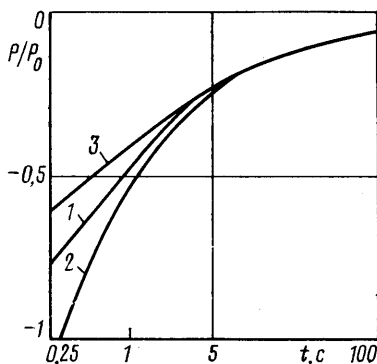


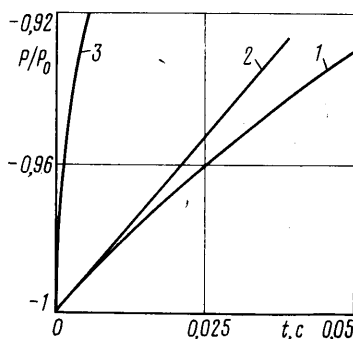
На фиг. 1 приведено сопоставление решений (10) (кривая 1) и приближений (11), (13) (кривые 2, 3) для больших времен, а на фиг. 2 решение (10) сопоставляется с приближениями (12), (13) для малых времен (кривые 1-3 соответственно). В расчетах использованы следующие значения параметров:

$$a=b=1, \quad r_c \kappa^{-1/2}=1, \quad (r_c K)^{-1}=2.$$

Видно, что начальная ветвь кривой в первую очередь зависит от свойств пробы, конечная — от свойств пласта, а в целом на кривую влияют как те, так и другие свойства.



Фиг. 1



Фиг. 2

Учитывая, что сжимаемость пластовых жидкостей колеблется в довольно широких пределах  $(0,49 \div 3,14) \cdot 10^{-9} \text{ м}^2 \text{ н}^{-1}$  по начальной ветви кривой, используя выражение (12), можно оценивать упругие свойства пробы.

Независимость асимптотики (11) от аппаратурной емкости ( $v$ ) позволяет определять свойства пласта даже при наличии емкости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бродский П. А., Фионов А. И., Тальнов В. Б. Опробование пластов приборами на кабеле. М.: Недра, 1974. 208 с.
2. Moran J. H., Finklea E. E. Theoretical analysis of pressure phenomena associated with wireline formation tester. — Petr. Techn., 1962, v. 14, № 8, p. 899–908.
3. Пыхачев Г. В., Исаев Р. Г. Подземная гидравлика. М.: Недра, 1973. 359 с.
4. Диткин В. А., Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. М.: Гостехиздат, 1951, 2550.

Октябрьский

Поступила в редакцию  
25.VI.1980

УДК 532.546

### ФИЛЬТРАЦИЯ К СКВАЖИНАМ В ДОЛИНАХ РЕК С ЗАИЛЕННЫМ РУСЛОМ

САЗОНОВ А. Б.

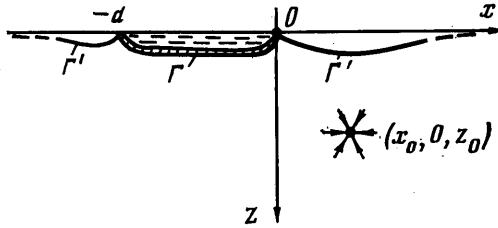
Рассматривается трехмерная стационарная задача о движении грунтовых вод в полуограниченном по мощности пласте водоносного грунта при откачке из скважины, расположенной вблизи реки. Задача решается в приближенной постановке — граничные условия на свободной поверхности и на дне водоема сносятся на горизонтальную плоскость. Считается, что заиленность и неоднородность русловых отложений в фильтрационном отношении проявляются одинаково и могут учитываться обобщенно коэффициентом  $\alpha$  в граничном условии импедансного вида для пьезометрического напора  $H$  [1]. Для простоты скважина моделируется точечным стоком, грунт предполагается однородным и изотропным. Задача рассматривается в рамках линейной потенциальной теории, основанной на законе Дарси, результаты численных расчетов представлены в виде графиков.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим установившееся течение грунтовых вод к точечному стоку интенсивности  $Q$ , расположенному (фиг. 1) в точке с координатами  $(x_0, 0, z_0)$  в полуограниченном по мощности пласте однородного изотропного грунта. На фиг. 1 область фильтрации — полупространство  $z \geq 0$   $\Gamma$  — слой русловых отложений,  $\Gamma'$  — свободная поверхность грунтовых вод,  $d$  — ширина реки, ось  $y$  перпендикулярна плоскости чертежа.

