интегральном методе из уравнений следа



Фиг. 9

(3.3) при $M > 1$ получается уравнение для параметров следа в его горловине $\Delta(m, C) = 0$ (m — форм-параметр профиля скорости, $C = u/u_{\max}$). Соответствующая особая кривая в плоскости параметров m, C с учетом еще одного дополнительного соотношения определяет и начальные условия диссипативного слоя при отрыве потока от стенки или при наличии повторного отрыва в следе, а также позволяет выделить многозначные решения, что упрощает анализ сложных сверхзвуковых отрывных течений [10].

Более сложный многопараметрический интегральный метод Ю. Г. Сергеева, построенный на основе локально-подобных решений уравнений турбулентного пограничного слоя с использованием двухслойной модели пути смещения, дает более полное описание отрывной области, параметры которой явно зависят от числа Re и температурного фактора T_w/T_∞ .

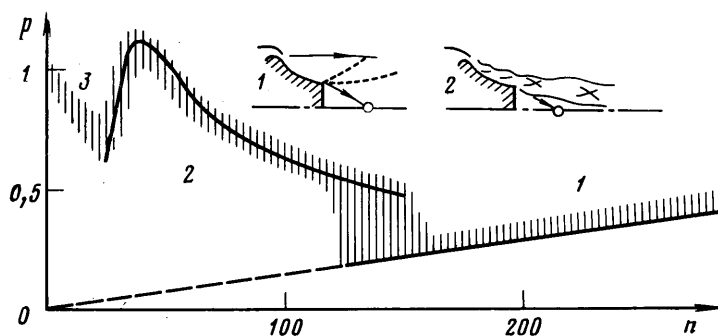
На фиг. 9 для сравнения даются различные расчетные распределения давления в области взаимодействия скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем при числах $M_\infty = 2,9$ и $Re_\theta = 10^6$ и интенсивности скачка $\theta = 13^\circ$, применительно к наиболее полным экспериментальным данным [23]. Наилучшее согласование дает указанный многопараметрический интегральный метод (кривая 1). Простейший однопараметрический интегральный метод (кривая 2) примерно в равной степени согласуется с экспериментом, как и численные методы, использующие различные двухпараметрические дифференциальные модели турбулентности (кривые 3 и 4 [24]). Наконец, кривой 5 показано численное решение уравнений типа Навье — Стокса с алгебраической моделью турбулентности, в которой используется такая же двухслойная модель пути смещения для турбулентной вязкости, как и в многопараметрическом интегральном методе [24].

Слишком грубые исходные положения однопараметрического интегрального метода вообще не позволяют претендовать на расчет тонкой структуры течения внутри области отрыва. Тем не менее расчетная форма звуковой линии внутри области отрыва удовлетворительно совпадает с рассматриваемым экспериментом ([10], рис. 4. 53). Упомянем еще о сравнительных численных исследованиях отрывного обтекания угла сжатия [25], где отмечено, что в зависимости от выбираемой модели турбулентности можно получить хорошее совпадение с экспериментом для практически любого отдельного параметра течения, однако не для течения в целом.

Таким образом, интегральные методы расчета турбулентных отрывных течений имеют определенное преимущество по сравнению с численными методами, будучи более простыми и наглядными, контролируруемыми и целенаправленными. Тем не менее, когда общая схема отрывного течения не ясна или слишком сложна, например, как в случае трансзвукового взаимо-

действия скачков в канале (псевдоскачок), более целесообразны разностные методы решения уравнений турбулентного движения вязкой жидкости. Так, в [26] получено удовлетворительное совпадение расчета с экспериментом для начального участка псевдоскачка в круглой трубе при числах $M=1,3-1,5$ и $Re=10^7$.

7. Внутренние задачи сверхзвуковых течений. Характеристики многих технических устройств определяются существующими в них отрывными течениями, в которых сверхзвуковой поток взаимодействует с турбулентным слоем и следом. В случае сверхзвуковых потоков сложной структуры



