при этом добавка Δn_{ij} не изменяет моменты интеграла столкновений.

Параметр γ может быть выбран произвольно, например по аналогии с [2]

$$\gamma=\tau_\eta^{-1}=p_0\eta^{-1},\quad \gamma_0=\gamma(1-Z_r^{-1}-Z_v^{-1}),\quad Z_\alpha=4\tau_\alpha(\pi\tau_\eta)^{-1},\quad \alpha=r,\ v$$

Здесь Z_r и Z_v – вращательное и колебательное числа, т. е. числа столкновений, необходимых для установления равновесия по вращательным и колебательным степеням свободы [7].

К недостаткам всех аппроксимирующих уравнений высших порядков часто относят невозможность доказательства на их основе H-теоремы Больцмана. Однако это возражение снимается в случае слабо неравновесных состояний. В частности, для аппроксимирующих кинетических уравнений любого порядка, обсуждаемых в данной работе, это теорема доказывается аналогично [3].

Кинетическое уравнение с интегралом столкновений (16) позволяет получить точно такую же систему моментных уравнений, которая следует из полного уравнения Больцмана с моментами интеграла столкновений, рассчитанными в 21-моментном приближении для функции распределения [7]. Следует также отметить, что индексы (r) и (v) в выражении (16) носят формальный характер. Поэтому кинетическое уравнение, соответствующее (16), справедливо для произвольных двух видов внутреннего движения молекул, в том числе для двух различных вращательных спектров или двух внутримолекулярных колебаний с разными частотами.

Если при межмолекулярных столкновениях возбуждается лишь один вид внутренней энергии ($\tau_r \ll \tau_v, \tau_{rv}, \tau_{Dv}, \tau_{Drv}$), то из (16) следует аппроксимирующий интеграл столкновений, полученный в [3]. В том случае, когда неупругие столкновения отсутствуют ($\tau_\eta \ll \tau_r, \tau_v, \tau_{rv}, \tau_{Dr}, \tau_{Dv}, \tau_{Drv}$), выражение (16) формально совпадает с S-моделью для одноатомного газа [8].

Авторы благодарят М. Я. Алиевского за полезные консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Holway L. H.* New statistical models for kinetic theory: methods of construction.– Phys. Fluids, 1966, v. 9, № 9, p. 1658–1673. (Рус. перев.: Холуэй Л. Г. Новые статистические модели для кинетической теории и методы их построения. Механика. Период. сб. перев. иностр. ст., 1967, вып. 6, с. 46–72).
2. *Рыков В. А.* Модельное кинетическое уравнение для газа с вращательными степенями свободы.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 6, с. 107–115.
3. *Hanson F. B., Morse T. F.* Kinetic models for a gas with internal structure.– Phys. Fluids, 1967, v. 10, № 2, p. 345–353.
4. *McCormack F. J.* Construction of linearized kinetic models for gaseous mixtures and molecular gases.– Phys. Fluids, 1973, v. 16, № 12, p. 2095–2105.
5. *Wang-Chang C. S., Uhlenbeck G. E., de Boer J.* The heat conductivity and viscosity of polyatomic gases.– In: Studies in Statistical Mechanicks. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., v. 2, p. 241–268.
6. *Waldmann L., Trübenbacher E.* Formale Kinetische Theorie von Gas, Gemischen aus Anregbaren Molekülen.– Z. Naturforsch., 1962, B. 17a, № 5, S. 363–376.
7. *Алиевский М. Я.* Релаксация, распространение звука и процессы переноса в молекулярных газах.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 5, с. 53–67.
8. *Шахов Е. М.* О приближенных кинетических уравнениях в теории разреженных газов.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 1, с. 156–161.

Свердловск

Поступила в редакцию
25.VI.1980

УДК 533.951

СТРУКТУРА СЛАБОЙ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ, ОБУСЛОВЛЕННАЯ ЭЛЕКТРОННЫМИ ЦИКЛОТРОННЫМИ ВОЛНАМИ

РУДЕРМАН М. С.

