

УДК 533.6.014

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИСТЕЧЕНИИ ГАЗА ИЗ ПЛОСКИХ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СОСУДОВ

КОСОЛАПОВ Ю. С., САЛТАНОВ Г. А., СИВОБОРОД В. А.,
ФИЛИППОВ Г. А.

Рассматривается задача об истечении струи газа из бесконечного сосуда с плоскими или осесимметричными стенками, образующая которых составляет углы $\pm\theta$ с осью симметрии струи. Режим истечения определяется отношением давлений $\epsilon_a = P_a/P_0$, где P_0 — давление в сосуде, а P_a — давление в окружающем пространстве.

В работах [1–5], посвященных теоретическому исследованию процесса истечения газа из плоского сосуда, решалась краевая задача для уравнения Чаплыгина в плоскости годографа скорости, причем тип задачи зависит от режима течения. В работе С. А. Чаплыгина [1] получено решение при $\epsilon_a \geq \epsilon_*$, где ϵ_* — критическое отношение давлений. При $\epsilon_a = \epsilon_*$ выравнивание струи происходит на конечном расстоянии l от щели и линия перехода к однородному звуковому потоку является прямой [2]. В [3] вычислена зависимость $l/h = L(\theta)$, где h — полуширина щели. Решение для случая истечения сверхзвуковой струи с максимально возможным расходом ($\epsilon_a = \epsilon_{**}$) получено в [4]. В [4, 5] приведены результаты расчета положения звуковой линии и коэффициента расхода μ при истечении двухатомного газа для углов $\theta = \pi/2$ и $\pi/4$. В диапазоне $\epsilon_{**} \leq \epsilon_a \leq \epsilon_*$, как показано Ф. И. Франклем [6], краевая задача для уравнения Чаплыгина в плоскости годографа сводится к обобщенной задаче Трикоми, численное решение которой получено в [7]. В том же диапазоне изменения ϵ задача об истечении газа из осесимметричного сосуда с входным цилиндрическим участком решалась в [8].

В настоящей работе получено численное решение задачи об истечении струи из плоского и осесимметричного сосудов в области $\epsilon_{**} \leq \epsilon_a < \epsilon_*$ для $\theta = 90^\circ$. Задача ставилась и решалась в физической плоскости. Решение определялось в процессе установления по времени с использованием схемы С. К. Годунова. Отметим, что такой подход позволяет единообразно ставить и решать задачу во всем диапазоне изменения параметров, а также существенно расширить класс решаемых задач (нестационарные и неизоэнтропийные течения). Приведены спектры течений и коэффициенты расходов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим истечения газа из сосуда с плоскими или осесимметричными стенками, расположенными симметрично относительно оси x и образующими с ней углы $\pm\theta$. Решение системы уравнений сохранения, описывающих нестационарное течение невязкого и нетеплопроводного газа, ищется в плоскости (x, y) , где x, y — декартовы или цилиндрические координаты. Стационарное решение определяется в процессе установления по времени. Полагается, что левая граница области расположена достаточно далеко от щели и соотношение между составляющими скорости на ней соответствует решению задачи о точечном стоке, расположенном в точке пересечения образующей стенки с осью симметрии. Вопрос о величине погрешности решения, связанной с переносом асимптотического условия на конечное расстояние H от щели при численной реализации, будет рассмотрен ниже. Кроме того, на этой границе задается однородное распределение энтальпии торможения и величины $S = P_0 \rho_0^{-\kappa}$, где P_0 и ρ_0 — давление и плотность газа в сосуде, а κ — показатель адиабаты. На стенке сосуда и оси симметрии потока обеспечивается условие непротекания.

На свободной границе струи, которая в процессе решения отождествляется с контактным разрывом, помимо условия непротекания задается давление, равное давлению P_a в затопленном пространстве. Рассматриваются такие режимы истечения, при которых $\epsilon_a < \epsilon_*$. В этом случае правая граница области выбирается так, что нормальная к ней составляющая скорости газа u превосходит местное значение скорости звука a и она свободна от граничных условий.

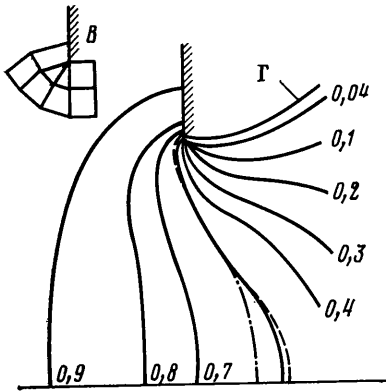
2. Особенности численной реализации. Численное решение задачи осуществлялось с помощью метода С. К. Годунова [9]. В расчетах использовались два типа сеток. Сетка 1 строилась полупрямой во всей расчетной области. Семейства линий, образующих сетку 2, определялись внутри сосуда как линии тока и эквипотенциали, соответствующие течению несжимаемой жидкости. Внутренние узлы рассчитывались по описанному в [10] алгоритму численного решения уравнений Лапласа. В области струи в обоих случаях использовалась подвижная сетка, следящая за границей струи. Особенности построения разностной схемы при использовании подвижных сеток детально рассмотрены в [10].

