

УДК 532.526.5

## **АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ<sup>1</sup>**

**СЫЧЕВ В. В.**

Обзор результатов теоретических исследований отрыва ламинарного и турбулентного пограничных слоев в несжимаемой жидкости, основанных на принципе построения сращиваемых асимптотических разложений, справедливых при больших числах Рейнольдса ( $Re$ ). Исследование глобальной картины отрывного течения за телом конечных размеров при  $Re \rightarrow \infty$ .

**Введение.** Значительные успехи, достигнутые за последние 10—15 лет в развитии теории отрывных течений жидкостей и газов при больших числах Рейнольдса ( $Re$ ), связаны главным образом с использованием асимптотических методов их исследования. Основной задачей асимптотической теории вязких течений при больших числах  $Re$  является построение системы сращиваемых асимптотических разложений, справедливых при  $Re \rightarrow \infty$  и представляющих в совокупности все исследуемое поле течения. Классическим примером такого подхода является создание Прандтлем теории пограничного слоя [1]. Теория Прандтля соответствует так называемому иерархическому принципу построения асимптотических разложений, согласно которому эти разложения в каждой из двух (или большем числе) подобластей строятся поочередно член за членом. Так, например, в случае безотрывного обтекания тела прежде всего определяется главный член внешнего асимптотического разложения, соответствующий решению задачи обтекания заданного тела потоком идеальной жидкости, затем находится главный член внутреннего асимптотического разложения, соответствующий решению задачи о пограничном слое при заданном (т. е. известном из решения первой задачи) распределении давления; затем может быть определен второй член внешнего асимптотического разложения, затем второй член внутреннего и т. д.

Однако такая процедура наталкивается на значительные трудности или оказывается вообще неприменимой при анализе отрывного течения (см., например, [2]). Это связано прежде всего с проблемой определения предельного состояния поля течения, т. е. построением главного члена внешнего асимптотического разложения; в этом случае его следует искать в классе отрывных течений идеальной жидкости. Кроме того, локальная задача, связанная с исследованием течения в малой окрестности точки отрыва (т. е. изучением механизма отрыва пограничного слоя), вообще не может быть исследована на основе иерархического принципа, поскольку определяющую роль здесь играет процесс взаимодействия пограничного слоя с внешним потоком и распределение давления в области отрыва является самоиндуцированным. Эта область при  $Re \rightarrow \infty$  стягивается в точку,

<sup>1</sup> Доклад на V Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике. Алма-Ата, 1981.

которая является точкой отхода нулевой линии тока от поверхности тела и оказывается особой для внешнего предельного решения.

Весьма важным для построения теории отрыва является то, что эта особенность оказывается универсальной и хорошо известной из классической теории струйных течений идеальной жидкости со свободными линиями тока. Это обстоятельство позволяет исследовать явление отрыва пограничного слоя от гладкой поверхности независимо от решения глобальной задачи об отрывном течении за телом конечных размеров.

Первая часть настоящего обзора посвящена краткому изложению основных результатов асимптотической теории ламинарного и турбулентного отрыва от гладкой поверхности, а вторая его часть — анализу глобальной задачи об отрывном течении за телом конечных размеров при больших числах Рейнольдса ( $Re \rightarrow \infty$ ).

**1. Асимптотическая теория отрыва пограничного слоя.** Пограничный слой на твердой поверхности, как известно, обладает тем свойством, что при воздействии на него благоприятного градиента давления трение на стенке всегда остается положительным и течение повсюду является безотрывным. Напротив, возрастание давления вдоль стенки вызывает уменьшение трения, так что в результате на поверхности тела может появиться точка, где трение обратится в нуль и где, согласно Прандтлю, будет происходить отрыв потока. Поэтому изучению поведения решений уравнений пограничного слоя вблизи точки с нулевым трением был посвящен целый ряд исследований. Важнейшими из них являются работы [3–5]. В результате было обнаружено, что если градиент давления на твердой поверхности полагать заданным (в соответствии с иерархической схемой построения асимптотических разложений по Прандтлю), конечным и распределенным на конечном участке поверхности тела, то решение уравнений ламинарного пограничного слоя в общем случае имеет особенность в точке нулевого трения и не может быть непрерывно продолжено за эту точку. С другой стороны, в работе [6] было показано, что если градиент давления не является заранее заданным, а определяется в окрестности точки отрыва самим пограничным слоем, то упомянутая особенность может отсутствовать. Таким образом, условие согласованности распределения давления и развития пограничного слоя приводит к тому, что решение становится регулярным и может быть продолжено в область отрыва.

Это обстоятельство позволяет предположить, что в реальных течениях вблизи точки отрыва всегда имеет место взаимодействие пограничного слоя с внешним потоком, так что градиент давления является здесь самоиндуцированным, т. е. не может рассматриваться как заданный. При этом размеры области взаимодействия в пределе стремятся к нулю, а исходное распределение давления оказывается соответствующим такому невязкому течению, которое является предельным состоянием отрывного течения при  $Re \rightarrow \infty$ .