Согласно потенциальной теории фильтрации, основанной на законе Дарси, пьезометрический напор  $H$  при стационарном режиме течения удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 H(x, y, z) = 0 \quad (1.1)$$

где  $H = p/\gamma - z$ ,  $p$  — давление,  $\gamma$  — объемный вес воды. Уравнение справедливо во всей области  $z \geq 0$ , кроме точки с координатами  $(x_0, 0, z_0)$ , где расположен сток, интенсив-



Фиг. 1

ность которого выражается через пьезометрический напор формулой

$$Q = \lim_{r \rightarrow 0} (4\pi K r^2 \frac{\partial H}{\partial r}), \quad r^2 = (x-x_0)^2 + y^2 + (z-z_0)^2 \quad (1.2)$$

Здесь  $K$  — коэффициент фильтрации.

Граничное условие на свободной поверхности при стационарном режиме имеет вид [2]

$$\frac{\partial H}{\partial z} = 0 \text{ на } \Gamma'. \quad (1.3)$$

Ложе водоема экранировано тонким слабопроницаемым слоем русловых отложений, на котором выполняется граничное условие импедансного вида [1]

$$H = \alpha \frac{\partial H}{\partial n} \text{ на } \Gamma, \quad \alpha \geq 0. \quad (1.4)$$

Здесь  $\alpha$  — коэффициент, характеризующий сопротивление русловых отложений.

Предполагая, что глубина врезки русла в водоносный пласт и понижение уровня грунтовых вод в депрессионной воронке малы по сравнению с характерным размером задачи, сносим граничные условия на плоскость  $z=0$ .

Условие на бесконечности замыкает систему (1.1)–(1.4).

$$[H(x, y, z)]_{\infty} = 0 \quad (1.5)$$

В работе [3] в виде квадратур получено решение задачи о движении грунтовых вод к точечному стоку, расположенному вблизи полуограниченного по ширине водоема. При этом влиянием сопротивления русловых отложений пренебрегалось. В данной работе это соответствует случаю неограниченной ширины реки  $d=\infty$  и  $\alpha=0$ .

Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} x' &= x/z_0, \quad y' = y/z_0, \quad z' = z/z_0, \quad x_0' = x_0/z_0, \\ z_0' &= 1, \quad \alpha' = \alpha/z_0, \quad d' = d/z_0, \quad Q' = Q/Kz_0^2 \\ H &= z_0 H'(Q', x', y', z', x_0', \alpha', d') \end{aligned} \quad (1.6)$$

В силу линейности уравнений получим

$$H = (Q/Kz_0) H'(1, x', y', z', x_0', \alpha', d') \quad (1.7)$$

Далее штрихи опущены. В безразмерных переменных уравнения (1.1), (1.3)–(1.5) запишутся в том же виде, уравнение (1.2) принимает вид

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left( 4\pi r^2 \frac{\partial H}{\partial r} \right) = 1, \quad r^2 = (x-x_0)^2 + y^2 + (z-1)^2 \quad (1.8)$$

**2. Метод решения.** Чтобы исключить особенность в точке расположения стока, представим  $H$  в виде

$$H(x, y, z) = \varphi(x, y, z) + H_1, \quad H_1 = \frac{-1}{4\pi} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (2.1)$$

$$r_1^2 = (x-x_0)^2 + y^2 + (z-1)^2, \quad r_2^2 = (x-x_0)^2 + y^2 + (z+1)^2$$

Здесь  $H_1(x, y, z)$  представляет собой потенциал, создаваемый симметричными относительно плоскости  $z=0$  стоками, т.е. решение в предельных случаях  $d=0$  или  $\alpha=\infty$ .

Из уравнений (1.1), (1.3)–(1.5), (1.8) получим систему уравнений для  $\varphi(x, y, z)$

$$\nabla^2 \varphi(x, y, z) = 0 \quad (2.2)$$

$$\varphi = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial z} - H_1(x, y, 0) \quad z=0, \quad -d \leq x \leq 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad z=0, \quad x < -d \text{ и } x > 0, \quad [\varphi(x, y, z)]_{\infty} = 0$$

При этом уравнение (1.8) удовлетворяется тождественно. Таким образом, получена смешанная краевая задача для нахождения гармонической функции  $\varphi(x, y, z)$  в полупространстве  $z \geq 0$ . Как известно, решение задачи Неймана для полупространства имеет вид

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}} \quad (2.4)$$

Переходя к пределу при  $z \rightarrow 0$  и учитывая второе условие из (2.3), получим

$$\varphi(x, y, 0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-d}^0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}$$

Используя первое граничное условие из (2.3), получим интегральное уравнение относительно производной

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi\alpha} \int_{-d}^0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} + \frac{1}{\alpha} H_1, \quad z=0 \quad (2.5)$$

Таким образом, задача сведена к нахождению решения интегрального уравнения (2.5), после чего функция  $\varphi(x, y, z)$ , характеризующая влияние русла реки на фильтрацию к скважине, определяется из формулы (2.4).