Фиг. 10

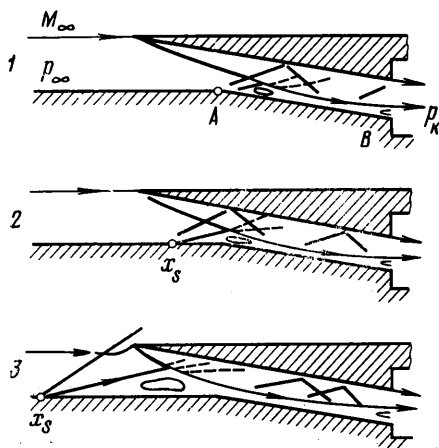
предпочтительно применять методы вязко-невязкого взаимодействия, сочетающие простые однопараметрические интегральные методы расчета турбулентных слоев и следов с современными численными методами расчета невязких течений. В качестве иллюстрации ниже приводятся некоторые новые примеры полного расчета течений с отрывом потока в соплах и диффузорах в реальном диапазоне изменения их характеристик. Принятые расчетные схемы содержат одинаковые подобласти диссипативного течения — изобарическую область смешения и ближний след, используют одинаковые условия их шивки, одни и те же условия первоначального и повторного отрыва слоя и эмпирические постоянные. Внешний невязкий сверхзвуковой поток во всех примерах рассчитывался методом сквозного счета при помощи монотонной явной разностной схемы первого порядка точности [27].

На фиг. 10 представлена расчетная зависимость относительного донного давления $p = p_a / p_n$ на торце центрального тела профилированного штыревого сопла от степени нерасчетности истечения $n = \rho_0 / \rho_n$, полученная О. С. Покровским. Расчетное число $M_a = 5$, степень укорочения сопла $l = 0,3$. Прямая 1 относится к замкнутой сверхзвуковым потоком донной области (схема 1), кривая 2 — к разомкнутой донной области (схема 2), между которыми имеется область гистерезиса и пульсаций. Участок 3 относится к дозвуковому течению в ближнем следе и практического значения не имеет.

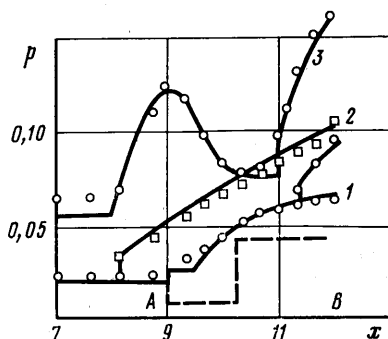
Результаты расчета удовлетворительно совпадают с экспериментальными данными, показанными заштрихованной полосой, несмотря на то, что невязкое течение на центральном теле и в струе имеет сложный характер, который служил предметом специальных исследований. Аналогичные результаты были получены и для плоских (линейных) сопел с центральным телом. Отметим, что если контур центрального тела задать прямолинейным, то при больших углах его наклона и малой степени нерасчетности возникает отрыв потока от поверхности центрального тела, вызванный

относительно высоким донным давлением. Все эти эффекты, включая вдув в донную область или отсос газа из нее, удовлетворительно описываются расчетом, что позволяет применять его для определения характеристик таких сопел [28].

В работе [10] приведен пример расчета отрывных течений в сверхзвуковых эжекторных соплах при нулевом коэффициенте эжекции. Благодаря простоте метода расчета построено полное семейство интегральных кривых ближнего следа, позволяющее наглядно охватить все разнообразие решений, число которых в зависимости от значений определяющих параметров задачи возрастает до пяти, и объяснить наблюдаемый гистерезис



Фиг. 11



Фиг. 12

и низкочастотные пульсации отрывного течения, связанные с переходом между различными формами. Отметим, что применение более сложных численных методов связано с утратой преимуществ, свойственных более простым моделям явления, и с неизбежными трудностями построения и анализа многозначных решений.

Не менее важны задачи отрывных течений в сверхзвуковых воздухозаборниках. Как показано в экспериментах [29], при нерасчетных режимах течения вследствие передачи давления из камеры вверх по ближнему следу происходит перестройка всего потока в канале и на центральном теле воздухозаборника.

На фиг. 11 показаны расчетные схемы течения, а на фиг. 12 соответствующие распределения относительных давлений $p = p/p_\infty$, полученные С. Г. Дашевской в результате расчета течения сильного взаимодействия в плоской модели воздухозаборника применительно к условиям работы [29]. Угол клина сжатия составлял 10° , число $M_\infty = 3,2$. Численное исследование показало, что в зависимости от относительного давления в камере $p_k > p_\infty$ в рассматриваемом воздухозаборнике могут реализоваться три различных режима отрывного течения: с фиксированной на изломе нижней стенки точкой отрыва; со свободной точкой отрыва на пластине; с «выбитым» скачком. На первом и третьем режимах течения существует изобарическая область отрыва, в ближнем следе за которой имеются сверхзвуковая горловина и последующий повторный отрыв потока. Поэтому положение точки отрыва x_s не зависит от p_k . На втором режиме сверхзвуковая горловина в ближнем следе отсутствует и положение точки отрыва монотонно зависит от давления в камере. Наблюдаемые гистерезис и пульсации потока объясняются многозначностью полученных решений, случайный переход между которыми происходит в результате возникновения или исчезновения горловины следа под воздействием крупномасштабных турбулентных пульсаций.