Рациональные решения такого типа, соответствующие отрыву пограничного слоя в сверхзвуковом потоке, были впервые получены в работах [7, 8].

Решение задачи о самоиндуцированном отрыве сверхзвукового потока оказывается сравнительно простым из-за известной простоты предельного состояния поля течения, в котором зависимость между давлением и наклоном линии тока является локальной.

Иначе обстоит дело в несжимаемой жидкости. В этом случае, как уже говорилось, предельное состояние следует искать в классе струйных течений идеальной жидкости со свободными линиями тока.

Градиент давления на поверхности тела в малой окрестности точки отрыва нулевой линии тока определяется при этом выражениями (см.,

например, [9])

$$\frac{dp}{dx} = k_0(-x)^{-1/2} + k_1 + O[(-x)^{1/2}], \quad x \rightarrow -0 \quad (1.1)$$

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad x > 0$$

Здесь используется ортогональная система координат  $(x, y)$ , причем  $x$  отсчитывается от точки отрыва  $x=0$  вдоль поверхности тела  $y=0$ . Используются безразмерные переменные: в качестве единицы измерения длины выбирается характерный размер тела  $d$ ; давление и компоненты вектора скорости отнесены соответственно к удвоенному скоростному напору  $\rho U_0^2$  и величине скорости  $U_0$  на свободной линии тока предельного потенциального течения. Кривизна свободной линии тока при  $x \rightarrow +0$  определяется выражением

$$\kappa = \frac{d\vartheta}{dx} = k_0 x^{-1/2} + \kappa_0 + O(x^{1/2}) \quad (1.2)$$

где  $\kappa_0$  — кривизна поверхности тела в точке отрыва. Отсюда следует, что если постоянная  $k_0 < 0$ , то течение является физически невозможным, так как при этом свободная линия тока пересекает поверхность тела.

Случай  $k_0 = 0$  соответствует условию Бриллюэна — Вилля, при котором положительный градиент давления вдоль поверхности тела отсутствует и появление отрыва становится физически необъяснимым.

Наконец, если  $k_0 > 0$ , то градиент давления и кривизна нулевой линии тока при  $|x| \rightarrow 0$  становятся бесконечно большими, что, казалось бы, должно приводить к более раннему отрыву потока (при  $x < 0$ ). Однако это рассуждение оказывается справедливым лишь при конечных значениях  $k_0$  и для случая ламинарного пограничного слоя.

Если же предположить, что величина  $k_0$  зависит от числа Рейнольдса  $Re = U_0 d / \nu$  так, что

$$k_0 = \varepsilon(Re) c_0, \quad c_0 > 0, \quad \varepsilon(Re) \rightarrow 0 \quad (Re \rightarrow \infty) \quad (1.3)$$

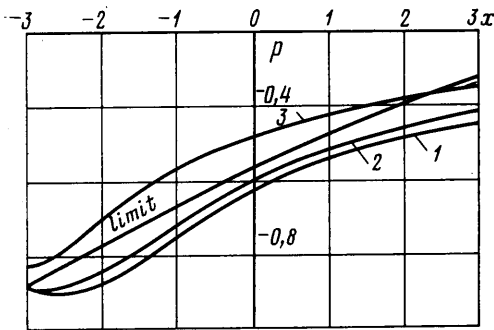
то, как было показано в работе [10], такое предположение позволяет построить внутренне согласованную рациональную асимптотическую теорию ламинарного отрыва.

Это означает, что, хотя предельное состояние потока и соответствует течению, удовлетворяющему условию Бриллюэна — Вилля, такой предельный переход является особым. При  $Re \rightarrow \infty$  будет существовать исчезающе малая окрестность точки отрыва, где самоиндуцированный градиент давления будет стремиться к бесконечности.

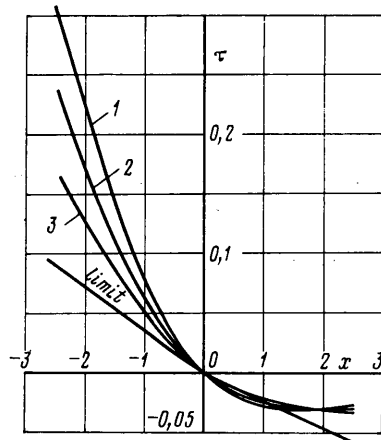
В действительности малый параметр задачи  $\varepsilon(Re)$  оказывается величиной порядка  $Re^{-1/16}$ , так что отличие поля течения от предельного состояния остается заметным даже при весьма больших числах  $Re$ .

