**МЕХАНИКА**
**ЖИДКОСТИ И ГАЗА**
**№ 2 · 1982**

УДК 532.5.013.4:538.4

# УСТОЙЧИВОСТЬ КРУГЛОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КОНФИГУРАЦИИ ЖИДКОГО МЕТАЛЛА, УДЕРЖИВАЕМОГО ВЫСОКОЧАСТОТНЫМ ПОЛЕМ

ЛАДИКОВ-РОЕВ П. Ю.

Рассмотрим цилиндрический индуктор радиуса $b$. Выберем декартовую систему координат $(x, y, z)$ так, чтобы ось $z$ совпадала с осью индуктора, а ось $y$ была направлена вертикально вверх, и цилиндрическую систему координат $(r, \vartheta, z)$. Оси цилиндрической и декартовой систем совпадают. Угол $\vartheta$ отсчитывается от оси $y$ в положительном направлении. Индуктор заполняется металлом. Под воздействием высокочастотного электромагнитного поля, вызванного поверхностным током индуктора $\mathbf{j}=\{0, j\vartheta, jz\}$, металл расплавляется и отрывается от стенок индуктора. Будем считать частоту электромагнитного поля $\nu$ достаточно высокой, чтобы глубиной скин-слоя можно было пренебречь, тогда электромагнитное поле будет действовать только в вакуумном промежутке между металлом и индуктором. Обозначим через $a$ радиус жидкого металла и рассмотрим случай хорошего заполнения индуктора металлов, т. е. $\varepsilon=1-a/b\ll 1$. В состоянии равновесия напряженность магнитного поля имеет следующие компоненты: $\mathbf{H}=\{H_r, H_\vartheta, H_z\}$.

Рассмотрим состояние равновесия металла. При сделанных предположениях его поверхность близка к цилиндрической

$$r=a+\sum a_n(a)\cos n\vartheta, \qquad a_n\sim\varepsilon a \tag{1}$$

На поверхности жидкого металла выполняется условие равенства давления

$$P_0-\rho g y=\frac{\mu_l H^2}{2}+\sigma_0\frac{1}{r}, \qquad y=r\cos\vartheta \tag{2}$$

Здесь $\sigma_0$ – коэффициент поверхностного натяжения жидкого металла. В пространстве между металлом и индуктором магнитное поле зададим скалярным потенциалом $\varphi_0$:

$$\varphi_0=\vartheta H_I a+H_0 z+\sum_n (C_{1n}r^n+C_{2n}r^{-n})\sin n\vartheta \tag{3}$$

где $H_I$ и $H_0$ – заданные на поверхности индуктора $(r=a)$ азимутальная и продольная составляющие высокочастотного магнитного поля.

Постоянные $a_n$, $C_{1n}$, $C_{2n}$ определяются из граничных условий (2) и условия равенства нулю нормальной компоненты магнитного поля на поверхности металла и индуктора

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0 \tag{4}$$

Подставляя выражение для потенциала (3) в условия (2), (4) с учетом (1) и разлагая в ряд по $\varepsilon$, получим для состояния равновесия:

$$H_r=\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}=\varepsilon A_1(t)\sin\vartheta+\dots$$

$$H_\vartheta=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\vartheta}=H_I\frac{a}{r}\sin(\nu t+\alpha_1)+\varepsilon A_1(t)\left(\frac{b^2}{r}-\frac{1}{b}\right)\cos\vartheta+\dots$$

$$H_z=H_0\sin(\nu t+\alpha_2), \qquad H_0=\text{const}, \qquad H_I=\text{const}$$

Здесь $\nu$ – частота высокочастотного поля, $\alpha=\alpha_1-\alpha_2$ – сдвиг фаз между продольным и азимутальным полями.

Исследование устойчивости будем проводить методом малых возмущений. Пусть частицы жидкого металла в начальный момент испытывают малые смещения $\xi(r, \vartheta, z)$, решение для возмущений ищем в виде рядов по $\varepsilon$:

$$\xi=\xi^{(0)}+\varepsilon\xi^{(1)}+\ldots,\qquad p=p^{(0)}+\varepsilon p^{(1)}+\ldots,\qquad \varphi=\varphi^{(0)}+\varepsilon\varphi^{(1)}+\ldots,\qquad \mathbf{h}=\operatorname{grad}\varphi$$