Применяя преобразование Фурье по переменной  $y$  к обеим частям уравнения (2.5) и замечая, что в правой части стоит выражение типа свертки, получим

$$\psi(\omega, x) = -(\pi\alpha)^{-1} \int_{-d}^0 K_0(|\omega(x-x')|) \psi(\omega, x') dx' + f(\omega, x)$$

$$\psi(\omega, x) = F_y \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right], \quad f(\omega, x) = \alpha^{-1} F_y [H_1(x, y, 0)]$$

Здесь  $K_0$  – функция Макдональда нулевого порядка,  $F_y$  – оператор преобразования Фурье по переменной  $y$

$$F_y[g(y)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{i\omega y} dy$$

Произведя замену переменных  $t = -\omega x$ , получим (в силу четности функции  $\psi(\omega, x)$  по  $\omega$  полагаем далее  $\omega \geq 0$ )

$$u(t) = \int_0^{td} k(|t-t'|) u(t') dt' + g(t)$$

$$u(t) = \psi(\omega, -t/\omega), \quad g(t) = f(\omega, -t/\omega) \quad (2.6)$$

$$k(r) = -(\pi\alpha\omega)^{-1} K_0(r)$$

Ядро интегрального уравнения (2.6)  $k(r)$  из интегрального представления Зоммерфельда для функции Макдональда приводится к виду

$$k(r) = \int_0^1 e^{-r/\zeta} w(\zeta) d\zeta, \quad w(\zeta) = -\frac{1}{\pi\alpha\omega} \frac{1}{\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}. \quad (2.7)$$

В силу специального вида ядра  $k(r)$  уравнение (2.6) эффективно решается методом инвариантного погружения [4]. Уравнение (2.6) погружается в семейство интегральных уравнений

$$u(t, \xi) = g(t) + \int_0^\xi k(|t-t'|) u(t', \xi) dt', \quad \xi \geq t \quad (2.8)$$

Как показано в [4], уравнение (2.8) эквивалентно следующей задаче Коши для системы интегродифференциальных уравнений:

$$X_\xi(\xi, \zeta) = Y(\xi, \zeta) \int_0^1 Y(\xi, \zeta') w(\zeta') d\zeta', \quad \xi > 0$$

$$Y_\xi(\xi, \zeta) = -\zeta^{-1} Y(\xi, \zeta) + X(\xi, \zeta) \int_0^1 Y(\xi, \zeta') w(\zeta') d\zeta', \quad \xi > 0$$

$$J_\xi(t, \xi, \zeta) = -\zeta^{-1} J(t, \xi, \zeta) + X(\xi, \zeta) \int_0^1 J(t, \xi, \zeta') w(\zeta') d\zeta', \quad \xi \geq t$$

$$e_\xi(\xi, \zeta) = -\zeta^{-1} e(\xi, \zeta) + X(\xi, \zeta) \left[ g(\xi) + \int_0^1 e(\xi, \zeta') w(\zeta') d\zeta' \right], \quad \xi > 0$$

$$u_\xi(t, \xi) = \left[ g(\xi) + \int_0^1 e(\xi, \zeta') w(\zeta') d\zeta' \right] \int_0^1 J(t, \xi, \zeta') w(\zeta') d\zeta', \quad \xi \geq t$$

Здесь индекс снизу означает дифференцирование по этой переменной. Начальные условия:

$$X(0, \zeta) = 1, \quad Y(0, \zeta) = 1, \quad J(t, t, \zeta) = X(t, \zeta),$$

$$e(0, \zeta) = 0, \quad u(t, t) = g(t) + \int_0^1 e(t, \zeta') w(\zeta') d\zeta'$$