Ключевой для исследования и расчета течения в малой окрестности точки отрыва ламинарного пограничного слоя является ныне хорошо известная трехслойная («трехпалубная») структура области свободного взаимодействия (см., например, [11]). Продольный размер этой области имеет величину порядка  $Re^{-3/8}$ , т. е. несколько превышает толщину пограничного слоя. Ответственным за взаимодействие в этой области оказывается нижний пристеночный слой течения (подслой), имеющий толщину порядка  $Re^{-5/8}$ . Течение здесь описывается системой нелинейных уравнений Прандтля и толщина этого подслоя меняется на свой порядок. Основная часть пограничного слоя в первом приближении не оказывает вытесняющего воздействия на внешний потенциальный поток. Изменение ее толщины составляет величину порядка  $Re^{-3/4}$ , а профиль скорости в ней,

в главном члене, не меняется вдоль зоны свободного взаимодействия. Таким образом, эта область течения играет пассивную роль и лишь оттесняется вязким подслоем, так что наклон линий тока, обусловленный разрывом последнего, передается без изменения внешнему потенциальному потоку. Система соотношений для области взаимодействия замыкается линеаризованными уравнениями Эйлера, связывающими изменение давления с изменением наклона нулевой линии тока внешнего потенциального течения. Их решение представляет собой известный интеграл теории тонкого профиля. «Начальное» условие для течения в подслое при



Фиг. 1



Фиг. 2

$Re^{3/8}x \rightarrow -\infty$  находится из рассмотрения решения для предотрывной области при  $x \rightarrow -0$ , а условия вниз по потоку при  $Re^{3/8}x \rightarrow +\infty$  определяются рассмотрением течения в зоне отрыва при  $x \rightarrow +0$ . Если предположить, что движение в этой зоне полностью обусловлено эжектирующим воздействием слоя смешения, то получается вполне согласованная и замкнутая система соотношений.

Записанная в переменных подобия, она содержит единственный параметр  $\alpha = c_0/a_0^{3/8}$ , где  $c_0$  — коэффициент при первом члене в соотношениях (1.1)–(1.3), а величина  $a_0$  представляет собой величину безразмерного трения на стенке при  $Re^{3/8}x \rightarrow -\infty$ .

В работе [12] на основе численного анализа было впервые показано, что решение описанной задачи существует и единственно. (Значение параметра подобия  $\alpha$  было определено равным 0,44. Недавние расчеты, выполненные в работе [13] на основе более совершенного численного метода, дали близкое значение  $\alpha = 0,42$ .) Сравнение зависимостей, полученных на основе асимптотической теории, с имеющимися экспериментальными данными и результатами численных решений полных уравнений Навье — Стокса показывает, что соответствие между ними наступает уже при числах  $Re$  порядка  $10^2$  [12]. В качестве примера на фиг. 1 и 2 (в переменных подобия) приведены кривые распределения давления и трения по поверхности кругового цилиндра вблизи точки отрыва, полученные на основании асимптотической теории (limit) и численного решения полных уравнений Навье — Стокса при числах  $Re = 100, 200$  и  $300$  [14] (соответственно кривые 1, 2 и 3).

В качестве характерного размера при определении числа  $Re$  выбран диаметр цилиндра; для приведения результатов работы [14] к перемен-

ным подобия использовано численное значение коэффициента трения  $a_0 = 1,35$  (см. [27]).

В заключение этого раздела заметим, что наряду с задачей об отрыве ламинарного пограничного слоя от гладкой поверхности в последние годы на основе асимптотических методов были также успешно решены задачи о ламинарном отрыве от угловых точек твердого контура [15], об отрыве вблизи задних кромок тонких профилей [16] и некоторые другие. Подробный обзор этих исследований содержится в работах [17, 18].

Перейдем теперь к рассмотрению отрыва турбулентного пограничного слоя.

В качестве главного исходного предположения при рассмотрении механизма турбулентного отрыва примем, что для предельного состояния поля течения (при  $Re \rightarrow \infty$ ) в малой окрестности точки отрыва по-прежнему справедливы соотношения (1.1), (1.2), но что это предельное состояние является иным. Это означает, что расстояние между точкой отрыва турбулентного пограничного слоя и точкой отрыва, соответствующей условию Бриллюэна — Вилля, будет в пределе оставаться конечным, а не стремиться к нулю (по закону  $Re^{-1/16}$ ), как это имело место в ламинарном случае. Это предположение, положенное в основу анализа работы [19], выражает принципиальное различие ламинарного и турбулентного пределов режима обтекания при  $Re \rightarrow \infty$  и находится в полном соответствии с многочисленными экспериментальными наблюдениями.