Влияние расстояния H , на котором выбиралась левая граница области, на величину погрешности решения оценивалось с помощью предварительных расчетов. Результаты расчетов показали, что при $H/h = 3,0-3,5$ погрешности, обусловленные

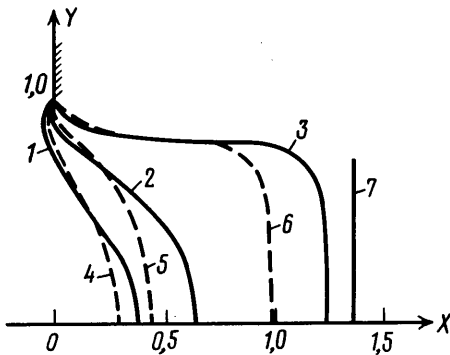
неточностью задания угла наклона вектора скорости на левой границе, становятся значительно ниже общего уровня ошибок метода. С целью повышения точности результатов расчет проводился в два этапа [11]. На первом этапе использовалась сетка с достаточно грубым разбиением. На втором этапе расчет проводился в выделенном сегменте, внутри которого сетка сгущалась путем деления каждой исходной ячейки на четыре.

В таблице приведены значения коэффициентов расхода μ , полученные в результате расчета истечения двухатомного газа ($\kappa=1,4$) для режимов с максимальным расходом ($\epsilon_a \leq \epsilon_{**}$) при $\theta = \pi/4$ и $\pi/2$, и данные работ [4, 5]. В скобках указаны числа ячеек расчетных сеток. Значения, приведенные для сетки 2 при различных числах ячеек, соответствуют результатам первого и второго этапов расчета. Коэффициент расхода определялся прямым интегрированием параметров в выходном сечении сосуда. Из сравнения видно, что при одинаковых числах ячеек сетка 2 позволяет получить более точное значение μ при $\theta = \pi/4$. С ростом θ точность расчетов на сетке 1 резко падает. Сетка 2 обеспечивает достаточно высокую точность расчета при любых углах наклона стенки. Отличие коэффициентов расхода, полученных после сгущения сетки, от значений, приведенных в [4, 5], не превосходит 1%. Следует отметить, что наличие треугольных ячеек в окрестности острой кромки (фиг. 1) в сетке 2 приводит к уменьшению «размазывания» веера волн разряжения, но при этом время счета увеличивается приблизительно в 2,5 раза.

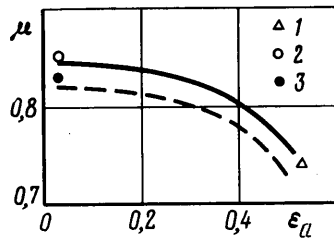
Существенное сокращение времени счета и повышение точности результатов при расчете



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

стационарных режимов истечения могут быть достигнуты путем коррекции параметров в малой окрестности точки B (фиг. 1) с помощью аналитического решения Прадтля – Майера. При численной реализации параметры потока в центрах треугольных ячеек и на их границах, проходящих через точку B (фиг. 1), вычислялись по аналитическим формулам решения Прадтля – Майера. На границах, противоположных вершине B , потоки массы, импульса и энергии определялись из условия равенства нулю суммы соответствующих потоков через границы ячейки. Результаты расчетов, полученные с использованием решения Прадтля – Майера, отмечены в

θ	Сетка 1		Сетка 2		Данные других авторов
45°	0,875; (15×60)	0,903; (15×60) 0,901; (A)	0,913; (30×50) 0,917; (A)	0,923 (с)	0,919; [5]
90°	—	0,820; (15×50) 0,821; (A)	0,840; (30×50) 0,843; (A)	0,86 (с)	0,85; [4] 0,853; [7]

таблице буквой А. Буквой С отмечены результаты, полученные с помощью линейной экстраполяции на нулевой размер ячейки.

Расчеты проводились на ЭВМ БЭСМ-6. Установление контролировалось по давлением и расходу. Время расчета варианта, содержащего 1500 расчетных ячеек, составляло примерно 2,5–3 ч.