При численном решении система интегродифференциальных уравнений аппроксимируется системой обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом интегралы заменяются конечными суммами с помощью квадратурных формул Гаусса

$$\int_0^1 f(\zeta) d\zeta \approx \sum_{i=1}^N f(\zeta_i) \alpha_i$$

Здесь  $\zeta_i$  и  $\alpha_i$  — абсциссы и веса квадратур порядка  $N$ . Применение метода инвариантного погружения позволяет в процессе численного расчета получать результаты для промежуточных значений ширины реки  $d$ . Система уравнений записывается в виде

$$X_{i'}'(\xi) = Y_i(\xi) \sum_{k=1}^N Y_k(\xi) w_k, \quad \xi > 0, \quad i=1, 2, \dots, N$$

$$\begin{aligned}
 Y_i'(\xi) &= -\zeta_i^{-1} Y_i(\xi) + X_i(\xi) \sum_{k=1}^N Y_k(\xi) w_k, & \xi > 0 \\
 J_{ij}'(\xi) &= -\zeta_i^{-1} J_{ij}(\xi) + X_i(\xi) \sum_{k=1}^N J_{kj}(\xi) w_k, & \xi \geq t_j \\
 e_i'(\xi) &= -\zeta_i^{-1} e_i(\xi) + X_i(\xi) \left[ g(\xi) + \sum_{k=1}^N e_k(\xi) w_k \right], & \xi > 0 \\
 u_j'(\xi) &= \left[ g(\xi) + \sum_{k=1}^N e_k(\xi) w_k \right] \sum_{k=1}^N J_{kj}(\xi) w_k, & \xi \geq t_j, \quad j=1, 2, \dots, N
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

Здесь штрих означает производную по  $\xi$ , индексы  $i$  и  $j$  — узлы по  $\zeta$  и  $t$ ,  $w_i = w(\zeta_i)\alpha_i$ , где  $\zeta_i$  — узлы квадратурных формул Гаусса порядка  $N$  на отрезке  $[0, 1]$ ,  $\alpha_i$  — соответствующие веса.

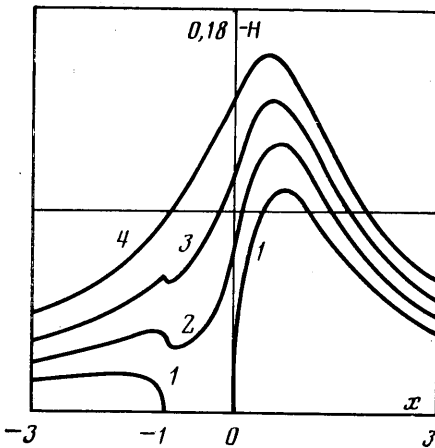
В данной задаче в силу (2.7)

$$\omega_i = -\frac{1}{\pi\alpha\omega} \frac{\alpha_i}{\zeta_i \sqrt{1-\zeta_i^2}}$$

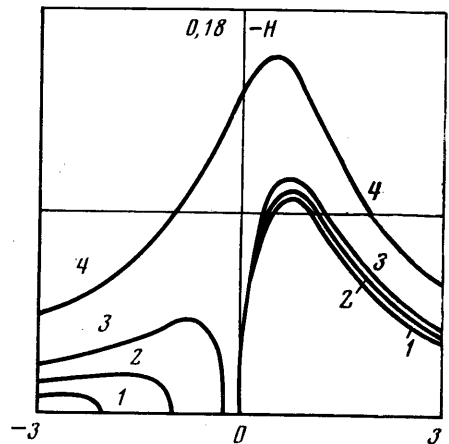
Начальные условия преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
 X_i(0) &= 1, & Y_i(0) &= 1, & J_{ij}(t_j) &= X_i(t_j), \\
 e_i(0) &= 0, & u_j(t_j) &= g(t_j) + \sum_{k=1}^N e_k(t_j) w_k
 \end{aligned}$$

В процессе счета интервал интегрирования системы (2.9) — отрезок  $[0, \omega d]$  — разбивается на подынтервалы интегрирования. На первом шаге (интегрирование на первом подынтервале) число уравнений  $4N+1$ , на каждом следующем добавляется  $N+1$  уравнений с соответствующими начальными условиями, найденными после интегрирования на предыдущем подынтервале.



Фиг. 2



Фиг. 3

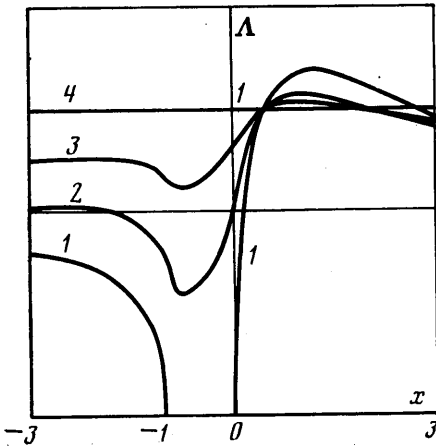
Интегрирование системы (2.9) производилось с помощью стандартной подпрограммы, основанной на методе Кутты — Мерсона, на ЭВМ БЭСМ-6.