В качестве малого параметра задачи примем относительную толщину турбулентного пограничного слоя  $\epsilon$ , предполагая, что  $\epsilon(Re) \rightarrow 0$  при  $Re \rightarrow \infty$ . Анализ предотрывного течения с градиентом давления (1.1) и  $k_0 = O(1)$  показывает, что при приближении к точке отрыва ( $x \rightarrow -0$ ) пограничный слой приобретает многослойную структуру. Турбулентное трение меняется здесь пропорционально  $(-x)^{1/2}$  и остается существенным лишь в тонком подслое, толщина которого при  $x \rightarrow -0$  есть величина порядка  $\epsilon |x|$ . Вытесняющее воздействие этого подслоя оказывается пренебрежимо малым и основной вклад в процесс взаимодействия с внешним потоком вносит область течения, расположенная вне турбулентного подслоя и сохраняющая толщину порядка  $\epsilon$  при  $x \rightarrow -0$ . Продольная составляющая вектора скорости оказывается в этой области величиной порядка  $(-x)^{1/4}$ , вследствие чего течение здесь описывается нелинейными уравнениями вихревого слоя идеальной жидкости. При этом профиль осредненной скорости течения по мере приближения к точке отрыва приобретает форму, характерную для течения в следе. Это следует из анализа условий срачивания для решений в нелинейной области и турбулентном подслое.

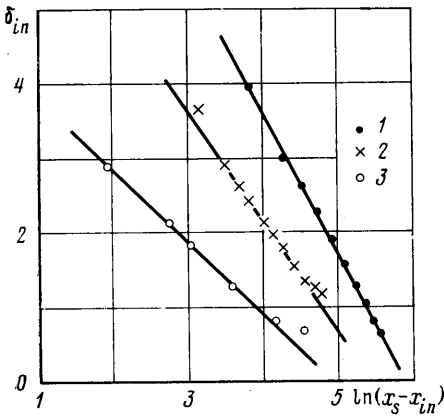
Что касается толщины основной части турбулентного пограничного слоя, где осредненная скорость течения порядка единицы, то она возрастает при  $x \rightarrow -0$  по логарифмическому закону, т. е. пропорционально  $\ln(-x)$ . Это получается из условий срачивания решения для этой области с решением для нелинейного вихревого слоя.

Таким образом, анализ предотрывного состояния поля течения позволяет установить, что в случае турбулентного пограничного слоя оно имеет четырехслойную структуру (без учета вязкого пристеночного слоя), причем ответственной за взаимодействие пограничного слоя с внешним потоком является область течения, где турбулентное трение в главных членах является несущественным.

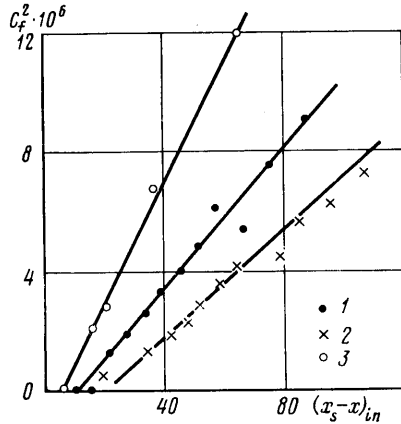
Полученные результаты находятся в хорошем соответствии с имеющимися экспериментальными данными. Это касается предотрывного профиля осредненной скорости в пограничном слое, следующего известному закону следа Коулса [20], характера возрастания толщины пограничного слоя ( $\delta$ ), уменьшения трения  $\tau = 1/2 c_f$  по мере приближения к точке отрыва  $x_c$ .

и некоторых других характеристик течения. Соответствующие сопоставления приведены на фиг. 3 и 4, где использованы результаты экспериментальных исследований работы [21] — точки 1, [22] — точки 2 и [23] — точки 3. Как видно, экспериментальные зависимости, построенные в соответствующих переменных, становятся близкими к линейным.

Особое поведение градиента давления и толщины пограничного слоя при приближении к точке отрыва свидетельствует о неприменимости соотношений, описывающих предотрывное течение, в некоторой малой окрестности точки отрыва; здесь должна располагаться область взаимодействия.



Фиг. 3



Фиг. 4

Предельный размер этой области будет величиной порядка  $\varepsilon^{2/3}$ , а поперечный размер (вследствие логарифмического расширения пограничного слоя) оказывается величиной порядка  $\varepsilon \ln \varepsilon$  (см. [19]). Течение в области взаимодействия имеет четырехслойную структуру, соответствующую описанной выше структуре течения в предотрывной области. Поэтому основной вклад в вытесняющее действие пограничного слоя будет вносить область с толщиной порядка  $\varepsilon$ , трение в первом приближении отсутствует и решение оказывается сравнительно простым. Начальными условиями при  $\varepsilon^{-2/3}x \rightarrow -\infty$  являются условия сращивания с решением для предотрывной области, а условия вниз по потоку при  $\varepsilon^{-2/3}x \rightarrow +\infty$  определяются рассмотрением возвратного течения в зоне отрыва при  $x \rightarrow +0$ . Последнее предполагается полностью обусловленным эжектирующим действием турбулентного слоя смешения. Система соотношений для рассматриваемой области, как и в ламинарном случае, замыкается линеаризованными уравнениями внешнего потенциального течения.