В настоящей работе аналитически исследуется структура слабой бесстолкновительной ударной волны, распространяющейся в замагниченной плазме поперек магнитного поля. Диссипация обеспечивается неустойчивостью, возникающей на электронных циклотронных колебаниях. Подобная задача рассматривалась в [1], где в отличие от обычной классической постановки задавалось значение производной магнитного поля в некоторой точке перед фронтом ударной волны вместо задания граничных условий на бесконечности.

В [1] для эффективной частоты столкновений, обусловленной взаимодействием частиц с модами Бернштейна, получено следующее выражение:

$$\nu_{ef}=\alpha_0\left|\frac{u}{v_{Te}}\right|^3\frac{T_e}{T_i}\omega_{He} \tag{1}$$

где v_{Te} – тепловая скорость электронов, T_e, T_i – температуры электронов и ионов соответственно, ω_{He} – циклотронная частота электронов, u – скорость дрейфа электронов, α_0 – постоянная порядка единицы.

Выберем систему координат так, чтобы волна в ней покоилась. Тогда структура ударной волны описывается следующей системой уравнений двухтемпературной гидродинамики:

$$\begin{gathered}nv=n_0v_0\\ n(T_e+T_i)+\frac{H^2}{8\pi}+m_inv^2=\text{const}\\ \frac{5}{2}nv(T_e+T_i)+\frac{m_inv^3}{2}+\frac{v_0H_0H}{4\pi}=\text{const}\\ \frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{dH}{dx}=vH-v_0H_0,\qquad \sigma=\frac{ne^2}{m\nu_{ef}}\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь v – скорость среды, m_i – масса иона, H – напряженность магнитного поля, c – скорость света, n – плотность. Индекс 0 относится к величинам перед ударной волной. Предполагается, что при $x\to\pm\infty$ все величины, описывающие состояние плазмы, стремятся к стационарным значениям.

Система уравнений (2) незамкнута. Для ее замыкания используем квазилинейную оценку, связывающую скорости нагрева электронов и ионов [2]

$$\frac{dT}{dx}=\beta_0\frac{|u|}{v_s}\frac{dT_i}{dx} \tag{3}$$

где $v_s=(T_e/m_i)^{1/2}$ – скорость ионного звука, β_0 – постоянная. Формула (3) справедлива при $T_e>T_i$. Если $T_i\geqslant T_e$, то v_s надо заменить на тепловую скорость ионов v_{Ti}. Впрочем, при $T_i\sim T_e$ имеем $v_s\sim v_{Ti}$ и разница несущественна.

Скорость дрейфа электронов определяется из уравнения

$$\frac{dH}{dx}=\frac{4\pi}{c}enu \tag{4}$$

Уравнения (1)–(4) являются исходными для построения структуры волны.

Из (1)–(4) нетрудно получить уравнения для возмущения магнитного поля

$$\begin{gathered}\left|\frac{dh}{dx'}\right|^3\frac{dh}{dx'}=Ah(h_1-h),\qquad h=\frac{H-H_0}{H_0},\qquad x'=\frac{x\omega_{pe}}{c}\\ A=\frac{1}{\alpha_0\theta_0}\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}\left(\frac{4\pi n_0T_{e0}}{H_0^2}\right)^{3/2}\frac{8M_A^2+1}{2M_A}\\ \theta_0=\frac{T_{e0}}{T_{i0}},\qquad M_A=\frac{v_0}{V_A}\\ V_A=\frac{H_0}{\sqrt{4\pi m_in_0}},\qquad h_1=\frac{6M_A^2\varepsilon}{8M_A^2+1}\end{gathered} \tag{5}$$

Малый параметр ε характеризует интенсивность ударной волны и вводится по формулам

$$\varepsilon = M^2 - 1, \qquad M^2 = v_0^2 \left(\frac{5}{3} \frac{T_{e0}+T_{i0}}{m_i} + V_A^2 \right)^{-1} \tag{6}$$

Покажем, что везде $0 \leqslant h \leqslant h_1$. Пусть в некоторой точке $h<0$. Тогда в силу условий $h \to 0$ при $x' \to \infty$ и $h \to h_1 > 0$ при $x' \to +\infty$ в некоторой точке x_*' величина h достигает отрицательного минимума, т. е. при $x'=x_*'$ имеем $h<0$, $dh/dx'=0$, что противоречит уравнениям (5). Аналогично доказывается, что $h \leqslant h_1$.