8. **Донное давление и турбулентный ближний след за осесимметричным телом в сверх- и гиперзвуковых потоках.** Расчет отрывного течения за телом типа затупленного конуса, движущегося в атмосфере при больших числах M_∞ и Re , важен как для определения его донного сопротивления, так и расчета наблюдаемых параметров следа за ним. Главной особенностью такого течения является влияние энтропийного слоя на ближний и дальний турбулентные следы. И здесь метод вязко-невязкого взаимодействия, в котором диссипативное течение состоит, как обычно, из донной области и ближнего следа, позволяет определить искомые параметры задачи. Расчетная схема отрывного обтекания затупленного тела (конуса) сверхзвуковым потоком существенно основывается на полном численном расчете вихревого течения невязкого газа между головным скачком и телом вытеснения. Начальные параметры для расчета собственно отрывного течения задаются в сечении торца $x=L$, например, по таблицам [30]. Толщина турбулентного пограничного слоя в этом сечении определяется его расчетом при заданном числе Re .

Простейший квазиодномерный способ расчета основывается на приведении такого течения к эквивалентному течению за полубесконечным цилиндром путем осреднения параметров в слое влияния потока при $x=L$ на ближний след. Более точный способ связан с применением численного метода расчета вихревого невязкого потока в области отрыва совместно с уравнениями ближнего следа (3.3). Проведенные расчеты позволяют определить область применимости различных эмпирических корреляций для донного давления и параметров следа, а также дать прогноз изменения этих величин для различной степени затупления конуса и его размеров вплоть до чисел $M_\infty=20$ [10].

В целом для расчета осредненных двумерных турбулентных отрывных течений наиболее предпочтителен метод вязко-невязкого взаимодействия, использующий точные или численные решения для невязкого потока и интегральные методы расчета диссипативной области с учетом дополнительных турбулентных напряжений. Имеется возможность распространения этого метода для расчета трансзвуковых отрывных течений, а также отрыва в несжимаемой жидкости при наличии кавитации.

Удовлетворительные результаты по силе сопротивления и нестационарным параметрам потока несжимаемой жидкости дает нестационарная вихревая модель, которую целесообразно развивать для исследования крупномасштабных движений и пульсаций в ближнем следе за телом и в областях турбулентного отрыва.

Исследование турбулентных отрывных течений на основе полных уравнений вязкой жидкости типа Навье — Стокса должно сопровождаться разработкой специальных феноменологических моделей турбулентности, учитывающих реальные свойства отрывных течений и результаты применения вышеупомянутых более простых моделей течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корст Г. Теория определения донного давления в околозвуковом и сверхзвуковом потоках.— Механика: Сб. пер. и обз. иностр. период. лит., 1957, № 5, с. 49–63.
2. Tanner M. Theoretical prediction of base pressure for steady base flow.— Progr. Aerospace Sci., v. 14, Oxford e.a., 1973, p. 177–225.
3. Гогин Л. В., Нейланд В. Я., Степанов Г. Ю. Теория двумерных отрывных течений.— В кн.: Гидромеханика. Итоги науки и техн. М.: ВИНТИ АН СССР, 1975, т. 8, с. 5–73.
4. Белоцерковский О. М. Вычислительный эксперимент. Прямое численное моделирование сложных течений газовой динамики на основе уравнений Эйлера, Навье — Стокса и Больцмана.— В кн.: Прям. числ. моделир. течений газа. Численный эксперимент в газ. динам., М., 1978, с. 6–64.