Все эти соотношения могут быть приведены к системе, содержащей лишь один универсальный параметр подобия  $G_0 = B_0(2k_0)^{-2/3}a_0^{1/3}$ , от которого и будет зависеть решение задачи о самоиндуцированном отрыве. Коэффициент  $B_0$  — аддитивная постоянная функции Бернулли для течения в вихревом слое области взаимодействия;  $k_0$  — постоянная в соотношениях (1.1), (1.2);  $a_0$  — постоянная, пропорциональная кривизне следового профиля в предотрывной области (при  $\varepsilon^{-1}y \rightarrow 0$ ). В отличие от случая ламинарного отрыва значение параметра подобия остается произвольным и не может быть определено теоретически. В конечном счете это связано с тем, что система уравнений турбулентного пограничного слоя незамкнута.

**2. Асимптотическая теория отрывного течения за тупым телом.** Перейдем теперь к рассмотрению отрывного ламинарного течения за тупым телом конечных размеров при числе  $Re \rightarrow \infty$ . Будем исходить из предполо-

жений, что коэффициент сопротивления тела при  $Re \rightarrow \infty$  стремится к нулевому значению и область отрывного рециркуляционного течения за телом является замкнутой.

Следуя ходу рассуждений работы [24], прежде всего заметим, что согласование этих двух предположений возможно лишь в том случае, если протяженность замкнутой зоны отрыва возрастает с ростом числа  $Re$  по линейному закону. В самом деле, только в этом случае вязкий слой смещения, отделяющий эту зону от внешнего безвихревого потока и нарастающий по закону  $(x/Re)^{1/2}$ , приобретает толщину порядка размеров тела. При более быстром законе удлинения рециркуляционной зоны толщина слоя смещения в следе будет неограниченно возрастать и при  $Re \rightarrow \infty$  коэффициент сопротивления тела будет стремиться к бесконечности, а при более медленном — убывать, что приведет к нулевому сопротивлению тела при  $Re \rightarrow \infty$ . Естественно принять, что ширина замкнутой области отрыва возрастает с ростом числа  $Re$  по более медленному закону, чем его длина. Иное предположение привело бы к абсурдной ситуации, при которой обтекаемое тело в пределе оказалось бы расположенным в исчезающе малой окрестности критической точки отрывной области, существование которой стало бы необъяснимым.

Но если поперечные размеры области отрыва увеличиваются с ростом числа  $Re$  по закону  $Re^\sigma$ , где  $\sigma < 1$ , то при  $Re \rightarrow \infty$  она приобретает форму бесконечно тонкого тела. Вследствие этого коэффициент давления  $c_p = -2p$  в этой области будет стремиться к нулю, как и ее относительная толщина, по закону  $Re^{-1+\sigma}$ . Нетрудно установить, что поперечный градиент давления будет здесь меньше или порядка  $Re^{-2+\sigma}$ , т. е. относительно поперечный перепад давлений будет  $\Delta p/p \leq O(Re^{-1+\sigma})$  и им можно пренебречь. Тогда во всей области отрывного рециркуляционного течения давление в первом приближении будет стремиться к давлению в невозмущенном потоке ( $p \rightarrow 0$ ). Это в свою очередь означает, что характерная скорость рециркуляционного движения жидкости в зоне отрыва также стремится к нулю и эта область в пределе будет застойной. Течение в окрестности тела в области порядка его размеров будет тогда в пределе течением Кирхгофа. Важно подчеркнуть, что такое предельное состояние потока (со свободными линиями тока и «открытым следом») нужно рассматривать как локальный предел, справедливый лишь в области  $(x, y) = O(1)$ , наподобие течения в малой окрестности передней кромки тонкого профиля [25].

Условие срачивания решения в этой области с глобальным решением в масштабах всей рециркуляционной зоны  $x = o(Re)$ ,  $y = o(Re^\sigma)$  позволяет найти показатель степени  $\sigma$ , определяющий закон изменения ширины последней. Так как асимптотическая форма свободных линий тока для решения Кирхгофа имеет вид  $y \propto \sqrt{x}$ , то из условия срачивания получаем, что  $\sigma = 1/2$ . Отсюда следует, что безразмерное давление в зоне отрыва  $p$ , а также отношение поперечной и продольной составляющих скорости  $v/u$  будут порядка  $Re^{-1/2}$ . Остается определить порядок величины какой-либо из них. Это нетрудно сделать, воспользовавшись (как и в первой части настоящего обзора) предположением, что течение в зоне отрыва индуцируется слоем смещения; тогда нормальная составляющая вектора скорости будет пропорциональна  $(x Re)^{-1/2}$ , так что на расстояниях порядка  $Re$  она будет величиной порядка  $Re^{-1}$ . В результате для составляющих вектора скорости в замкнутой области отрывного течения получаем:  $u = o(Re^{-1/2})$ ,  $v = o(Re^{-1})$ . На основании этих оценок нетрудно установить, используя уравнение количества движения, что переменная часть коэффициента давления будет порядка  $Re^{-1}$ , в то время как его полная величина порядка  $Re^{-1/2}$ . Этот результат сразу позволяет сделать вывод о форме замкнутой зоны отрыва. Чтобы при ее обтекании внешним невязким потоком (как