Здесь $\varphi(r, \vartheta, z)$ – скалярный потенциал для возмущения магнитного поля $\mathbf{h}$, $\xi(r, \vartheta, z, t)$ – вектор смещения частиц жидкого металла, $p(r, \vartheta, z, t)$ – возмущение гидродинамического давления. В данной статье будет рассмотрено только нулевое приближение по $\varepsilon$ (индекс нуль опущен). Для этого приближения имеет место следующая система уравнений:

$$\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-\operatorname{grad}p,\quad \operatorname{div}\xi=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{h}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{h}=0,\quad \Delta\varphi=0\quad (a<r<b) \tag{5}$$

На границе жидкого металла с точностью до величин первого порядка малости по $\xi$

$$(\mathbf{H}+\mathbf{h})\operatorname{grad}f=0,\qquad \frac{\partial p_0}{\partial r}\xi_r+p=\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu_l\frac{H^2}{2}\right)\xi_r+\mu_l\mathbf{H}\mathbf{h}+p_\Sigma \tag{6}$$

Здесь $f(r, \vartheta, z, t)=r-a-\xi_r(r, \vartheta, z, t)=0$ – уравнение возмущенной поверхности жидкого металла, $p_\Sigma$ – возмущение поверхностного натяжения.

Решение данной задачи ищем в виде рядов Фурье по $\vartheta$, $z$:

$$\xi=\sum_{m,k}\xi_{mk}(r,t)e^{i(m\vartheta+kz)},\qquad p=\sum_{m,k}p_{mk}(r,t)e^{i(m\vartheta+kz)},\qquad \varphi=\sum_{m,k}\varphi_{mk}(r,t)e^{i(m\vartheta+kz)}$$

Из уравнения и граничных условий для возмущенного магнитного поля получим

$$p_{mk}(r,t)=C_{mk}(t)I_m(kr),\qquad \frac{\partial^2\xi_{rmk}}{\partial t^2}=\frac{k}{\rho}C_{mk}(t)I_m'(kr)$$

$$\frac{\partial^2\xi_{\vartheta mk}}{\partial t^2}=-\frac{im}{k\rho}C_{mk}(t)I_m(kr),\qquad \frac{\partial^2\xi_{zmk}}{\partial t^2}=-\frac{ik}{\rho}C_{mk}(t)I_m(kr)$$

$$\varphi_{mk}(r, t)=D_{mk}(t)I_m(kr)+F_{mk}(t)K_m(kr)$$

$$C_{mk}(t)=-\rho\frac{\partial^2\xi_{rmk}}{\partial t^2}(a,t)\frac{1}{kI_m'(ka)}$$

$$D_{mk}(t)=-F_{mk}(t)=\frac{iH_I}{a}\xi_{rmk}(a,t)\frac{[m\sin(\nu t+\alpha_1)+nq\sin(\nu t+\alpha_2)]}{\chi_{mk}'(a,b)}$$

$$\chi_{mk}(r,b)=K_m'(kb)I_m(kr)-I_m'(kb)K_m(kr),\qquad k=\frac{n}{l},\qquad q=\frac{aH_0}{lH_I}$$

Здесь $l$ – характерный размер задачи, $n=0$, 1, 2 и т. д.

Подставив значения $p_{mk}$ и $\varphi_{mk}$ в граничное условие (6)

$$\sum_{mk}e^{i(m\vartheta+kz)}\left\{-\rho g\cos\vartheta\,\xi_{mk}(t)-\rho\frac{\partial^2\xi_{mk}}{\partial t^2}\frac{I_m(ka)}{kI_m'(ka)}+\frac{\mu_lH_I^2\sin(\nu t+\alpha_1)}{a}\xi_{mk}(t)+\right.$$

$$+\mu_l\frac{H_I}{a^2}[m\sin(\nu t+\alpha_1)+nq\sin(\nu t+\alpha_2)]^2\frac{\chi_{mk}(a,b)}{\chi_{mk}'(a,b)}\xi_{mk}(t)+$$

$$\left.+\frac{\sigma_0}{a^2}(m^2-1+k^2a^2)\xi_{mk}(t)\right\}=0$$

Здесь $\sigma_0$ – коэффициент поверхностного натяжения, $\xi_{mk}=\xi_{rmk}(t)$ – характерная частота колебаний жидкого металла, $\Omega_0=\tau_0^{-1}=\sqrt{g/a}\ll\nu$ – частоты внешнего поля. Произведя усреднение по периоду высокочастотного поля для коэффициентов при отдельных гармониках, получим систему уравнений безразмерных переменных

$$(\beta_{mk}-\Omega^2)\eta_{mk}+\frac{1}{2u_{mk}^2}(\eta_{m+1k}+\eta_{m-1k})=0 \tag{7}$$

$$t=\sqrt{a/g}\,\tau,\qquad R_H=\frac{\mu_l H_I^2}{2\rho g a},\qquad R_\sigma=\frac{\sigma}{\rho g a^2}$$

$$u_{mk}^2=\frac{I_m(ka)}{kaI_m'(ka)},\qquad v_{mk}^2=-\frac{\chi_{mk}(a,b)}{\chi_{mk}'(a,b)}$$

$$\beta_{mk}=\frac{R_H[(m^2+n^2q^2-2mnq\cos\alpha)v_{mk}^2-1]+R_\sigma(k^2a^2+m^2-1)}{u_{mk}^2}$$

$$a\eta_{mk}(t)e^{i\Omega t}=\frac{\nu}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\nu}\xi_{mk}(t)\,dt$$