5. Adamson T. C., Jr., Messiter A. F. Analysis of two-dimensional interactions between shock waves and boundary layers.— Ann. Rev. Fluid Mech. v. 12, Palo Alto, Calif., 1980, p. 103–138.
6. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
7. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978. 351 с.
8. Головкин В. А., Головкин М. А. Численное решение задачи о нестационарном и отрывном обтекании тел произвольной формы идеальной несжимаемой жидкостью.— В кн.: 6-я Междунар. конф. по числ. методам в гидродинамике, Тбилиси, 1978. Сб. докл. т. 2. М., 1978, с. 89–94.
9. Бегяев С. К. Эволюция вихревых пленок.— В кн.: Динамика сплошной среды со свободными поверхностями. Чебоксары, 1980, с. 27–38.
10. Гогиш Л. В., Степанов Г. Ю. Турбулентные отрывные течения. М.: Наука, 1979. 367 с.
11. Бам-Зеликович Г. М. Расчет отрыва пограничного слоя.— Изв. АН СССР. ОТН, 1954, № 12, с. 68–85.
12. Simpson R. L., Strickland J. H., Barr P. W. Features of a separating turbulent boundary layer in a vicinity of separation.— J. Fluid Mech., 1977, v. 79, № 3, p. 553–607.
13. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. М.: Физматгиз, 1960. 715 с.
14. Sakamoto Hirochi. A study on the flow around bluff bodies immersed in turbulent boundary layers. 2nd report. On the pressure forces of semicircular cylinders.— Trans. Jap. Soc. Mech. Eng., 1976, v. 42, № 362, p. 3224–3232.
15. Nash J. F., Quincey V. G., Callinan J. Experiments on two-dimensional base flow at subsonic and transonic speeds.— Aeronaut. Res. Council Repts and Mem., 1966, № 3427. 61 p.
16. Гиневский А. С., Иоселевич В. А., Колесников А. В., Ланин Ю. В., Пилипенко В. Н., Секундов А. Н. Методы расчета турбулентного пограничного слоя.— В кн.: Итоги науки и техн. М.: ВИНТИ АН СССР. Сер. Мех. жидкости и газа, 1978, т. 11, с. 155–304.
17. Launder B. E., Spalding D. B. The numerical computation of turbulent flows.— Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng., 1974, v. 3, № 2, p. 269–289.
18. Sugavanam A., Wu J. C. Numerical study of separated turbulent flow over airfoils.— AIAA Pap., 1980, № 1444, 10 p.
19. Сигмиллер Х. Л., Марвин Дж. Г., Леви Л. Л. Стационарное и нестационарное трансзвуковые течения.— Ракетная техника и космонавтика, 1978, т. 16, № 12, с. 59–70.
20. Марвин Дж. Г., Леви Л. Л., Сигмиллер Х. Г. Экспериментальная проверка полуэмпирических моделей турбулентности в нестационарных околосвуковых потоках.— Ракетная техника и космонавтика, 1980, т. 18, № 6, с. 13–23.
21. Крокко Л. Одномерное рассмотрение газовой динамики установившихся течений.— В кн.: Основы газовой динамики. М.: Изд-во иностр. лит., 1963, с. 64–324.
22. Крокко Л., Лиз Л. Теория смешения для определения взаимодействия диссипативного и почти изэнтропического потоков.— Вопр. ракетной техники, 1953, № 2, с. 3–53.
23. Реда, Мерфи. Взаимодействие скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем в прямоугольных каналах.— Ракетная техника и космонавтика, 1973, т. 11, № 2, с. 15–17 и № 10, с. 9–10.
24. Вигас Дж. Р., Хорстмен К. К. Сравнительный анализ применимости различных моделей турбулентности для расчета течений с взаимодействием пограничного слоя с ударной волной.— Ракетная техника и космонавтика, 1979, т. 17, № 8, с. 17–30.
25. Horstman C. C., Hung C. M., Settles G. S., Vas J. E., Bogdanoff S. M. Reynolds number effects on shock-wave turbulent boundary-layer interactions — a comparison of numerical and experimental results.— AIAA Pap., 1977, № 42. 10 p.
26. Мэйтур Г. Г., Вигас Дж. Р. Влияние чисел Маха и Рейнольдса на взаимодействие ударной волны с пограничным слоем.— Ракетная техника и космонавтика, 1980, т. 18, № 8, с. 192–193.
27. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
28. Степанов Г. Ю., Гогиш Л. В. Квазиодномерная газодинамика сопел ракетных двигателей. М.: Машиностроение, 1973. 167 с.
29. Гурьев В. Г., Иванюшкин А. К., Пиотрович Е. В. Течение на входе и в горле воздухозаборников при больших сверхзвуковых скоростях потока в числах M , меньших расчетного.— Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 1, с. 28–37.
30. Любимов А. Н., Русанов В. В. Течения газа около тупых тел. Ч. 1–2. М.: Наука, 1970.

Москва

Поступила в редакцию
11.VIII.1981