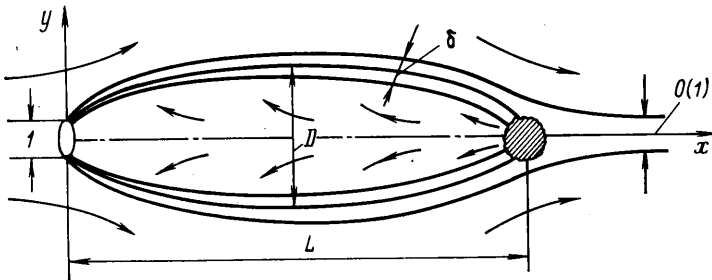
тонкого тела относительной толщины порядка  $Re^{-1/2}$ ) коэффициент давления в первом приближении имел постоянное значение, необходимо, чтобы граница этой области имела эллиптическую форму. Таким образом, обозначая через  $L=Re L_0$  и  $D=Re^{1/2} D_0$  соответственно длину и ширину области отрыва можем записать уравнение ее границы в виде

$$y=D[(x/L)(1-x/L)]^{1/2} \quad (2.1)$$

Общая картина течения схематически изображена на фиг. 5. Давление в эллиптической зоне отрыва будет равно

$$p=-\varepsilon=-D/L=-Re^{-1/2} D_0/L_0 \quad (2.2)$$

При этом течение в окрестности тела, в области порядка его размеров, будет определяться решением задачи Кирхгофа при безразмерной скорости набегающего невозмущенного потока равной  $1+\varepsilon$ . Это соответствует



Фиг. 5

условиям сращивания данного локального решения с глобальным аналогично задаче для тонкого эллиптического профиля [25].

Асимптотическая форма свободных линий тока для течения Кирхгофа, как известно, связана с коэффициентом сопротивления  $c_{x0}$  формулой

$$y=\sqrt{(2/\pi)} c_{x0} x^{1/2} \quad (2.3)$$

Сравнивая это выражение с главным членом (2.1) при  $x=O(1)$ , получим

$$D_0/\sqrt{L_0}=\sqrt{(2/\pi)} c_{x0} \quad (2.4)$$

С другой стороны, сопротивление тела должно равняться сумме интегралов сил трения вдоль разделительных линий тока в слоях смешения на верхней и нижней границах зоны отрыва. Тогда, используя известное автомодельное решение для ламинарного слоя смешения [26], можно получить следующее выражение для коэффициента сопротивления:

$$c_{x0}=4\sqrt{2L_0} f''(0); \quad f''(0)=0,282 \quad (2.5)$$

В итоге соотношения (2.4), (2.5) и (2.2) позволяют записать окончательные формулы для определения геометрических параметров и коэффициента давления рециркуляционной зоны отрыва в виде

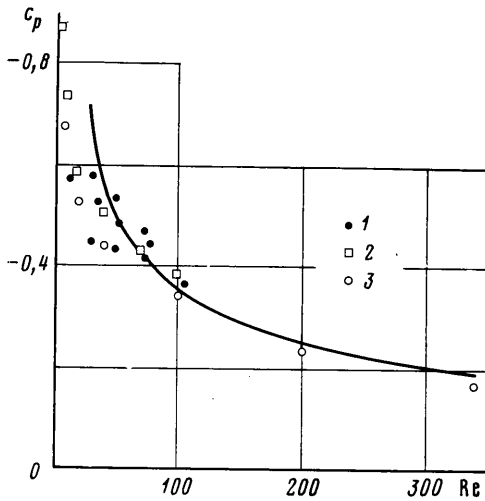
$$L_0=0,39c_{x0}^2; \quad D_0=0,50c_{x0}^{3/2} \quad (2.6)$$

$$c_p=2p=-2,56 Re^{-1/2} c_{x0}^{-1/2}$$

т. е. выразить их в первом приближении через коэффициент сопротивления тела по теории Кирхгофа.

Результаты описанной асимптотической теории [24], как это было показано в работе [27], находятся в очень хорошем соответствии с имею-





Фиг. 6

щимися экспериментальными данными и численными расчетами на основе полных уравнений Навье — Стокса. Это сравнение может быть дополнено результатами расчетов работы [14], доведенных до числа  $Re = 300$ . В качестве примера на фиг. 6 приведены зависимости коэффициента давления в области отрыва за круговым цилиндром от числа  $Re = U_\infty d / \nu$  ( $d$  — диаметр цилиндра). Сплошная кривая соответствует асимптотической теории и построена по формуле (2.6) при значении коэффициента сопротивления  $c_{x0} = 0,50$ , соответствующем обтеканию цилиндра по схеме Кирхгофа с гладким отрывом [28]; точки 1 — результаты экспериментальных изме-

рений работы [29]; точки 2 — численные расчеты работы [30]; точками 3 обозначены результаты численных расчетов работы [14].