Из неравенства $0 \leqslant h \leqslant h_1$ следует, что везде $dh/dx' > 0$. После этого уравнение (5) нетрудно проинтегрировать и получить

$$x' = \left(\frac{h_1^2}{A} \right)^{1/4} \left\{ 2 \left[\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + E\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] - \left[\mathrm{K}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + F\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] \right\} + x_0' \tag{7}$$

$$\varphi = -\alpha\,(0 \leqslant h \leqslant h_1/2), \quad \varphi = \alpha\,(h_1/2 \leqslant h \leqslant h_1)$$

$$\alpha = \arccos \sqrt[4]{4h(h_1-h)/h_1^2}$$

Здесь К, Е – полные эллиптические интегралы первого и второго рода, F, E – неполные эллиптические интегралы первого и второго рода, x_0' – постоянная интегрирования.

Фактически, переменная h принимает значения 0 и h_1 в точках

$$x' = x_1' \equiv 2 \left(\frac{h_1^2}{A} \right)^{1/4} \left\{ 2E\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - K\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} + x_0' \approx 1{,}7 \left(\frac{h_1^2}{A} \right)^{1/4} + x_0'$$

Для того чтобы получить решение задачи о структуре ударной волны, необходимо сшить полученное решение в точках x_0' и x_1' с двумя поступательными потоками, для которых $h=0$ и h_1 соответственно. При этом в точках x_0' и x_1' функция $h(x')$ и ее первая производная непрерывны, а вторая производная имеет бесконечный разрыв.

Естественно принять за толщину ударной волны величину

$$l = (x_1' - x_0') \frac{c}{\omega_{pe}} \approx 1{,}7 \frac{c}{\omega_{pe}} \left(\frac{h_1^2}{A} \right)^{1/4} \sim \left(\frac{m_i}{m_e} \right)^{1/8} \frac{c}{\omega_{pe}} \sqrt{\varepsilon} \tag{8}$$

Как видим, $l \sim \sqrt{\varepsilon}$, т. е. в отличие от ударных волн в средах с обычной диссипацией толщина ударной волны убывает вместе с интенсивностью.

Исходные уравнения, в частности уравнение (1), были получены в предположении, что характерный масштаб изменения параметров много больше c/ω_{pe}. Поэтому построенное решение справедливо лишь для волн не слишком малой интенсивности, когда выполнено неравенство

$$(m_e/m_i)^{1/4} \ll \varepsilon \ll 1$$

Для слабой ударной волны нетрудно получить приближенное равенство

$$T_i \approx {}^2/_5 m_i v_0^2 \frac{M_A^2 - 1}{M_A^2} h + T_{i0}$$

Воспользовавшись (3), имеем для T_e следующую оценку:

$$T_e - T_{e0} \sim \sqrt{\varepsilon}(T_i - T_{i0})$$

Таким образом, кинетическая энергия набегающего потока переходит в основном в тепловую энергию ионов.

В заключение автор благодарит В. Б. Баранова за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также А. В. Ершова за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ломинадзе Д. Г.* Циклотронные волны в плазме. Тбилиси: Мецикереба, 1975. 223 с.
2. *Сагдеев Р. З., Галеев А. А.* Нелинейная теория плазмы. В кн.: Вопросы теории плазмы, в. 7. М.: Атомиздат, 1973.

Москва

Поступила в редакцию 16.VII.1980

Технический редактор *Е. В. Синицына*

Сдано в набор 18.01.82 Подписано к печати 17.03.82 Т-01496 Формат бумаги 70×108¹/₁₆
Высокая печать Усл. печ. л. 16,8 + 1 вкл. Усл. кр.-отт. 29,5 Уч.-изд. л. 18,8 Бум. л. 6,0
Тираж 1727 экз. Зак. 1244

Издательство «Наука». 103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука». 121099, Москва, Шубинский пер., 10