Система уравнений (7) заменой $\eta_{mk}=\zeta_{mk}/u_{mk}$ приводится к симметричному виду.

Приравняв определитель системы уравнений (7) к нулю, получим бесконечное уравнение для определения собственных значений при каждом значении $n$ или $k$. Все собственные значения являются действительными, поскольку матрица системы уравнений является симметричной якобиевой матрицей. Неустойчивым колебаниям соответствуют отрицательные значения $\Omega^2$. Собственные значения $\Omega^2$ системы уравнений (7) определялись численно на ЭВМ М-4030 при следующих значениях: $a=0{,}5$ см, $b=7{,}85$ см, $ka=0{,}2$, $n=0$, 1, 2, 3..., $\varepsilon=0{,}1$; 0,5, $R_H=\mu_l H^2/2\rho g a=0{,}5$; 1; 2; $R_\sigma=0{,}34$; 0,87; 1,7; $q=0$; 0,5; 1; $\cos\alpha=0$; 0,5; 1.

| $n$ | $R_H=0{,}5$ | | $R_H=1$ | | $R_H=2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\varepsilon=0{,}1$ | $\varepsilon=0{,}5$ | $\varepsilon=0{,}1$ | $\varepsilon=0{,}5$ | $\varepsilon=0{,}1$ | $\varepsilon=0{,}5$ |
| | | | $R_\sigma=0{,}34$ | | | |
| 1 | 0,015 | 0,088 | 0,022 | 0,047 | 0,042 | 0,065 |
| 2 | 0,061 | 0,219 | 0,103 | 0,186 | 0,185 | 0,227 |
| 3 | 0,151 | 0,382 | 0,216 | 0,413 | 0,383 | 0,529 |
| 4 | – | 0,007 | – | 0,042 | – | 0,161 |
| 4 | 0,243 | 0,514 | 0,361 | 0,628 | 0,692 | 0,855 |
| 5 | – | 0,011 | 0,415 | 0,066 | – | 0,046 |
| 5 | 0,305 | 0,613 | 0,498 | 0,810 | 0,915 | 0,368 |
| | | | | | | 1,019 |
| | | | $R_\sigma=0{,}87$ | | | |
| 1 | 0,022 | 0,052 | 0,039 | 0,062 | 0,065 | 0,070 |
| 2 | 0,103 | 0,179 | 0,140 | 0,198 | 0,218 | 0,258 |
| 3 | 0,205 | 0,360 | 0,291 | 0,339 | 0,449 | 0,517 |
| 4 | 0,280 | 0,418 | 0,415 | 0,562 | 0,707 | 0,748 |
| 5 | 0,304 | 0,441 | 0,494 | 0,665 | 0,904 | 0,996 |
| | | | $R_\sigma=1{,}7$ | | | |
| 1 | 0,041 | 0,061 | 0,056 | 0,066 | 0,072 | 0,086 |
| 2 | 0,155 | 0,214 | 0,161 | 0,242 | 0,271 | 0,301 |
| 3 | 0,289 | 0,361 | 0,359 | 0,448 | 0,532 | 0,598 |
| 4 | 0,375 | 0,437 | 0,496 | 0,581 | 0,773 | 0,865 |
| 5 | 0,273 | 0,340 | 0,487 | 0,559 | 0,922 | 0,996 |

Расчеты проводились для системы уравнений 17-го порядка. Добавление новых уравнений не влияло на величину неустойчивых собственных значений.

Случай отсутствия продольного поля $q=0$. Рассчитывалась система уравнений для значений $m$ от $-8$ до 8, $n=1$, 2, 3, 4, 5.