До сих пор ничего не говорилось о течении в области смыкания зоны отрыва при  $x \rightarrow L$ . Слои смешения приобретают здесь толщину порядка размеров тела и, сливаясь, образуют сложное вихревое течение. Поскольку безразмерное давление в этой области меняется на величину порядка единицы, того же порядка будут и изменения безразмерных составляющих вектора скорости. Отсюда следует, что течение в области  $|x-L| = O(1)$ ,  $|y| = O(1)$  в предположении его стационарности может рассматриваться как локально-невязкое. Но тогда здесь должна формироваться возвратная струя, образующаяся за счет обратного движения жидкости, приносимой внутренними областями слоев смешения. Это следует из уравнения Бернулли для струек тока, принадлежащих указанным областям. Поскольку при  $(x-L) \rightarrow -\infty$  поперечный градиент давления в зоне отрыва стремится к нулю, то величина скорости каждой жидкой частицы после поворота будет стремиться к ее значению до поворота, так что в масштабах области отрыва  $x = O(Re)$  начальный профиль возвратной струи будет состоять из перевернутых профилей скорости внутренних областей слоев смешения при  $x=L$ . Но такая струя будет нести и передавать свой импульс телу, так как ее ширина и скорость движения (конечные по порядку величины) будут сохраняться на всем протяжении зоны отрыва. Это обстоятельство вносит противоречие в рассматриваемую асимптотическую модель течения, так как не соответствует схеме Кирхгофа с застойной зоной непосредственно за телом.

Указанное противоречие, отмеченное в работах [31, 17], по-видимому, может быть устранено.

Рассмотрим баланс внешних сил, приложенных к объему жидкости в замкнутой зоне отрыва в проекции на направление невозмущенного потока. Такими силами являются интегралы напряжений трения вдоль раздельных линий тока и интеграл составляющих сил давления (в проекции на ось  $x$ ) по замкнутому контуру, ограничивающему область отрыва. Сумма этих сил должна равняться нулю. Главный вклад в продольную составляющую интеграла сил давления  $\oint p dy$  вносит область смыкания

зоны отрыва  $(x-L)=O(1)$ , где давление восстанавливается до величин порядка единицы. Сумма интегралов напряжений трения вдоль разделяющих

линий тока  $2 \int_0^L \tau dx$ , как уже отмечалось, равна коэффициенту сопротивления тела. Этому же значению тогда должна быть равна и противоположно направленная составляющая интеграла  $\oint p dy$ , т. е. должно иметь место равенство

$$\oint p dy = 2 \int_0^L \tau dx \quad (2.7)$$

С другой стороны, интегралы сил трения определяют импульсы движения жидкости во внутренних областях слоев смешения при  $x=L$ , т. е. должно иметь место равенство

$$2 \int_{-\infty}^0 u^2(L, y) dy = 2 \int_0^L \tau dx \quad (2.8)$$

Но тогда на основании (2.7) и (2.8) получаем, что

$$\oint p dy = 2 \int_{-\infty}^0 u^2(L, y) dy \quad (2.9)$$

Это означает, что интеграл сил давления  $\oint p dy$  имеет величину, в 2 раза меньшую той, которая нужна для отбрасывания назад частиц жидкости, приносимых внутренними областями слоев смешения, и образования возвратной струи. Таким образом, анализ условий равновесия объема жидкости, медленно рециркулирующей в зоне отрыва, показывает, что образование возвратной струи невозможно. Приносимая внутренними областями слоев смешения жидкость будет как бы останавливаться силами, связанными с восстановлением давления в области смыкания зоны отрыва. Но это в свою очередь означает, что стационарное движение в этой области невозможно, наподобие того, как оно невозможно в области смыкания каверны при течении капельной жидкости с развитой кавитацией. В таком случае неправомерным становится и рассуждение, основанное на использовании интеграла Бернулли в области  $|x-L|=O(1)$ , а следовательно, снимается и описанное выше противоречие. Нестационарность локального решения в этой области, разумеется, не нарушает справедливости полученных выше результатов асимптотического анализа глобальной картины течения, поскольку детали течения в области смыкания следа не оказывают влияния на все поле течения. Это обстоятельство оправдывает использование и таких моделей отрывных течений, как, например, модель Рябушинского, предложенная для этих целей в работе [32].