3. Результаты. Ниже приведены некоторые результаты расчета истечения воздуха из плоских и осесимметричных сосудов при $\theta = \pi/2$. На фиг. 1 изображены линии $\epsilon = \text{const}$ и граница струи Г, полученные при расчете истечения газа из плоского сосуда для $\epsilon_a = 0,03$. Штрихами на фиг. 1 нанесена звуковая линия ($\epsilon = \epsilon_* = 0,528$), полученная в [4] для плоского сосуда в режиме максимального расхода ($\epsilon_a = \epsilon_{**} = 0,037$). Заметим, что более точное значение $\epsilon_{**} = 0,389$ было найдено в [7]. Наблюдается хорошее совпадение результатов настоящего расчета и [4] по положению звуковой линии. На той же фиг. 1 для сравнения нанесена звуковая линия, полученная при расчете истечения газа из осесимметричного сосуда (штрихпунктирная линия) при тех же режимных параметрах. Видно, что скорость звука при истечении газа из осесимметричного сосуда в окрестности оси симметрии потока достигается раньше, чем при истечении из плоского. Та же тенденция в поведении звуковой линии сохраняется и на других режимах.

На фиг. 2 представлены положения линий критических скоростей в зависимости от величины противодавления для плоского сосуда: кривые 1 – $\epsilon_a = 0,03$; 2 – $\epsilon_a = 0,4$; 3 – $\epsilon_a = 0,52$; и для осесимметричного кривые: 4 – $\epsilon_a = 0,03$; 5 – $\epsilon_a = 0,4$; 6 – $\epsilon_a = 0,52$; 7 – линия перехода к однородному звуковому потоку при $\epsilon_a = \epsilon_*$ по данным [3], полученная для плоского сосуда. Здесь $X = x/h$ и $Y = y/h$.

На фиг. 3 приведены зависимости коэффициента расхода μ от величины противодавления ϵ_a для плоского (сплошная линия) и осесимметричного (штриховая линия) сосудов. Там же нанесены результаты [1] – 1; [4] – 2; [8] – 3. Отметим хорошее согласие между ними и расчетом настоящей работы. Сравнение расходных характеристик для плоского и осесимметричного сосудов показывает, что во всей области изменения режимных параметров $\epsilon_{**} \leq \epsilon_a < \epsilon_*$ коэффициент расхода μ при истечении газа из плоской щели выше, чем из осесимметричного отверстия. С уменьшением ϵ_a при истечении из плоского и осесимметричного сосудов звуковая линия приближается к щели (отверстию), достигая предельного положения при $\epsilon_a = \epsilon_{**}$, после чего наступает стабилизация расхода. Хотя звуковая линия в случае осесимметричного течения при прочих равных условиях располагается ближе к отверстию, чем в плоском потоке, делать из этого вывод о большей величине коэффициента расхода осесимметричного потока было бы неправильно, так как распределения параметров в этих потоках различны.

Авторы выражают благодарность М. Е. Дейчу за интерес к работе и полезные обсуждения результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. О газовых струях. – Полн. собр. соч. Т. 2. М. – Л.: Гостехиздат, 1948, с. 19–137.
2. Овсянников Л. В. Об одном газовом течении с прямой линией перехода. – ПММ, 1949, т. 13, № 5, с. 537–542.
3. Михайлова М. П. Об истечении газа из сосуда. – В кн.: Теоретическая гидромеханика. 1952, № 9, с. 114–142.
4. Франкль Ф. И. Истечение сверхзвуковой струи из сосуда с плоскими стенками. – Докл. АН СССР, 1947, т. 58, № 3, с. 381–384.
5. Асламов С. К. Сверхзвуковое истечение газа из несимметричного сосуда с плоскими наклонными стенками при максимальном расходе. – Тр. Одесск. ун-та. 1962, т. 152, Сер. физ. н., вып. 8, с. 98–101; Тр. Куйбышев. авиац. ин-та, 1961, вып. 12, с. 237–241.
6. Франкль Ф. И. О задачах С. А. Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений. – Изв. АН СССР. Сер. матем., 1945, т. 9, № 2, с. 121–142.
7. Benson R. S., Pool D. E. Compressible flow through a two-dimensional slit. – Int. J. Mech. Sci., 1965, v. 7, № 5, p. 315–336.
8. Fenain M., Dutouquet L., Salignac J.-L. Calcul des performances d'une tuyère propulsive convergente. Comparaison avec l'expérience. – J. Recherche Aérospatiale, 1974, № 5, p. 261–276.
9. Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отходящей ударной волной. – Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 6, с. 1020–1050.
10. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
11. Тагиров Р. К. Теоретическое исследование течения идеального газа в сужающихся соплах. – Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 2, с. 198–202.

Москва

Поступила в редакцию
18.XII.1980