При хорошем заполнении индуктора металлом ($\varepsilon=0{,}1$) имеется только один неустойчивый корень $\Omega^2$. Абсолютная величина этого корня возрастает с возрастанием $n$ до некоторого значения $n=n_*$, с превышением которого начинает убывать. Этот эффект связан с влиянием сил поверхностного натяжения, без учета которых абсолютная величина неустойчивого корня возрастает с ростом $n$. С удалением металла от индуктора, т. е. увеличением $\varepsilon$, абсолютное значение неустойчивого корня растет и при больших значениях $n=4{,}5$ появляются два неустойчивых корня. Увеличение $R_H$ также способствует развитию неустойчивости. В таблице приведены значения

$|\Omega^2|$ абсолютных величин неустойчивых корней (при $q=0$) для олова $R_\sigma=0{,}34$, для железа $R_\sigma=0{,}87$ и алюминия $R_\sigma=1{,}7$. Во всех случаях, за исключением $R_\sigma=0{,}34$, $\varepsilon=0{,}5$, имеется один неустойчивый корень.

Систему (7) можно привести к нормальным координатам $\zeta^*$. Нормальные колебания, соответствующие неустойчивому значению $\Omega^2=-0{,}2819$, $R_\sigma=0{,}87$; $R_H=1$; $\varepsilon=0{,}1$, $n=3$, связаны с исходным базисом. С точностью до величин порядка $10^{-4}$ включительно неустойчивая деформация может быть описана (учитывая симметрию по $z$) соотношением

$$\zeta_3^*\approx[0{,}9979-0{,}0924\cos\vartheta+0{,}0032\cos 2\vartheta]\cos 3z',\qquad z'=z/l \tag{8}$$

Первое слагаемое представляет собой периодическое изменение поперечного сечения вдоль цилиндра. В теории плазменных неустойчивостей такая неустойчивость носит название перетяжки [2], однако, если при гидромагнитных неустойчивостях плазмы «перетяжка» присутствует в чистом виде, здесь на нее накладываются малые смещения вдоль вертикальной оси (вертикальная змейка) и периодическое изменение формы поперечного сечения.

Выражение для величины собственного вектора показывает, что для анализа неустойчивости в случае $q=0$ без продольного поля достаточно ограничиться тремя уравнениями: $\eta_0$, $\eta_1$ и $\eta_{-1}$. Значениями $\eta_2$ и $\eta_{-2}$ и другими можно пренебречь.

В случае $\cos\alpha=0$, $\alpha=\pi/2$ (случай круговой поляризации) система устойчива при всех рассмотренных значениях параметров $q$, $R_H$, $R_\sigma$, $\varepsilon$. Вектор суммарной напряженности магнитного поля описывает в каждой точке жидкого цилиндра эллипс и сглаживает возникающие возмущения.

При $\cos\alpha=1$, $\alpha=0$, сдвиг фаз отсутствует. Вектор суммарной напряженности магнитного поля изменяется вдоль прямой. Система симметрична относительно значений $m-nq=0$ и ведет себя подобно рассмотренному ранее случаю для $q=0$. Это объясняется тем, что магнитное поле имеет определенное направление и не может сгладить возмущения, гребень которых ориентирован вдоль этого направления, т. е. возмущения вида $m-nq=0$. Однако в данном случае неустойчивые колебания развиваются только при небольших значениях $n=1{,}2$. Это можно объяснить тем, что более «крутым» возмущениям мешает развиться гравитация.

Неустойчивые корни локализуются около целых значений $nq$. Выражение для нормальных колебаний через компоненты смещения в старом базисе для $\Omega^2=-1{,}0317$, $\varepsilon=0{,}1$; $R_\sigma=0{,}87$; $q=1$, $n=1$ с точностью до $10^{-4}$ имеют вид

$$\eta_1^*=\{-0{,}0067+0{,}9968\cos\vartheta-0{,}078\cos 2\vartheta+0{,}003\cos 3\vartheta\}\cos z'$$

Таким образом, при отсутствии продольного поля ($q=0$) высокочастотное удержание металла вследствие неустойчивости невозможно (без дополнительных средств автоматической стабилизации.

Продольное поле ($q=0{,}5$; 1) при отсутствии сдвига фаз не стабилизирует систему. Возникают винтовые возмущения, которые нарастают со временем и приводят к разрушению конфигурации и жидкого металла. Гребень этих возмущений ориентирован вдоль магнитной силовой линии. Продольное поле при сдвиге фаз на $\pi/2$ (круговая и эллиптическая поляризация) полностью обеспечивает устойчивое удержание жидкого металла.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладиков Ю. П.* Удержание жидкого металла в вакууме магнитным полем круговой поляризации при наличии проводящего кожуха.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 2, с. 8–16.
2. *Шафранов В. Д.* Об устойчивости плазменного шнура с распределенным током.– В кн.: Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций. Т. 4. М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 61–69.

Киев

Поступила в редакцию
21.VI.1980