В заключение заметим, что проведенный анализ отрывного течения за тупым телом при  $Re \rightarrow \infty$  указывает на возможность возникновения нестационарности течения не вследствие его гидродинамической неустойчивости, а по причине отсутствия стационарных решений при достижении некоторого достаточно большого числа Рейнольдса. Возможно, что именно это обстоятельство является препятствием для получения соответствующих решений на основе полных уравнений Навье — Стокса, как, например, при  $Re > 300$  в работе [14].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Prandtl L. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung.— In: Verh. III. Internat. Math. Kongr., Heidelberg, 1904, p. 484–491.
2. Lagerstrom P. A. Solutions of the Navier — Stokes equation at large Reynolds number.— SIAM J. Appl. Math., 1975, v. 28, № 1, p. 202–214.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1944. 624 с.
4. Goldstein S. On laminar boundary — layer flow near a position of separation.— Quart. J. Mech. Appl. Math., 1948, v. 1, № 1, p. 43–69.
5. Stewartson K. On Goldstein's theory of laminar separation.— Quart. J. Mech. Appl. Math., 1958, v. 11, № 4, p. 399–410.
6. Catherall D., Mangler K. W. The integration of the two — dimensional laminar boundary — layer equations past the point of vanishing skin friction.— J. Fluid Mech., 1966, v. 26, № 1, p. 163–182.
7. Нейланд В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 4, с. 53–57.
8. Stewartson K., Williams P. G. Self-induced separation.— Proc. Roy. Soc. London, A, 1969, v. 312, № 1509, p. 181–206.
9. Ackerberg R. C. Boundary-layer separation at a free streamline, Pt. I, Two-dimensional flow.— J. Fluid Mech., 1970, v. 44, № 2, p. 211–225.
10. Сычев В. В. О ламинарном отрыве.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 3, с. 47–59.
11. Stewartson K. Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies.— In: Adv. Appl. Mech., v. 14, N. Y.: Acad. Press, 1974, p. 145–239.
12. Smith F. T. The laminar separation of an incompressible fluid streaming past a smooth surface.— Proc. Roy. Soc., Lond., A., 1977, v. 356, № 1687, p. 433–463.
13. Королев Г. Л. Численное решение асимптотической задачи об отрыве ламинарного пограничного слоя от гладкой поверхности.— Уч. зап. ЦАГИ, 1980, т. 11, № 2, с. 27–36.
14. Fornberg B. A numerical study of steady viscous flow past a circular cilinder.— J. Fluid Mech., 1980, v. 98, № 4, p. 819–855.
15. Рубан А. И. О ламинарном отрыве от точки излома твердой поверхности.— Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 2, с. 44–54.
16. Рубан А. И. К асимптотической теории течения вблизи задней кромки тонкого профиля.— Уч. зап. ЦАГИ, 1977, т. 8, № 1, с. 6–11.
17. Messiter A. F. Boundary-layer separation Proc. 8th. U.S. Natl. Congr. Appl. Mech., Western Periodicals, North Hollywood, Calif., 1978, p. 157–179.
18. Рубан А. И., Сычев В. В. Асимптотическая теория отрыва ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости.— Успехи механики, 1979, т. 2, № 4, с. 57–95.
19. Сычев В. В., Сычев Вик. В. О турбулентном отрыве.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, т. 20, № 6, с. 1500–1512.
20. Coles D. The law of the wake in the turbulent boundary layer.— J. Fluid Mech., 1956, v. 1, № 2, p. 191–226.
21. Schubauer G. B., Klebanoff P. S. Investigation of separation of the turbulent boundary layer.— In: NACA Rep., 1951, № 1030.
22. Samkel A. E., Joubert P. N. A boundary layer developing in an increasingly adverse pressure gradient.— J. Fluid Mech., 1974, v. 66, № 3, p. 481–505.
23. Simpson R. L., Strickland J. H., Barr P. W. Features of a separating turbulent boundary layer in the vicinity of separation.— J. Fluid Mech., 1977, v. 79, № 3, p. 553.
24. Сычев В. В. Об установившемся ламинарном течении жидкости за тупым телом при большом числе Рейнольдса.— Докл. на VIII симп. по современным проблемам механики жидкостей и газов. Тарда, Польша, 1967. 25 с.
25. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
26. Look R. C. The velocity distribution on the laminar boundary layer between parallel streams.— Quart. J. Mech. Appl. Math., 1951, v. 4, № 1, p. 42–63.
27. Smith F. T. Laminar flow of an incompressible fluid past a bluff body: the separation, reattachment, eddy properties and drag.— J. Fluid Mech., 1979, v. 92, № 1, p. 171–205.
28. Brodetsky S. Discontinuous fluid motion past circular and elliptic cylinders.— Proc. Roy. Soc. Lond., A., 1923, v. 102, p. 542–553.
29. Grove A. S., Shair F. H., Petersen E. E., Acrivos A. An experimental investigation of the steady separated flow past a circular cylinder.— J. Fluid Mech., 1964, v. 19, № 1, p. 60–80.
30. Dennis S. C. R., Chang G.-Z. Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100.— J. Fluid Mech., 1970, v. 42, № 3, p. 471.
31. Messiter A. F. Laminar separation — a local flow description for constant pressure downstream. AGARD — CP — 168, Flow separation, 1975, pap. 4.
32. Roshko S. A review of concepts in separated flow.— In: Proc. Canad. Congr. Appl. Mech., v. 3. Quebec, Canada. 1967, Quebec, 1967, p. 81–115.

Москва

Поступила в редакцию  
11.VIII.1981