Некоторые характерные варианты (с существенным влиянием водоема) распределения пьезометрического напора показаны на фиг. 2, 3. При этом брались значения  $x_0=0,5$ ,  $y=z=0$ . Фигура 2 иллюстрирует зависимость распределения напора от

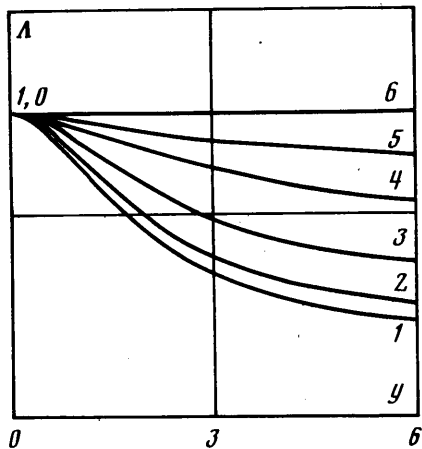
величины сопротивления русла  $\alpha$  (полагалось  $d=1$ , ветви 1-4 соответствуют случаям  $\alpha=0, 0,5, 2, \infty$ ). Фигура 3 показывает зависимость  $H$  от ширины реки  $d$  (здесь полагалось  $\alpha=0$ , ветви 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям  $d=2; 1; 0,25; 0$ ).

Как видно из фиг. 3, при  $d \geq 0,25$  существенное отличие распределений напоров для различных  $d$  наблюдается только при  $x < -d$ , т.е. на противоположном от скважины берегу.

Для получения значения коэффициента фильтрации по данным опытно-фильтрационных работ необходимо знать безразмерное теоретическое значение напора в нужных нам точках, а следовательно и коэффициент сопротивления русла  $\alpha$ . Тогда коэффициент фильтрации определится из соотношения (1.7).



Фиг. 4



Фиг. 5

Чтобы проиллюстрировать зависимость  $H$  от  $\alpha$ , введем функцию

$$\Lambda(x, y, z) = \left[ \frac{H(x, y, z)}{H(x_1, y_1, z_1)} \right] \frac{H_1(x_1, y_1, z_1)}{H_1(x, y, z)}$$

Здесь  $(x_1, y_1, z_1)$  — координаты некоторой фиксированной точки в полупространстве  $z \geq 0$ . Выражение, стоящее в квадратных скобках, как следует из (1.7), может браться и в размерном виде. При этом должны соблюдаться критерии подобия согласно формулам (1.6), (1.7). Это позволяет по графикам  $\Lambda(x, y, z)$  при различных  $\alpha$  и по данным натурных измерений напора в двух точках с безразмерными координатами  $(x, y, z)$  и  $(x_1, y_1, z_1)$  определить сопротивление русловых отложений  $\alpha$ .

На фиг. 4, 5 представлены графики  $\Lambda(x, y, z)$  при различных  $\alpha$ . Фигура 4 соответствует фиг. 2, при этом полагалось  $x_1=x_0, y_1=y_0, z_1=z_0$ . Фигура 5 показывает изменение  $\Lambda$  по координате  $y$ . Здесь брались значения  $x_1=x_0=0,5, d=1, z_1=z_0=y_1=0$ , ветви 1-6 соответствуют значениям  $\alpha=0; 0,1; 0,5; 2; 5; \infty$ .

Из рассмотрения графиков следует, что наиболее удобно определять  $\alpha$ , располагая датчики измерения напора вдоль уреза реки либо при  $x < -d$  — перпендикулярно урезу.

В заключение автор выражает благодарность В. Б. Баранову и В. М. Шестакову за постоянное внимание к работе и обсуждение результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шестаков В. М. Динамика подземных вод. М.: Изд-во МГУ, 1979, 368 с.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
3. Сазонов А. Б. Фильтрация при откачке из несовершенной скважины вблизи водоема. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 5, с. 161-164.
4. Касти Дж., Калаба Р. Методы погружения в прикладной математике. М.: Мир, 1976. 223 с.

Казань

Поступила в редакцию  
26.XII.1980